Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

О ПОНДЕРОМОТОРНЫХ СИЛАХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И УСКОРЕННО ДВИЖУЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛЬНОГО КОНТИНУУМА С УЧЕТОМ КОНЕЧНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ

Л. И. Седов

(Москва)

Рассматривается макроскопическое движение материальной сплошной среды, взаимодействующей с электромагнитным полем. В излагаемых выводах универсального характера свойства среды детально не конкретизируются; однако учитывается возможное взаимодействие движущейся и деформирующейся среды с электромагнитным полем, вызванное наличием в среде электрических токов, а также явлениями электрической поляризации и намагничивания среды.

Для пондеромоторных сил разные авторы дают различные по своему существу формулы, и при этом эти формулы приводятся только для отдельных частных случаев. Такое положение связано с возможностью различного определения тензора энергии импульса электромагнитного поля и сложностью физической проблемы о свойствах среды.

Для описания электромагнитного поля в среде вводятся следующие характеристики электромагнитной природы:

$$\mathbf{E}, \quad \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}, \quad \mathbf{j}, \quad \rho_e \tag{1}$$

Здесь ρ_e — плотность распределения зарядов, остальные обозначения обычные [1]. Эти величины, вводимые для инерциальных систем координат, удовлетворяют незамкнутой системе уравнений Максвелла [1].

Как известно [2], для написания преобразованных уравнений Максвелла в любой криволинейной подвижной системе координат удобно пользоваться тензорной формой уравнений Максвелла, написанных в четырехмерной форме в псевдоевклидовом пространстве Миньковского. Во всем пространстве Миньковского метрика может быть определена квадратичной формой

$$ds^2 = -dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} + c^2dt^2 = g_{ij}dx^i dx^j \tag{2}$$

Здесь c — скорость света.

Совокупность действительных значений переменных $x^1, x^2, x^3, x^4 = t$ образует псевдоевклидово пространство, определенное в инерциальной декартовой системе отсчета.

Как известно, всякое преобразование

$$x^i = x^i\,(y^1, y^2, y^3, y^4 = t') \tag{3}$$

для которого выполняется равенство

$$ds^2 = -dy^{1^2} - dy^{2^2} - dy^{3^3} + c^2dt'^2 = g_{ij}dy^i dy^j \tag{4}$$

является линейным и называется преобразованием Лоренца [3].

Трехмерные векторы (1) могут быть определены в любой инерциальной системе координат. Для получения формул преобразования трехмерных векторов (1) при четырехмерных преобразованиях Лоренца следует ввести два антисимметричных четырехмерных тензора второго порядка F и H, компоненты которых в инерциальных декартовых системах определены матрицами [1]

$$F = \| F_{ij} \| = \left\| \begin{matrix} 0 & B^3 & -B^2 & cE_1 \\ -B^3 & 0 & B^1 & cE_2 \\ B^2 & -B^1 & 0 & cE_3 \\ -cE_1 & -cE_2 & -cE_3 & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$H = \| H_{ij} \| = \left\| \begin{matrix} 0 & H^3 & -H^2 & cD_1 \\ -H^3 & 0 & H^1 & cD_2 \\ H^2 & -H^1 & 0 & cD_3 \\ -cD_1 & -cD_2 & -cD_3 & 0 \end{matrix} \right\| \qquad (5)$$

Уравнения Максвелла можно написать в формах

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \qquad \text{или} \qquad \nabla_l F_{ik} + \nabla_k F_{li} + \nabla_i F_{kl} = 0 \quad (6)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_e \qquad \text{или} \qquad \nabla_k H_i^{\ k} = \frac{4\pi}{c} I_i \quad (7)$$

Здесь $I_1 = -j_1$; $I_2 = -j_2$, $I_3 = -j_3$, $I_4 = \rho_e c^2$ — ковариантные компоненты четырехмерного вектора электрического тока.

При преобразованиях Лоренца и при любых преобразованиях только пространственных координат антисимметричным тензорам F_{ij} и H_{ij} можно поставить в соответствие векторы **B**, **E** и **H**, **D**.

Переход от компонент этих векторов в системе x^α, t к аналогичным компонентам векторов в системе y^α, t' получается из общих правил для преобразования тензорных компонент F_{ij} и H_{ij}. В отличие от векторов **E**, **D**, **H**, **B** тензоры F и H их компоненты F_{ij}, H_{ij} и тензорные уравнения (6) и (7) имеют смысл для любой неинерциальной системы. Таким образом, тензорные уравнения (6) и (7) выражают инвариантные физические закономерности, не зависимые от выбора системы координат, которые в инерциальных системах координат представляются уравнениями Максвелла.

В неинерциальных системах координат, например, в системе координат, полученной из данной инерциальной при помощи преобразования Галилея в ньютоновском смысле (без лоренцевских сокращений длин и времени), преобразованные компоненты в матрицах (5) также можно

---

[1] Здесь и в дальнейшем в общих выражениях и при суммировании латинские индексы i, j, k, l . . . принимают значения 1, 2, 3, 4; греческие индексы $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ — значения 1, 2, 3.

