Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев

(Горький)

Вопрос об устойчивости состояний равновесия неголономных систем рассматривался в работах Уиттекера [1], Боттемы [2], М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера [3], А. Н. Обморшева [4], Г. Н. Князева [5] и др. Однако предлагаемые в этих работах способы исследования устойчивости, а также точки зрения на природу нулевых корней не согласуются между собой. Как известно, Уиттекер считал возможным проинтегрировать линеаризованные уравнения неголономных связей, после чего исчезало различие между голономными и неголономными системами. По существу Уиттекер сводил задачу об устойчивости состояний равновесия неголономной системы к соответствующей задаче для голономной системы с числом обобщенных координат, уменьшенным на число уравнений неголономных связей. Боттема подверг сомнению вывод Уиттекера и, устранив неточность в его рассуждениях, показал, что в отличие от голономной системы характеристический детерминант неголономной системы является несимметричным и что характеристическое уравнение неголономной системы обладает нулевыми корнями, число которых равно числу уравнений неголономных связей. Ввиду этого Боттема пришел к выводу, что здесь имеет место критический случай теории устойчивости изолированного состояния равновесия. Следовательно, вопрос об устойчивости равновесия неголономной системы в линейном приближении остается открытым, потому что до сих пор еще не известны в общем случае условия устойчивости системы, характеристическое уравнение которой имеет произвольное число нулевых корней. Однако М. А. Айзерман и Ф. Р. Гантмахер заметили, что в данном случае задача об устойчивости решается до конца. Они показали, что эта задача сводится к особенному случаю, который был полностью исследован А. М. Ляпуновым и И. Г. Малкиным. М. А. Айзерман и Ф. Р. Гантмахер установили, что состояние равновесия неголономной системы является устойчивым (но не асимптотически), если все корни характеристического уравнения, кроме нулевых корней, число которых равно числу уравнений неголономных связей, имеют отрицательные действительные части. Опираясь на этот результат, Г. Н. Князев предложил считать критическими случаями лишь такие, когда число нулевых корней характеристического уравнения больше числа уравнений неголономных связей. В своей работе [5] Г. Н. Князев рассмотрел случай, когда число нулевых корней больше числа уравнений неголономных связей на единицу. Упомянем, наконец, работу [4] А. Н. Обморшева, который составил линеаризованные уравнения малых колебаний неголономной системы около состояния равновесия в общем случае, а также уравнения малых колебаний относительно стационарного движения для систем Чаплыгина. Касаясь вопроса о нулевых корнях, А. Н. Обморшев заметил, что Боттема не проинтегрировал линеаризованные уравнения неголономных связей и в результате получил неоправданные нулевые корни характеристического уравнения.

Приведенный обзор литературы указывает не только на отсутствие единого подхода к вопросу об устойчивости состояний равновесия неголономных систем, но и на ряд противоречий в методе исследования устойчивости. В самом деле, если Уиттекер поступает правильно, интегрируя линеаризованные уравнения неголономных связей, тогда не прав Боттема, который этого не сделал и в результате получил нулевые корни. Если же прав Боттема, то Уиттекер совершает принципиальную ошибку при исследовании устойчивости равновесия неголономной системы. Но тогда остается неясность в истолковании природы нулевых корней: Боттема, М. А. Айзерман и Ф. Р. Гантмахер связывают появление нулевых корней с критическим случаем в смысле Ляпунова, Г. Н. Князев не считает этот случай критическим. А. Н. Обморшев рассматривает появление нулевых корней как недоразумение, вызванное тем, что не были проинтегрированы линеаризованные уравнения неголономных связей.

В настоящей работе показывается, что неголономная система обладает той особенностью, что ее состояния равновесия не могут быть изолированными, а образуют многообразие, размерность которого не менее числа неголономных связей. Эта особенность обусловливает наличие нулевых корней у характеристического уравнения. Формулируется теорема об асимптотической устойчивости многообразия состояний равновесия. Изложенное иллюстрируется примерами.

§ 1. Многообразие состояний равновесия неголономной системы. Пусть движение системы с функцией Лагранжа

$$L = L(q_1, \ldots, q_n; \quad \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$$

и обобщенными силами

$$Q_1(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n), \ldots, Q_n(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$$

подчинено неголономным связям, которые выражаются уравнениями [1]

$$\omega_{\alpha\beta}(q_1, \ldots, q_n)\, \dot{q}_\beta = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m;\ \beta = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Составим уравнения движения с неопределенными множителями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} - \frac{\partial L}{\partial q_\beta} = Q_\beta + \lambda_\alpha \omega_{\alpha\beta} \tag{1.2}$$

Система уравнений (1.1) и (1.2) позволяет определить $q_1, \ldots, q_n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ как функции времени и начальных значений. Из уравнений (1.1) и (1.2) следует, что состояния равновесия неголономной системы определяются n уравнениями

$$\partial L / \partial q_\beta + Q_\beta + \lambda_\alpha \omega_{\alpha\beta} = 0 \tag{1.3}$$

относительно $n + m$ неизвестных $q_1, \ldots, q_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. В силу этого в общем случае имеем многообразие состояний равновесия, образующих в n-мерном пространстве конфигураций поверхность O_m размерности m. В самом деле, выражая при помощи уравнений (1.3) обобщенные координаты $q_1, \ldots, q_n$ через $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, получаем поверхность O_m в параметрическом представлении $q_\beta^\circ = q_\beta^\circ(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $(\beta = 1, \ldots, n)$. Отметим, что в конкретных задачах (см. приводимые ниже примеры) не все уравнения (1.3) могут оказаться независимыми. В таком случае число измерений многообразия состояний равновесия будет больше m.