Дальше при оперировании трехмерными или четырехмерными тензорами поднятие или опускание индексов осуществляется соответственно при помощи метрических тензоров $g^*_{\alpha\beta}$ или $g_{\alpha\beta}$, определенных квадратичными формами

$$dl^2 = g^*_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \qquad ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j = -dl^2 + 2g_{4\alpha}\, dx^\alpha\, dt + g_{44}\, dt^2$$

рассматривать как некоторые соответствующие векторы **B***, **E*** и **H***, **D***. Однако эти векторы только в приближенном смысле при малых скоростях подвижной системы можно рассматривать как векторы **B**, **E** и **H**, **D**.

Для определения пондеромоторных сил необходимо вводить тензор энергии импульса с компонентами $S_{i.}^{\cdot j}$ для электромагнитного поля. Общие формулы для компонент четырехмерной пондеромоторной силы в любой системе координат имеют вид

$$F_i = - \nabla_k S_i^{\cdot k} \tag{8}$$

Законы изменения импульса и энергии для системы, составленной из поля плюс материальная среда, можно представить в виде

$$\nabla_k T_i^{\cdot k} = F_i + G_i, \qquad \text{или} \qquad \nabla_k (T_i^{\cdot k} + S_{i.}^{\cdot k}) = G_i \tag{9}$$

Здесь G_i — компоненты четырехмерного вектора внешних сил. Во многих случаях можно принять, что $G_i = 0$. Компоненты тензора энергии импульса среды и поля как одной системы представятся суммой

$$I_i^{\cdot k} = T_{i.}^{\cdot k} + S_{i.}^{\cdot k}$$

В общем случае тензор энергии импульса среды $T_{i.}^{\cdot k}$ характеризует физические свойства и внутренние взаимодействия в среде; этот тензор также имеет электромагнитную природу, так как внутренние напряжения в материальной среде обусловлены либо столкновениями частиц, либо непосредственным взаимодействием атомов и молекул на расстояниях, больших по сравнению с размерами элементарных частиц, из которых они составлены. Как известно, в обоих случаях эти микроскопические взаимодействия имеют электромагнитную природу. По соответствующим определениям модели сплошной среды компоненты $T_{i.}^{\cdot k}$ связаны с метрическим тензором, с вектором четырехмерной скорости точек среды, с термодинамическими функциями состояния и с характеристиками диссипативных механизмов в среде [1].

Разделение общего тензора энергии импульса $I_i^{\cdot k}$ на сумму $T_{i.}^{\cdot k} + S_{i.}^{\cdot k}$ для материальной среды и поля связано непосредственно с разделением общей электромагнитной силы, действующей на выделенную мысленно частицу среды: на массовую силу и на поверхностную. Поверхностные внутренние напряжения в среде определены компонентами тензора $T_{\alpha.}^{\cdot\beta}$, а массовые электромагнитные силы компонентами вектора $F_\alpha = - \nabla_k S_{\alpha.}^{\cdot k}$.

Очевидно, что при однозначном определении тензора $I_{i.}^{\cdot k}$, что существенно физически, тензоры $T_{i.}^{\cdot k}$ и $S_{i.}^{\cdot k}$ могут быть определены все же поразному, и это связано по существу с различными способами разделения одной электромагнитной системы на две взаимодействующие электромагнитные системы.

Существенно, чтобы после выбора $S_{i.}^{\cdot k}$ для поля, тензор $T_{i.}^{\cdot k}$ для материальной среды должен определяться с учетом выбора $S_{i.}^{\cdot k}$ однозначным способом.

[1] Тензор T и его компоненты $T_{i.}^{\cdot k}$ можно рассматривать как функции постоянных и переменных тензорных и скалярных параметров, определяющих структуру, физическое состояние и внутренние процессы для бесконечно малых частиц.

На основании сказанного очевидно, что можно фиксировать тензор $S_{i\cdot}^{\cdot k}$ с известным произволом, это обстоятельство послужило основой для многочисленных дискуссий и для вывода разными авторами [1, 3–5] различных формул для пондеромоторных сил, причем этот вопрос зачастую рассматривался совсем независимо от выбора тензора $T_{i\cdot}^{\cdot k}$ для материальной среды.

Рассмотрим формулы для пондеромоторных сил, когда тензор $S_{i\cdot}^{\cdot k}$ в любой системе координат определен по тензорной формуле Миньковского

$$S_{i\cdot}^{\cdot k} = -\frac{1}{4\pi}\left[F_{mi}H^{mk} - \frac{1}{4}\delta_{i\cdot}^{\cdot k}F_{mn}H^{mn}\right] \tag{10}$$

Тензор Миньковского в общем случае несимметричен, т. е.

$$S_{ij} \neq S_{ji}$$

Пользуясь формулой (10) и условиями антисимметрии для F_{ij} и H_{ij}, на основании уравнений (6) и (7) получим [1]

$$F_i = \frac{1}{c}F_{mi}I^m - \frac{1}{16\pi}\left[F_{mk}\nabla_i H^{mk} - H^{mk}\nabla_i F_{mk}\right] \tag{11}$$

Тензорные уравнения (6), (7) и формулы (10) и (11) верны в любой подвижной и вообще криволинейной системе координат.