Исключим из уравнений (1.2) неопределенные множители и запишем уравнения движения (1.1), (1.2) неголономной системы в нормальной форме

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_{2n-m}) \qquad (i = 1, \ldots, 2n - m) \tag{1.4}$$

где через x_i обозначены переменные $q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{n-m}$. Пусть в фазовом пространстве $(x_1, \ldots, x_{2n-m})$ поверхность O_m определяется

[1] Здесь и в дальнейшем по дважды повторяющимся индексам производится суммирование, а точка у букв и скобок обозначает производную по времени.

уравнениями $x_i^\circ = x_i^\circ\ (u_1, \ldots, u_m)$ $(i = 1, \ldots, 2n-m)$. Наряду с переменными $u_1, \ldots, u_m$ введем новые переменные $v_1, \ldots, v_{2(n-m)}$ посредством соотношений

$$x_i = x_i^\circ (u_1, \ldots, u_m) + \gamma_{ij} (u_1, \ldots, u_m)\, v_j$$
$$(i = 1, \ldots, 2n-m;\ j = 1, \ldots, 2(n-m))$$

В новых переменных уравнения (1.4) запишутся в виде

$$du_i \,/\, dt = g_i (u, v), \qquad dv_j \,/\, dt = g_j (u, v) \tag{1.5}$$

Линеаризуем уравнения движения (1.5) в окрестности поверхности состояний равновесия. Разлагая правые части уравнений (1.5) в ряды по малым величинам $v_1, \ldots, v_{2(n-m)}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= a_i (u_1,\ldots, u_m) + a_{ij} (u_1,\ldots, u_m)\, v_j + O(\|v\|^2) + \ldots \\ \frac{dv_j}{dt} &= b_j (u_1,\ldots, u_m) + b_{jk} (u_1,\ldots, u_m)\, v_k + O(\|v\|^2) + \ldots \end{aligned} \qquad \left(\begin{matrix} i = 1,\ldots, m \\ j,\ k = 1,\ldots, 2(n-m) \end{matrix}\right)$$

$$\|v\| = (v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_{2(n-m)}^2)^{1/2} \tag{1.6}$$

Здесь выражение $O(\|v\|^2)$ обозначает члены не ниже второго порядка малости относительно $\|v\|$. Нетрудно заметить, что в уравнениях (1.6) коэффициенты разложения a_i и b_j равны нулю в силу того, что на поверхности O_m величины

$$v_1,\ v_2, \ldots, v_{2(n-m)},\ v_1^{\boldsymbol\cdot}, \ldots, v_{2(n-m)}^{\boldsymbol\cdot},\ u_1^{\boldsymbol\cdot}, \ldots, u_m^{\boldsymbol\cdot}$$

обращаются в нуль. Характеристическое уравнение системы (1.6) для любой точки поверхности O_m имеет вид

$$\left|\begin{matrix} p & 0 & \ldots & 0 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,\,2(n-m)} \\ 0 & p & \ldots & 0 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,\,2(n-m)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & p & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{m,\,2(n-m)} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{11} - p, & b_{12} & \ldots & b_{1,\,2(n-m)} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{21} & b_{22} - p & \ldots & b_{2,\,2(n-m)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{2(n-m),1} & b_{2(n-m),2} & \ldots & b_{2(n-m),\,2(n-m)} - p \end{matrix}\right| = 0 \tag{1.7}$$

из которого непосредственно следует наличие m нулевых корней.

Таким образом, число нулевых корней характеристического уравнения не менее размерности многообразия состояний равновесия [1].

[1] Случай, когда число нулевых корней характеристического уравнения больше размерности многообразия состояний равновесия O_m, следует рассматривать как особый.

§ 2. Теорема об асимптотической устойчивости многообразия состояний равновесия. Из предыдущего следует, что изучать устойчивость состояний равновесия неголономной системы имеет смысл лишь по отношению к малым отклонениям от поверхности O_m.

При этом естественно рассматривать вторую группу уравнений системы (1.6) независимо от первой группы уравнений, временно трактуя переменные $u_1, \ldots, u_m$ как параметры.

Характеристический полином этой вспомогательной системы отличается от определителя (1.7) только отсутствием множителя p^m.

Предположим, что в некоторой области G значений $u_1, \ldots, u_m$ состояние равновесия $v_1 = v_2 = \ldots = v_{2(n-m)} = 0$ системы уравнений

$$dv_j \,/\, dt = b_{jk}(u_1, \ldots, u_m)\, v_k \qquad (j, k = 1, \ldots, 2(n-m)) \tag{2.1}$$

асимптотически устойчиво, так что

$$\| v \| < M \| v^\circ \| e^{-\sigma' t} \qquad (\sigma > 0,\ 0 < M < \infty)$$

Здесь v_j° — начальные значения переменных v_j. Тогда имеет место следующая теорема об асимптотической устойчивости многообразия состояний равновесия неголономной системы.

Теорема. Пусть начальные значения

$$u_1^\circ, \ldots, u_m^\circ, v_1^\circ, \ldots, v^\circ_{2(n-m)}$$

таковы, что значения $u_1^\circ, \ldots, u_m^\circ$ лежат внутри области G асимптотической устойчивости уравнения (2.1), а величины

$$v_1^\circ, \ldots, v^\circ_{2(n-m)}$$

достаточно малы.

Тогда в силу уравнений движения неголономной системы

$$\frac{du_i}{dt} = g_i(u, v), \qquad \frac{dv_j}{dt} = g_j(u, v) \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, 2(n-m)) \tag{2.2}$$

выполняются предельные соотношения

$$\lim_{t\to+\infty} v_j(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} u_i(t) = u_i^*$$

где $u_i^* \in O_m$, но, вообще говоря, $u_i^* \neq u_i^\circ$.

При этом для переменных $v_j(t)$ имеет место оценка

$$\| v(t) \| < M' \| v^\circ \| e^{-\sigma' t} \qquad (0 < \sigma' < \sigma,\ 0 < M' < \infty) \tag{2.3}$$

Доказательство. Запишем уравнения (2.2) в виде

$$\begin{aligned} du_i \,/\, dt &= \{a_{ij}(u_1, \ldots, u_m) + \Delta a_{ij}\}\, v_j \\ dv_j \,/\, dt &= \{b_{jk}(u_1, \ldots, u_m) + \Delta b_{jk}\}\, v_k \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m \\ j, k = 1, \ldots, 2(n-m) \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

где $|\Delta a_{ij}| < \varepsilon$ и $|\Delta b_{jk}| < \varepsilon$, если только для достаточно малого $\delta(\varepsilon)$, $(\delta(\varepsilon) > 0)$

выполняются неравенства

$$\| u - u^\circ \| < \delta(\varepsilon), \qquad \| v \| < \delta(\varepsilon) \tag{2.5}$$

До тех пор, пока выполняется неравенство (2.5), при достаточно малой величине $\delta = \delta^*$ для решения уравнения (2.4) имеет место оценка [1]

$$\| v(t) \| < M' \| v^\circ \| e^{-\sigma' t} \qquad (\sigma' > 0) \tag{2.6}$$

Поэтому

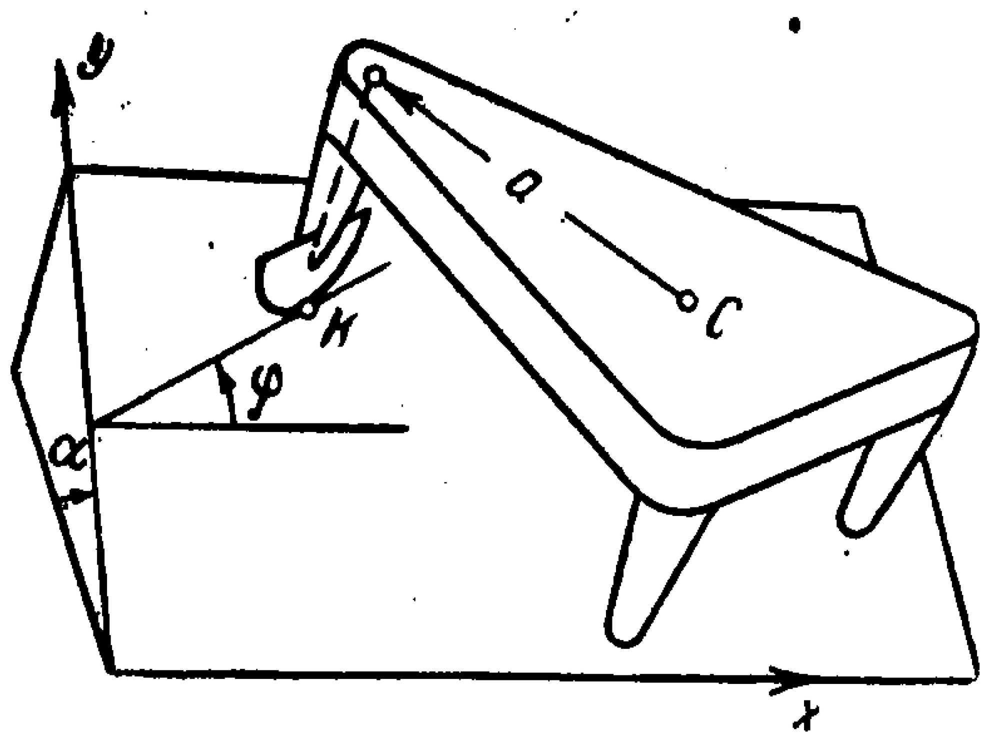
$$\| u^{\boldsymbol\cdot} \| < N \| v^\circ \| e^{-\sigma' t}, \qquad \| u(t) \| < \frac{N}{\sigma} \| v^\circ \| \tag{2.7}$$

Пусть при выбранном значении $\delta = \delta^*$ выполняется неравенство

$$\| v^\circ \| < \min\left(\frac{\delta^*}{2M'}, \frac{\delta^* \sigma'}{2N}, \frac{\delta^*}{2}\right) \tag{2.8}$$

В начальный момент $t = 0$ условие (2.5) выполнено для $\delta = \delta^* / 2$, поэтому в силу равномерно непрерывной зависимости решения от времени t они будут выполняться в течение некоторого промежутка времени $\Delta t_0 \geqslant \tau > 0$.