Наряду с тензорами F и H, можно ввести еще антисимметричный тензор P, определенный равенствами

$$P = \frac{1}{4\pi}(F - H), \qquad \|P_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0 & M^3 & -M^2 & -cP_1 \\ -M^3 & 0 & M^1 & -cP_2 \\ M^2 & -M^1 & 0 & -cP_3 \\ cP_1 & cP_2 & cP_3 & 0 \end{Vmatrix} \tag{12}$$

В инерциальной системе координат тензор **P** образован при помощи трехмерных векторов электрической поляризации **P** (P_1, P_2, P_3) и намагниченности **M** (M^1, M^2, M^3). При помощи тензора P формулу (11) можно написать в виде

$$F_i = \frac{1}{c}F_{mi}I^m + \frac{1}{4}\left[F_{mk}\nabla_i P^{mk} - P^{mk}\nabla_i F_{mk}\right] \tag{13}$$

первый член в формулах (11) и (13) определяет силу Лоренца, второй член обращается в нуль при отсутствии поляризации или намагниченности, символы ∇_i означают ковариантные четырехмерные производные.

Если система отсчета инерциальная, то в связи с тензорами F и P можно ввести систему трехмерных векторов (1). В инерциальной системе координат формулу (13) можно переписать в виде

$$F^\alpha = \rho_e E_\alpha + \frac{1}{c}[\mathbf{j} \times \mathbf{B}]_\alpha + \frac{1}{2}\left[\mathbf{P}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^\alpha} - \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x^\alpha} + \mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x^\alpha} - \mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x^\alpha}\right] \tag{14}$$

---

[1] При выводе (11) учтено, что на основании (6)

$$H^{mk}\nabla_k F_{mi} = \frac{1}{2}H^{mk}\nabla_i F_{mk}$$

где четырехмерные контравариантные компоненты силы F^α соответствуют пространственным трехмерными ковариантным компонентам силы. Формула (14) сохраняет свой вид при переходе от декартовой к криволинейной пространственной системе координат.

Из уравнения (13) в инерциальной системе координат при $i = 4$ получим [1]

$$F^4c^2 = F_4 = \mathbf{E}\cdot\mathbf{j} + E_\beta \frac{\partial P^\beta}{\partial t} + B_\beta \frac{\partial M^\beta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{E_\beta P^\beta + B_\beta M^\beta}{2} \tag{15}$$

Формулы (14) и (15) непосредственно пригодны для определения пондеромоторных сил через систему векторов (1), когда материальная среда покоится или находится в состоянии инерциального трансляционного движения. В последнем случае, если векторы **E**, **P**, **B** и **M** определены в инерциальной системе отсчета, связанной с телом, то в формуле (15) член $\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}$ дает джоулево тепло, член $E_\beta\partial P^\beta / \partial t + B_\beta\partial M^\beta / \partial t$ можно рассматривать как макроскопический приток энергии от поля к телу за счет микроскопических механизмов поляризации и намагничивания тела, а величину $^1/_2\,(E_\beta P^\beta + B_\beta M^\beta)$ удобно включить во внутреннюю энергию материальной среды.

Легко видеть, что в формулах (14) во втором члене и в (15) всюду можно компоненты вектора **B** заменить компонентами вектора **H**.

Если тело движется ускоренно и деформируется, то можно пользоваться формулой (13), которая применима в любой системе координат; в частности, и в сопутствующей подвижной лагранжевой системе координат, в которой трехмерные скорости всех точек среды всегда равны нулю [2].

В рамках специальной теории относительности пространство — время образует четырехмерное псевдоевклидово пространство, поэтому в качестве инерциальной системы отсчета K можно взять декартову систему координат x^1, x^2, x^3, $x^4 = t$, в которой метрика дана формулой (2).

В подвижной сопутствующей системе координат $L\,(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4 = t^\wedge)$ для метрики имеем

$$ds^2 = g^\wedge{}_{ij} d\xi^i d\xi^j, \qquad g^\wedge{}_{ij}\,(\xi^k) \tag{16}$$

Так как координаты x^i и ξ^i взяты в одном и том же псевдоевклидовом пространстве, то существуют функциональные соотношения [3]

$$x^i = x^i\,(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t^\wedge) \tag{17}$$

которые определяют собой закон движения рассматриваемого континуума.

---

[1] Формула (15) получается как следствие векторного равенства

$$\Pi = S_{4\cdot}^{\cdot\alpha}\, \mathfrak{e}_\alpha = \frac{c}{4\pi}\, \mathbf{E}\times\mathbf{H}$$

которое верно для различных определений тензоров энергии импульса поля, в частности, как по Миньковскому, так и по Абрагаму.

[2] Задание трехмерного поля скоростей в функции времени в некоторой фиксированной системе координат позволяет индивидуализировать точки континуума и, таким образом, ввести лагранжевы системы координат.