Отсюда следует, что в течение этого промежутка времени будут иметь место оценки (2.6) и (2.7). По истечении времени Δt_0 в силу этих оценок и неравенства (2.8) величина $v(\Delta t_0)$ удовлетворяет неравенствам (2.5), в которых величина $\delta = {}^1/_2\, \delta^*$. Но тогда отсюда следует, что эти неравенства будут выполняться в течение некоторого промежутка времени $\Delta t_0 + \Delta t_1 \geqslant 2\tau$.



Фиг. 1

Продолжив эти рассуждения, установим, что оценки (2.6) и (2.7) имеют место для любого момента времени $t > 0$, так как любой последующий интервал времени $\Delta t_s \geqslant \tau > 0$, так как в момент времени $\Delta t_0 + \ldots + \Delta t_s$ имеют место неравенства (2.6) и (2.7).

Из выполнения оценок (2.6), (2.7) для всех t и следует утверждение теоремы.

§ 3. Примеры. В качестве первого примера рассмотрим движение твердого тела параллельно наклонной плоскости. Пусть тело опирается на наклонную плоскость тремя ножками, две из которых являются абсолютно гладкими, а третья снабжена полукруглым лезвием, вследствие чего третья ножка не может перемещаться в направлении, перпендикулярном к плоскости лезвия.

Рассмотрим случай, когда проекция центра тяжести тела на наклонную плоскость лежит на прямой, перпендикулярной к лезвию и проходящей через точку K соприкосновения лезвия с плоскостью (фиг. 1).

---

[1] Действительно, согласно [6] для системы уравнений (2.1) существует положительно определенная квадратичная форма V:

$$\alpha \| v \|^2 < V = C_{kj} v_k v_j < \beta \| v \|^2 \qquad (\alpha, \beta > 0) \tag{$*$}$$

такая, что

$$\frac{dV}{dt} < -\gamma \| v \|^2 < -\frac{\gamma}{\alpha} V \qquad (\gamma > 0) \tag{$**$}$$

при любых достаточно малых изменениях коэффициентов b_{jk}, т. е. при выполнении неравенств (2.5) с достаточно малым ε. Из ($*$) и ($**$) получаем

$$V < V|_{t=0}\, e^{-(\beta/d)t} \qquad t$$

и, следовательно,

$$\alpha \| v \|^2 < \gamma \| v^\circ \|^2 e^{-(\beta/\alpha)t}, \quad \text{или} \quad \| v \| < \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} \| v^\circ \| e^{-(\beta/2)t}$$

что и требовалось.

Обобщенными координатами тела являются координаты x, y точки K и угол φ.

Функция Лагранжа

$$L = {}^1/_2\, m\, [(x^{\cdot} + a\varphi^{\cdot} \cos\varphi)^2 + (y^{\cdot} + a\varphi^{\cdot} \sin\varphi)^2 + k^2\varphi^{\cdot 2}] - mg \sin\alpha\, (y - a\cos\varphi)$$

где m — масса тела, k — радиус инерции.

Введем функцию диссипации

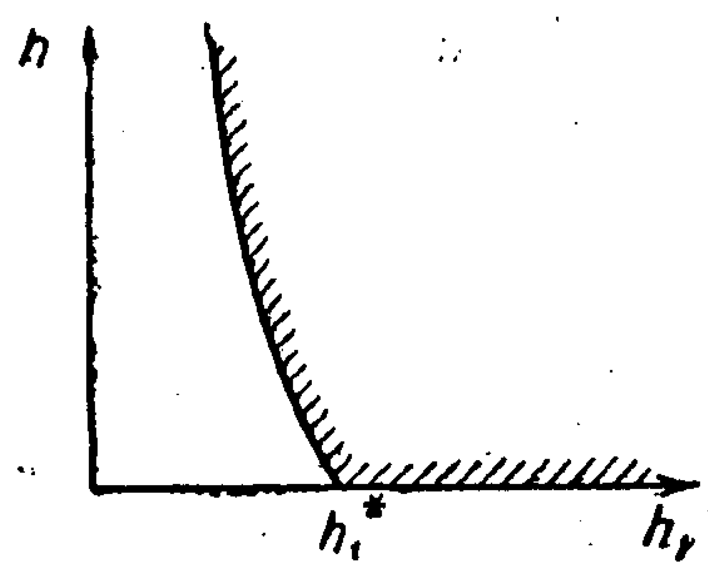
$$\Phi = {}^1/_2\, mh\, (x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}) + {}^1/_2\, mh_1\varphi^{\cdot 2}$$

где $h \geqslant 0$, $h_1 \geqslant 0$ — коэффициенты вязкого трения скольжения и верчения. Неголономная связь выражается уравнением

$$y^{\cdot} - x^{\cdot}\,\mathrm{tg}\,\varphi = 0 \tag{3.1}$$

Составим уравнения движения тела по инерции

$$(x^{\cdot} + a\varphi^{\cdot}\cos\varphi)^{\cdot} + hx^{\cdot} + \lambda\,\mathrm{tg}\,\varphi = 0 \tag{3.2}$$
$$(y^{\cdot} + a\varphi^{\cdot}\sin\varphi)^{\cdot} + hy^{\cdot} + g\sin\alpha - \lambda = 0$$
$$a\,(x^{\cdot}\cos\varphi + y^{\cdot}\sin\varphi)^{\cdot} + (a^2 + k^2)\,\varphi^{\cdot\cdot} + h_1\varphi^{\cdot} + ga\sin\alpha$$
$$\sin\varphi = 0$$



Фиг. 2

Из (3.1) и (3.2) получаем уравнения состояний равновесия

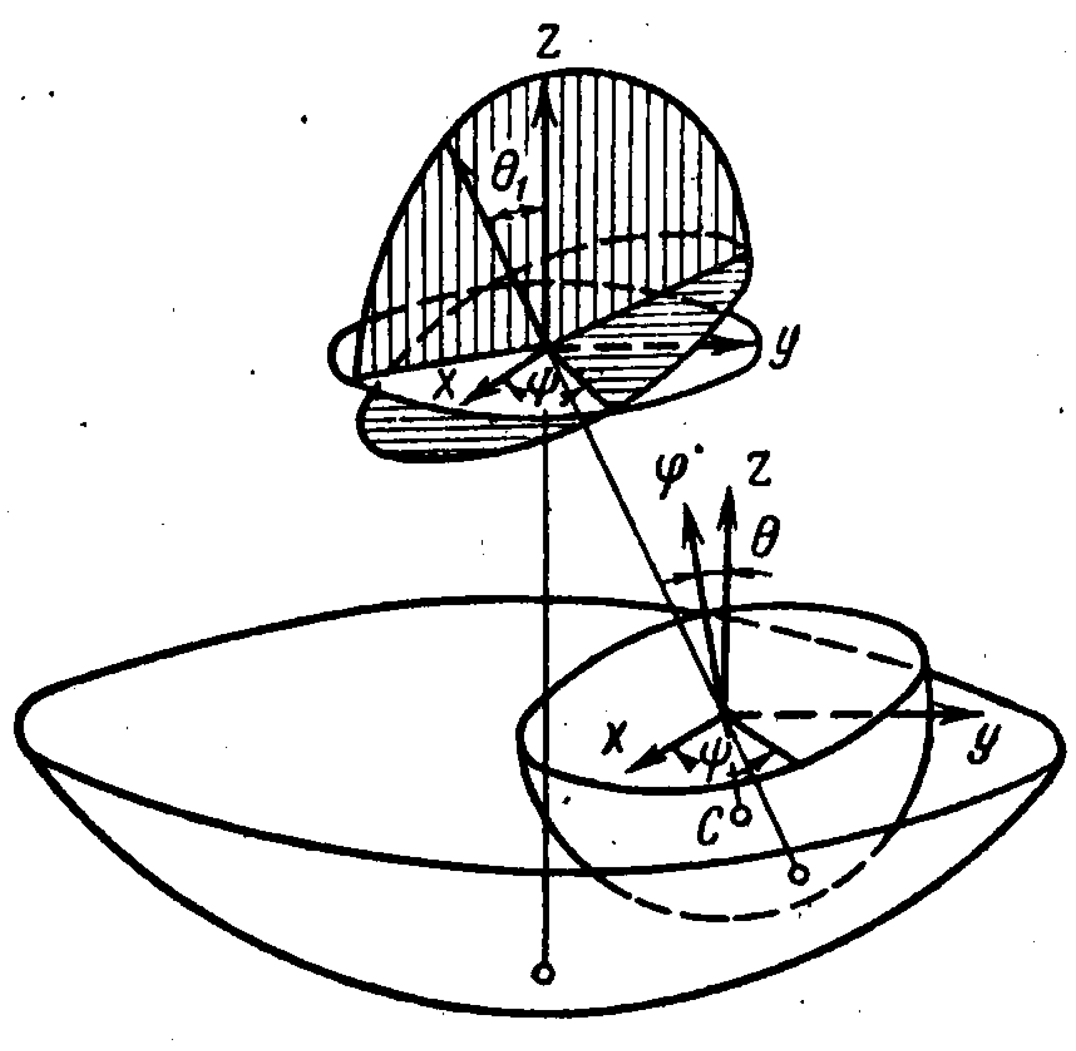
$$\lambda\,\mathrm{tg}\,\varphi = 0, \qquad \lambda = g\sin\alpha, \qquad \sin\varphi = 0 \tag{3.3}$$

Таким образом, состояния равновесия образуют две плоскости: $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, размерность которых равна двум при наличии лишь одного уравнения неголономной связи. Увеличение размерности на единицу произошло из-за того, что из трех уравнений (3.3) два уравнения оказались зависимыми. Полагая

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta$$
$$\varphi = \varphi_0 + \zeta, \quad \lambda = \lambda_0 + \theta$$