[3] Согласно (17), связь между x^α, t и ξ^α, $t^\wedge$ взаимно однозначна в конечной области.

Для компонент четырехмерной скорости имеем:

в системе K (18)

$$u^\alpha = \left(\frac{dx^\alpha}{ds}\right)_{\xi^\alpha} = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial t}\right)_{\xi^\alpha}\left(\frac{\partial t}{\partial s}\right)_{\xi^\alpha}, \qquad u^4 = \left(\frac{\partial t}{\partial s}\right)_{\xi^\alpha} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \qquad \left(v^2 = \sum_\alpha \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial t}\right)^2\right)$$

в системе L (19)

$$u^{\wedge\alpha} = \frac{d\xi^\alpha}{ds} = 0, \qquad u^{\wedge 4} = \frac{dt^\wedge}{ds} = \frac{1}{\sqrt{g^\wedge_{44}}}$$

При помощи (17) и (18) для компонент $g^\wedge_{ij}$ можно написать формулы

$$g^\wedge_{\alpha\beta} = -\sum_{\gamma=1}^{3} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^\beta} + c^2\left(\frac{\partial t}{\partial \xi^\alpha}\right)_{t^\wedge}\left(\frac{\partial t}{\partial \xi^\beta}\right)_{t^\wedge}$$

$$g^\wedge_{\alpha 4} = g^\wedge_{4\alpha} = \left[-\sum_{\gamma=1}^{3} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial x^\gamma}{\partial t} + c^2 \frac{\partial t}{\partial \xi^\alpha}\right]\left(\frac{\partial t}{\partial t^\wedge}\right)_{\xi^\alpha} \tag{20}$$

$$g^\wedge_{44} = -\sum_{\gamma=1}^{3}\left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial t^\wedge}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial t}{\partial t^\wedge}\right)^2_{\xi^\alpha} = (c^2 - v^2)\left(\frac{\partial t}{\partial t^\wedge}\right)_{\xi^\alpha}$$

Для каждой точки M (ξ^1, ξ^2, ξ^3) подвижного континуума L в каждый момент времени t можно выбрать собственную инерциальную систему координат K так, чтобы трехмерная скорость $\mathbf{v}$ точки M в системе K равнялась нулю. В системе K ускорение точки M и скорости соседних точек системы L вообще отличны от нуля.

Для упрощения вывода инвариантных скалярных или тензорных соотношений можно воспользоваться произволом в выборе системы L в данный момент времени $t^{\wedge *}$ и собственной системы K для точки M в момент времени $t^{\wedge *}$.

Наряду с координатами ξ^α и $t^\wedge$, можно ввести Лагранжевы переменные η^α, $\eta^4 = t'^\wedge$, определенные (вообще неголономными) соотношениями вида

$$(A) \quad d\eta^\alpha = A^\alpha{}_\beta(\xi^\alpha, t^\wedge)\, d\xi^\beta, \qquad dt'^\wedge = B_\beta(\xi^\alpha, t^\wedge)\, d\xi^\beta + B(\xi^\alpha, t^\wedge)\, dt^\wedge$$

где $A_\beta{}^\alpha$ и B_β — компоненты некоторого тензора и вектора, причем $|A^{\alpha}_{\cdot\beta}| \neq 0$ и $B \neq 0$. В случае голономных координат выполняются условия интегрируемости, и поэтому соотношения (A) приводятся к конечным связям

$$(B) \quad \eta^\alpha = \eta^\alpha(\xi^1, \xi^2, \xi^3), \qquad t'^\wedge = t^\wedge(\xi^\alpha, t^\wedge)$$

Векторному базису $\mathbf{э}_\alpha{}^\wedge$, $\mathbf{э}_4{}^\wedge$ в переменных ξ^k соответствует векторный базис $\mathbf{э}_\alpha{}'^\wedge$, $\mathbf{э}_4{}'^\wedge$ в квазикоординатах η^k. Очевидно, что эти базисы связаны формулами

$$\mathbf{э}_\beta{}^\wedge = A_\beta{}^\alpha\, \mathbf{э}_\alpha{}'^\wedge + B_\beta \mathbf{э}_4{}'^\wedge, \qquad \mathbf{э}_4{}^\wedge = B\mathbf{э}_4{}'^\wedge$$

Если $t^\wedge$ и $t'^\wedge$ определены соответственно как собственное время в системах ξ^k и η^k, то второе из соотношений (B) имеет вид

$$(C) \qquad t'^\wedge = t^\wedge + f(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \quad \text{или} \quad B = 1$$

Функция $f(\xi^\alpha)$ задает начало отсчета времени на различных мировых линиях, если $f = \mathrm{const}$, то $B_\beta = 0$.

В неголономных координатах вместо соотношения (C) верно равенство

$$dt'^\wedge = dt^\wedge + B_\beta d\xi^\beta$$

Как в голономном, так и в неголономном случаях квадратичная формула $g^*_{\alpha\beta} d\eta^\alpha d\eta^\beta$ определяет собой трехмерную метрику, вообще неевклидову.