где x_0, y_0, φ_0, λ_0 — равновесные значения переменных, линеаризуем уравнения движения (3.1) и (3.2)

$$\eta^{\cdot} = 0, \quad \xi^{\cdot\cdot} + h\xi^{\cdot} \pm a\zeta^{\cdot\cdot} + g\sin\alpha\zeta = 0$$
$$\eta^{\cdot\cdot} + h\eta^{\cdot} - \theta = 0$$
$$\pm a\xi^{\cdot\cdot} + (a^2 + k^2)\,\zeta^{\cdot\cdot} + h_1\zeta^{\cdot} \pm ga\sin\alpha\zeta = 0$$



Фиг. 3

Здесь верхний знак относится к плоскости $\varphi = 0$, а нижний — к плоскости $\varphi = \pi$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$p^2\,\{k^2p^3 + [h\,(a^2 + k^2) + h_1]\,p^2 + h h_1 p \pm hga\sin\alpha\} = 0$$

откуда следует, что плоскость $\varphi = \pi$ всегда неустойчива, а плоскость $\varphi = 0$ устойчива лишь при выполнении неравенства

$$(a^2 + k^2)\,hh_1 > k^2\,ga\sin\alpha - h^2{}_1$$

Граница области устойчивости на плоскости (h_1, h) показана на фиг. 2, где $h_1{}^* = k\,\sqrt{ga\sin\alpha}$.

В качестве второго примера рассмотрим движение осесимметричного тела, ограниченного снизу сферической поверхностью радиуса R, которое может кататься без проскальзывания в сферической чашке радиуса R_1. Центр тяжести тела расположен на расстоянии l от центра его сферической поверхности. В соответствии с обозначениями фиг. 3 обобщенными координатами тела являются углы θ, ψ, φ, θ_1, ψ_1.

Функция Лагранжа

$$L = {}^1/_2\, m\, (R_1 - R)^2\, (\theta_1^{\cdot 2} + \psi_1^{\cdot 2} \sin^2 \theta_1) + {}^1/_2\, (A + ml^2)\, (\theta^{\cdot 2} + \psi^{\cdot 2} \sin^2 \theta) +$$
$$+ ml\, (R_1 - R)\, \{\psi^{\cdot}\psi_1^{\cdot} \sin\theta \sin\theta_1 \cos(\psi - \psi_1) + \theta^{\cdot}\theta_1^{\cdot}\, [\cos\theta\cos\theta_2\cos(\psi - \psi_1) +$$
$$+ \sin\theta\sin\theta_1] + \theta^{\cdot}\psi_1^{\cdot}\cos\theta\sin\theta_1\sin(\psi - \psi_1) - \psi^{\cdot}\theta_1^{\cdot}\sin\theta\cos\theta_1\sin(\psi - \psi_1)\} +$$
$$+ {}^1/_2\, C\, (\psi^{\cdot} + \psi^{\cdot}\cos\theta)^2 + mg\, [(R_1 - R)\cos\theta - l\cos\theta_1]$$

где m — масса тела, C — осевой момент инерции, A — центральный экваториальный момент инерции, g — ускорение силы тяжести. Предполагая, что рассеяние механической энергии происходит из-за наличия трения, введем функцию диссипации

$$\Phi = {}^1/_2\, h\, (R_1/R - 1)^2\, (\theta_1^{\cdot 2} + \psi_1^{\cdot 2}\sin^2\theta_1) + {}^1/_2\, h_1\, \{\psi^{\cdot}\cos\theta_1 - \theta^{\cdot}\sin\theta_1\sin(\psi - \psi_1) +$$
$$+ \varphi^{\cdot}\, [\sin\theta\sin\theta_1\cos(\psi - \psi_1) + \cos\theta\cos\theta_1]\}^2$$

где $h \geqslant 0$, $h_1 \geqslant 0$ — коэффициенты вязкого трения качения и, соответственно, верчения. Условие качения без проскальзывания приводит к двум уравнениям неголономных связей

$$(R_1 - R)\,\psi_1^{\cdot}\sin\theta_1 + R\theta^{\cdot}\cos\theta_1\sin(\psi - \psi_1) + R\psi^{\cdot}\sin\theta_1 +$$
$$+ R\varphi^{\cdot}\, [\cos\theta\sin\theta_1 - \sin\theta\cos\theta_1\cos(\psi - \psi_1)] = 0 \tag{3.4}$$
$$(R_1 - R)\,\theta_1^{\cdot} + R\theta^{\cdot}\cos(\psi - \psi_1) + R\varphi^{\cdot}\sin\theta\sin(\psi - \psi_1) = 0$$

Составляя уравнения (1.2) движения тела по инерции, где обобщенными силами будут $Q_\beta = -\,\partial\Phi / \partial q_\beta^{\cdot}$, получим затем следующие уравнения равновесия:

$$\lambda_1 \sin\theta_1 = 0, \qquad mg\sin\theta_1 = \lambda_2, \qquad \lambda_1\sin\theta_1 = 0 \tag{3.5}$$
$$mgl\sin\theta = R\lambda_1\cos\theta_1\sin(\psi - \psi_1) + R\lambda_2\cos(\psi - \psi_1)$$
$$\lambda_1\, [\cos\theta\sin\theta_1 - \sin\theta\cos\theta_1\cos(\psi - \psi_1)] + \lambda_2\sin\theta\sin(\psi - \psi_1) = 0$$

Из уравнений (3.5) следует, что поверхность O_m состояний равновесия системы определяется уравнениями

$$\psi = \psi_1, \qquad l\sin\theta = R\sin\theta_1 \tag{3.6}$$

и является трехмерной. Увеличение размерности многообразия состояний равновесия на единицу произошло из-за того, что первое и третье уравнения системы (3.5) оказались зависимыми. Введем безразмерные величины посредством соотношений

$$\tau = t\left(\frac{g}{R}\right)^{1/2}, \qquad \alpha = \frac{A}{mR^2}, \qquad \beta = \frac{C}{mR^2}, \qquad \gamma = \frac{l}{R}$$
$$\rho = \frac{R_1}{R}, \qquad \delta = \frac{h}{mR\sqrt{gR}}, \qquad \delta_1 = \frac{h_1}{mR\sqrt{gR}}$$

и линеаризуем уравнения (1.2) и (3.4) в окрестности поверхности состояний равновесия (3.6). Обозначая индексом минус внизу отклонение соответствующей переменной от ее равновесного значения, после исключения неопределенных множителей получим следующие линеаризованные уравнения:

$$[\alpha + \gamma^2 - \gamma\cos(\theta - \theta_1)]\,\theta_-^{\cdot\cdot} + \gamma\theta_-\cos\theta - (\rho - 1)\,[1 - \gamma\cos(\theta - \theta_1)] \times \theta_{1-}^{\cdot\cdot} -$$
$$\delta(\rho - 1)\,\theta_1^{\cdot} - \cos\theta_1\theta_{1-} = 0$$

$$(\alpha\sin^2\theta + \beta\cos^2\theta)\,\psi_-^{\cdot\cdot} + \delta_1\cos^2\theta_1\psi_-^{\cdot} - \delta(\rho - 1)\sin^2\theta_1\psi_{1-}^{\cdot} + \beta\cos\theta\varphi_-^{\cdot\cdot} +$$
$$+ \delta_1\cos\theta_1\cos(\theta - \theta_1)\,\varphi_-^{\cdot} = 0$$

$$\beta\varphi_-^{\cdot\cdot} + \delta_1\cos_2(\theta - \theta_1)\,\varphi_-^{\cdot} + (\rho - 1)\sin\theta_1\sin(\theta - \theta_1)\,\psi_1^{\cdot\cdot} +$$
$$+ \delta\sin\theta_1\sin(\theta - \theta_1)\,\psi_{1-}^{\cdot} + \gamma\sin^2\theta\psi_1 + [\beta\cos\theta +$$
$$+ \gamma\sin\theta\sin(\theta - \theta_1)]\,\psi_-^{\cdot\cdot} + \delta_1\cos\theta_1\cos(\theta - \theta_1)\,\psi_-^{\cdot} - \gamma\sin^2\theta\psi_- = 0$$

$$(\rho - 1)\sin\theta_1\psi_{1-} + \sin\theta_1\psi_- - \sin(\theta - \theta_1)\,\varphi_-^{\cdot} = 0$$
$$(\rho - 1)\,\theta_1^{\cdot} + \theta_-^{\cdot} = 0$$

Здесь в соответствии с (3.6) имеем соотношение

$$\gamma \sin \theta = \sin \theta_1$$

выполняющееся в равновесном состоянии. Характеристическое уавнение рассматриваемой системы приводится к виду

$$p^3 \left[a_0 p^2 + \delta (\rho - 1) p + a_1\right] (b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3) = 0 \qquad (3.7)$$

Здесь

$$a_0 = (\rho - 1) \left[\alpha + 1 - 2\gamma \cos (\theta - \theta_1) + \gamma^2\right]$$

$$a_1 = \cos \theta_1 + \gamma (\rho - 1) \cos \theta$$

$$b_0 = (\rho - 1) (\alpha\beta + a^2 b), \qquad a = \cos \theta_1 + \gamma \cos \theta, \qquad b = \alpha \sin^2 \theta + \beta \cos^2 \theta$$

$$b_1 = (\rho - 1) \{\delta \left[\beta + (\alpha - \beta + \gamma^2) \sin^2 (\theta - \theta_1)\right] + \\ + \delta_1 \left[\alpha + (\beta - \alpha) \sin^2 (\theta - \theta_1) + a^2 \cos^2 \theta_1\right]\}$$