Выбор L и K можно осуществить так, чтобы

$$x^\alpha = \xi^\alpha \quad \text{при } t^\wedge = t^{\wedge *}, \qquad \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}dt = dt^\wedge \tag{21}$$

Это означает, что при $t^\wedge = t^{\wedge *}$ во всем трехмерном подпространстве пространственные координаты ξ^α совпадают с декартовыми координатами x^α в K и что dt является приращением собственного времени в K, а $dt^\wedge$ — бесконечно малое приращение собственного времени в точках системы L. В точке M имеем $v = 0$, и, следовательно, приращения собственного времени в K и в L для точки M одинаковы.

Из формул (21) следует, что во всем трехмерном подпространстве при $t^\wedge = t^{\wedge *}$ верны формулы

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\beta} = \delta_\beta{}^\alpha, \qquad \left(\frac{\partial t}{\partial \xi^\alpha}\right)_{t^\wedge} = 0, \qquad \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial t}\right)_{\xi^\alpha} = v^\alpha, \qquad \left(\frac{\partial t}{\partial t^\wedge}\right)_{\xi^\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{22}$$

причем в точке M, кроме этого, выполняются равенства

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial t} = 0, \qquad \left(\frac{\partial t}{\partial t^\wedge}\right)_{\xi^\alpha} = 1, \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^\beta \partial \xi^\gamma} = 0$$

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial t^\wedge \partial \xi^\beta} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial t \partial \xi^\beta} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial \xi^\beta} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial \xi^\beta}, \qquad \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial t^{\wedge 2}} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial t^2} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial t^\wedge} \tag{23}$$

так как

$$\left(\frac{\partial^2 t}{\partial t^{\wedge 2}}\right)_{\xi^\alpha} = \frac{\partial}{\partial t^\wedge}\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0, \qquad \frac{\partial^2 t}{\partial t^\wedge \partial \xi^\alpha} = 0$$

Через $v^\alpha = v_\alpha$ обозначены компоненты в системе K трехмерного вектора скорости точек среды.

Из (20) и (22) следует, что при $t^\wedge = t^{\wedge *}$ верны равенства

$$g^\wedge{}_{\alpha\beta} = \begin{cases} -1 & (\alpha = \beta) \\ 0 & (\alpha \neq \beta) \end{cases}, \qquad g^\wedge{}_{4\alpha} = -\frac{v_\alpha}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad g^\wedge{}_{44} = c^2 \tag{24}$$

при этом $g^\wedge{}_{4\alpha} = 0$ в точке M.

Пространственные координаты в инерциальной системе K и в неинерциальной системе L совпадают только при $t^\wedge = t^{\wedge *}$; в следующие моменты времени вследствие ускорений и деформации координатные линии в системе L смещаются и деформируются относительно системы K.

Обозначим через $\mathrm{э}_i$, $\mathrm{э}^i$ и $\mathrm{э}^\wedge{}_i$, $\mathrm{э}^{\wedge i}$ соответственно ковариантные и контравариантные векторы базиса в системах K и L.

Рассмотрим произвольное тензорное поле N

$$N = N^{ijk}_{\cdots}\, \mathrm{э}_i \mathrm{э}_j \mathrm{э}^k \ldots = N^{\wedge ij}{}_{k\cdots} \mathrm{э}^\wedge{}_i \mathrm{э}^\wedge{}_j \mathrm{э}^{\wedge k} \ldots$$

и градиент тензора N

$$\operatorname{grad} N = \frac{\partial N}{\partial x^l}\mathrm{э}^l = \frac{\partial N}{\partial \xi^l}\mathrm{э}^{\wedge l} = \nabla^\wedge{}_l N^{ij}{}_{k\ldots} \mathrm{э}^\wedge{}_i \mathrm{э}^\wedge{}_j \mathrm{э}^{\wedge k} \ldots \mathrm{э}^{\wedge l}$$

При $t^\wedge = t^{\wedge *}$ в точке M имеем на основании условий (22) и (23) равенства $\mathrm{э}_i = \mathrm{э}^\wedge{}_i$ и $\mathrm{э}^i = \mathrm{э}^{\wedge i}$, поэтому

$$N^{ij}{}_{k\ldots} = N^{\wedge ij}{}_{k\ldots}, \qquad \frac{\partial N^{ij}{}_{k\ldots}}{\partial x^l} = \nabla_l{}^\wedge N^{\wedge ij}{}_{k\ldots} \tag{25}$$

При переходе от точки M к другим точкам или при $t^\wedge \neq t^{\wedge *}$ равенства (25) могут нарушаться.

При сопоставлении различных физических уравнений в компонентах можно пользоваться координатными системами L и K. В уравнениях, содержащих производные от компонент тензоров по координатам или по времени, можно пользоваться формулами (25) и применять производные для разных компонент в различных системах в зависимости от того, в какой системе заданы рассматриваемые компоненты.

В ряде случаев компоненты тензора энергии импульса материальной среды удобно задавать и рассматривать в сопутствующей системе координат L, тогда как компоненты тензора $S_{i\cdot}^{\cdot k}$ энергии импульса электромагнитного поля удобно задавать в инерциальной системе координат K.

При использовании собственной системы K можно ввести трехмерные векторы характеристики электромагнитного поля и соответствующие уравнения Максвелла в векторной форме. Вместе с этим трехмерные векторы, введенные для системы K, можно рассматривать в пространственных координатах L. Таким образом, введение системы K можно рассматривать как дополнительный прием для определения обычных векторных характеристик электромагнитного поля. Если для электромагнитного поля ограничиваемся тензорами F, H, P и S, то можно рассматривать все тензоры только в сопутствующей системе координат. В этом случае введение инерциальной системы K может быть необходимым для определения компонент тензора $g^{\wedge}{}_{ij}$ (формулы (20)) и вектора четырехмерной скорости. То и другое, вообще говоря, необходимо для определения тензоров энергии импульса электромагнитного поля и материальной среды.

Для пондеромоторных сил и для притока энергии в общем случае движения деформируемой среды можно воспользоваться формулами (14) и (15), в которых компоненты векторов E^α, B^α, P^α, M^α определены в пространственной системе координат инерциальной системы K. В формулах (14) и (15) координатные линии в системе K можно считать криволинейными. При использовании векторов $E^{\wedge\alpha}\mathfrak{э}_{\hat\alpha}$, $P^{\wedge\alpha}\mathfrak{э}_{\hat\alpha}$, $B^{\wedge\alpha}\mathfrak{э}_{\hat\alpha}$, $M^{\wedge\alpha}\mathfrak{э}_{\hat\alpha}$ в сопутствующей системе координат L формулы (14) сохраняют свой вид[1].

Если ввести в формулу (15) величины $E^{\wedge\alpha}$, $P^{\wedge\alpha}$, $B^{\wedge\alpha}$, $M^{\wedge\alpha}$, то необходимо учесть равенства[6]

$$\left(\frac{\partial P^\alpha}{\partial t}\right)_{x^\alpha} = \left(\frac{\partial P^{\wedge\alpha}}{\partial t^\wedge}\right)_{\xi^\alpha} + P^{\wedge\beta}\left(e^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} + \omega^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}\right)$$

$$\left(\frac{\partial M^\alpha}{\partial t}\right)_{x^\alpha} = \left(\frac{\partial M^{\wedge\alpha}}{\partial t^\wedge}\right)_{\xi^\alpha} + M^{\wedge\beta}\left(e^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} + \omega^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}\right) \tag{26}$$

Здесь $e^{\wedge}{}_{\alpha\beta}$ и $\omega^{\wedge}{}_{\alpha\beta} = {}^1/_2(\partial v_\alpha/\partial\xi^\beta - \partial v_\beta/\partial\xi^\alpha)$ — компоненты трехмерных тензоров скоростей деформации и вихря, определенные для трехмерного вектора скорости $\mathbf{v}$ точек сопутствующей системы L относительно соответствующей собственной системы K.

На основании (26) формула (15) приобретает вид

$$F_4 = -\nabla_k S_{4\cdot}^{\cdot k} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{j} + (E^{\wedge\alpha}P^{\wedge\beta} + B^{\wedge\alpha}M^{\wedge\beta})(e^{\wedge}{}_{\alpha\beta} + \omega^{\wedge}{}_{\alpha\beta}) +$$
$$+ E^{\wedge}{}_\beta\frac{\partial P^{\wedge\beta}}{\partial t^\wedge} + B^{\wedge}{}_\beta\frac{\partial M^{\wedge\beta}}{\partial t^\wedge} - \frac{\partial}{\partial t^\wedge}\frac{E^{\wedge}{}_\beta P^{\wedge\beta} + B^{\wedge}{}_\beta M^{\wedge\beta}}{2} \tag{27}$$

---

[1] Этот вывод следует из формул преобразования векторов (1) при введении систем K в каждой точке среды и из равенств $\Gamma^{\hat k}_{\beta\gamma} = 0$. Формула (14) сохраняется также при преобразованиях вида $\eta^\alpha = \eta^\alpha(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ и $t'^\wedge = t^\wedge$.

Скалярное уравнение энергии для системы из материальной среды и поля в любой системе координат можно написать в виде

$$u^i \nabla_k T_{i.}^{\cdot k} + u^i \nabla_k S_{i.}^{\cdot k} = u^i G_i = d^* q \,/\, c dt^\wedge \tag{28}$$

Здесь $d^* q \,/\, c dt^\wedge$ — внешний макроскопический приток энергии к единице объема в единицу собственного времени за счет взаимодействий с другими телами не учитываемых тензорами $T_{i.}^{\cdot k}$ и $S_{i.}^{\cdot k}$; во многих случаях обычно можно принять, что $d^* q \,/\, dt^\wedge = 0$.