$$b_2 = \delta\delta_1 (\rho - 1) + \rho\beta\gamma \cos \theta + ab$$

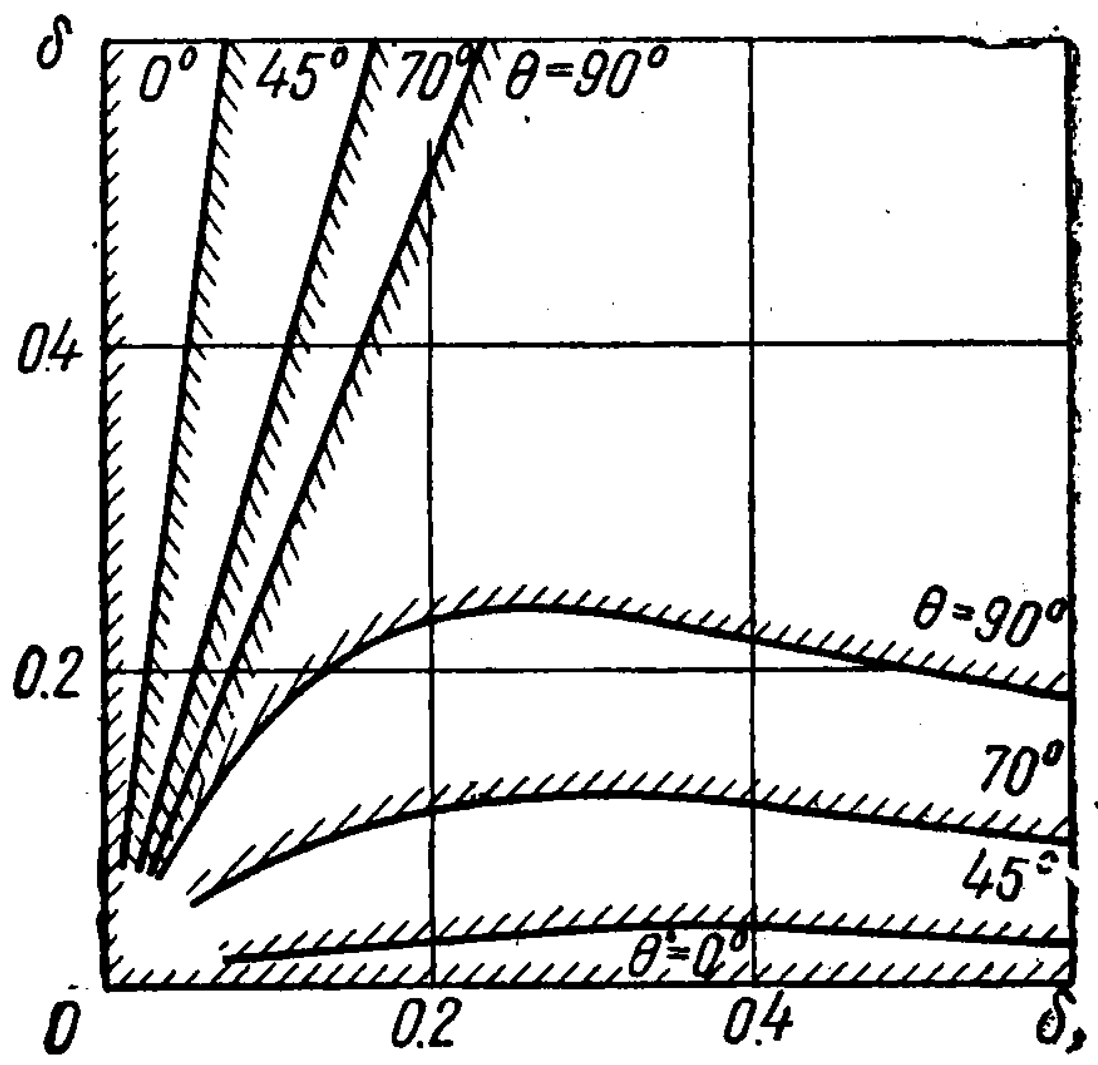
$$b_3 = \delta_1 \left[\rho\gamma \cos \theta_1 \cos (\theta - \theta_1) + a \cos^2 \theta_1\right] - \delta (\rho - 1) a \sin^2 \theta_1$$

Замечание. Из выражений (3.7) следует, что при $\rho \to \infty$, когда сферическая чашка превращается в плоскость, условия устойчивости (3.8) выполняются при любых значениях $\gamma > 0$. В частности, все состояния равновесия полушара на плоскости являются устойчивыми.

Для значений параметров $\rho > 1$, $0 < \gamma < 1$ область устойчивости многообразия состояний равновесия системы определяется неравенствами

$$b_3 > 0, \qquad b_1 b_2 - b_0 b_3 > 0 \qquad (3.8)$$

На фиг. 4 показаны границы области устойчивости на плоскости (δ_1, δ), построенные для однородного полушара ($\alpha = 0.26$, $\beta = 0.4$, $\gamma = 0.375$), который катается без проскальзывания в сферической чашке. Расчет произведен для случая, когда радиус полушара в четыре раза меньше радиуса чашки.



Фиг. 4

Поступила 19 VI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. У и т т е к е р Е. Т. Аналитическая динамика. ОНТИ, 1937.
2. B o t t e m a O. On the small vibrations of non-holonomic systems, Indagations Mathematical, Amserdam, 1949, vol. 11, f. 4.
3. A i s e r m a n M. A., G a n t m a c h e r F. R. Stabilitat der Gleichgewichtslage in einem nicht-holonomen System, ZAMM, Berlin, 1957, Band 37, N 1/2.
4. О б м о р ш е в А. Н. Колебания и устойчивость неголономных систем, Механика, Сб. статей, Оборонгиз, 1955.
5. К н я з е в Г. Н. Об устойчивости неголономных систем в критических случаях. Вопросы аналитической и прикладной механики. Сб. статей. Оборонгиз, 1963.
6. Н е й м а р к Ю. И. О некоторых общих свойствах функции Ляпунова. Изв. высш. учеб. завед, Радиофизика, 1961, 4, вып. 2.