В уравнении (28), согласно (19), (24) и (25), член $\nabla^\wedge{}_\alpha T_4^{\wedge\alpha}$ возьмем в сопутствующей системе координат L, а члены $\nabla_k S_{4.}^{\cdot k}$ и $\nabla_4^\wedge T_4^{\wedge 4} = (\partial T_4^4 / \partial t^\wedge)_{x^\alpha} = (\partial T_4^4 / \partial t^\wedge)_{\xi^\alpha}$ в инерциальной собственной системе координат K, действуя таким образом, получим

$$\frac{\partial T_4^4}{\partial t} + \nabla^\wedge{}_\alpha T_4^{\wedge\alpha} = F_4 + d^* q \,/\, dt^\wedge \tag{29}$$

где F_4 определено равенством (27).

Для преобразования и вычисления левой части в (29) учтем, что в точке M, для которой $v^\alpha = 0$ при $t^\wedge = t^{\wedge *}$, из формул (20), (22) и (23) вытекают равенства

$$\frac{\partial g^\wedge{}_{\beta\gamma}}{\partial \xi^\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial g^\wedge{}_{4\beta}}{\partial \xi^\alpha} = -\frac{\partial v_\beta}{\partial \xi^\alpha}, \qquad \frac{\partial g^\wedge{}_{44}}{\partial \xi^\alpha} = 0 \tag{30}$$

$$\frac{\partial g^\wedge{}_{\alpha\beta}}{\partial t^\wedge} = -\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial \xi^\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial \xi^\beta}\right), \qquad \frac{\partial g^\wedge{}_{\alpha 4}}{\partial t^\wedge} = -\frac{\partial v^\alpha}{\partial t^\wedge}, \qquad \frac{\partial g^\wedge{}_{44}}{\partial t^\wedge} = 0$$

Пользуясь (30), найдем, что для символов Кристоффеля

$$\Gamma^\wedge{}_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{\wedge il} \left[\frac{\partial g^\wedge{}_{jl}}{\partial \xi^k} + \frac{\partial g^\wedge{}_{kl}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial g^\wedge{}_{jk}}{\partial \xi^l}\right]$$

верны равенства

$$\Gamma^\wedge{}_{\beta\gamma}^k = \Gamma^\wedge{}_{k4}^4 = \Gamma^\wedge{}_{4k}^4 = 0, \qquad \Gamma^\wedge{}_{4\beta}^\alpha = \frac{\partial v^\alpha}{\partial \xi^\beta} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial \xi^\beta}, \qquad \Gamma^\wedge{}_{44}^\beta = \frac{\partial v^\beta}{\partial t^\wedge} \tag{31}$$

На основании (31) имеем

$$\nabla^\wedge{}_\alpha T_4^{\wedge\alpha} = \frac{\partial T_4^{\wedge\alpha}}{\partial \xi^\alpha} + T_4^{\wedge i} \Gamma^\wedge{}_{i\alpha}^\alpha - T^\wedge{}_j^\alpha \Gamma^\wedge{}_{\alpha 4}^j = \operatorname{div} \mathbf{Q} + T^{\wedge\cdot 4}_{4\cdot} \operatorname{div} \mathbf{v} - p^{\alpha\beta} \frac{\partial v^\wedge{}_\alpha}{\partial \xi^\beta}$$

$$(\mathbf{Q} = T_4^{\wedge\alpha} \mathbf{э}^\wedge{}_\alpha, \; p^{\alpha\beta} = -T^{\wedge\alpha\beta}) \tag{32}$$

Дальнейшее видоизменение уравнения (29) произведем с учетом уравнения

$$\frac{d\rho}{dt^\wedge} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{33}$$

где ρ — плотность, определенная в сопутствующей системе координат из соотношения

$$\rho \, d\tau_0 = dm_0 \qquad (d\tau_0 = \sqrt{g^*} \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3, \; g^* (\xi^\alpha, t^\wedge) = |g_{\alpha\beta}^*|)$$

Здесь $d\tau_0$ — субстанциональный объем в сопутствующей системе, dm_0 — масса покоя, $g_{\alpha\beta}^*$ — компоненты трехмерного метрического тензора.

Обозначим теперь

$$T_{4\cdot}^{\cdot 4} + \frac{1}{2} (E_\beta P^\beta + B_\beta M^\beta) = \rho U \tag{34}$$

На основании (27), (32), (33) и (34) уравнение (29) запишем в виде

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t^\wedge}\right)_{\xi^\alpha} = \left[\frac{p^{\alpha\beta}}{\rho} - \frac{1}{2}(E_\gamma \pi^\gamma + B_\gamma m^\gamma)\, g^{*\alpha\beta} + E^{\wedge\alpha}\pi^{\wedge\beta} + B^{\wedge\alpha} m^{\wedge\beta}\right] \nabla_\beta v_\alpha +$$
$$+ E^\wedge{}_\beta \frac{\partial \pi^{\wedge\beta}}{dt^\wedge} + B^\wedge{}_\beta \frac{\partial m^{\wedge\beta}}{\partial t^\wedge} + \frac{1}{\rho}\,\mathbf{E}.\,\mathbf{j} - \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\mathbf{Q} + \frac{1}{\rho}(d^*q \,/\, dt^\wedge) \qquad (35)$$

где $\pi^\alpha = P^\alpha / \rho, m^\alpha = M^\alpha / \rho$, компоненты трехмерных векторов моментов поляризации и намагничивания, отнесенные к единице массы покоя.

Уравнение (35) называется уравнением притока тепла и имеет место как для обратимых, так и для необратимых процессов. Величину U можно рассматривать в сопутствующей системе отсчета как локальную удельную внутреннюю энергию, отнесенную к единице массы покоя материальной среды. В общем случае полную внутреннюю энергию конечных объемов среды из-за внутренних макроскопических взаимодействий в материальной среде нельзя представить в виде интеграла от U. Определенные выше в сопутствующей системе координат удельную энергию U, удельную энтропию S и абсолютную температуру [1] T, так же, как и $dm_0 = \rho d\tau_0$, можно рассматривать как скалярные величины. Наряду с величиной U, удобно пользоваться удельной свободной энергией F, определенной формулой $F = U - TS$.

При помощи функции F уравнение (35) можно переписать в форме

$$(dF)_{\xi^\alpha} = -S\,dT + \left[\frac{p^{\alpha\beta}}{\rho} - \frac{1}{2}(E_\gamma\pi^\gamma + B_\gamma m^\gamma)\, g^{*\alpha\beta} + \right.$$
$$\left. + E^\alpha \pi^\beta + B^\alpha m^\beta\right](e_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta})\, dt^\wedge +$$
$$+ E^\wedge{}_\alpha\, d\pi^{\wedge\alpha} + B^\wedge{}_\alpha\, dm^{\wedge\alpha} - \frac{1}{\rho}\operatorname{div} Q\, dt^\wedge + \frac{1}{\rho}\,\mathbf{E}.\,\mathbf{j}\, dt^\wedge + \frac{1}{\rho}\, d^*q - T\, dS \qquad (36)$$

Все величины, входящие в уравнение притока тепла (36), дальше будем рассматривать как трехмерные скаляры, векторы и тензоры.

Векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ взяты в собственной системе координат K, поэтому приток энергии $\rho^{-1}\,\mathbf{E}.\,\mathbf{j}$ представляет собой джоулево тепло.

Приток энергии $-\rho^{-1}\operatorname{div}\mathbf{Q}dt^\wedge$ можно представить в виде суммы притока тепловой энергии и энергии нетепловой, этот приток выражается через поток вектора $\mathbf{Q}dt^\wedge = T^{\wedge\alpha}_{\ 4}\, \mathfrak{э}^\wedge{}_\alpha\, dt^\wedge$ на границе малой частицы. Очевидно, что вектор $\mathbf{Q}$, так же, как и компоненты $T^{\wedge\cdot 4}_{\ 4\cdot}$, могут зависеть только от тех же определяющих величин, что и тензор энергии импульса $T^{\wedge\cdot j}_{\ i\cdot}$.

Приток энергии, не зависимый от тензора энергии импульса, например, за счет притока лучистой энергии, содержится в члене $\rho^{-1}d^*q$.

Уравнение (36) выполняется для всевозможных процессов в среде, происходящих под действием произвольных внешних сил при произвольных изменениях определяющих параметров. Пользуясь этим, уравнение (36) можно положить в основу выводов уравнений состояния и кинетических уравнений, выполняющихся при произвольных процессах. Эти физические соотношения можно получить, когда свободная энергия F и приращение энтропии $dS = d_eS + d_iS$ заданы в функции определяющих величин (d_eS — приток энтропии сквозь поверхность — границу объема малой частицы).

[1] Дальше рассмотрим обратимые процессы или только такие необратимые процессы, когда понятие температуры и свободной энергии имеют смысл.

При построении конкретных моделей материальных сред целесообразно пользоваться предположением об отсутствии соотношений — связей между геометрическими или кинематическими величинами дифференциальных или каких-либо других связей, отличных от их непосредственного определения. Примером подобной связи может служить условие несжимаемости, которое все же иногда можно применять. Наличие дополнительных соотношений приведет к ограничениям в законах движения — ограничений, не зависимых от внешних условий или от произвола внешних массовых или поверхностных сил на границах конечных объемов или малых частиц среды.

Рассмотрим уравнение (36) в предположении, что свободную энергию F можно рассматривать как функцию следующих параметров:

$$T, \quad g^{\circ}{}_{\alpha\beta}, \quad g^{\wedge}{}_{\alpha\beta}, \quad \pi^{\wedge\alpha}, \quad m^{\wedge\alpha}, \quad \nabla^{\wedge}{}_{\beta}\pi^{\wedge\alpha}, \quad \nabla^{\wedge}{}_{\beta}m^{\wedge\alpha}, \quad \frac{\partial g^{\wedge}{}_{\alpha\gamma}}{\partial\xi^{\beta}}, \quad \frac{\partial g^{0}_{\alpha\gamma}}{\partial\xi^{\beta}} \tag{37}$$

где $g^{\circ}{}_{\alpha\beta}$ — трехмерный метрический тензор некоторого начального состояния. Так как $\nabla^{\wedge}{}_{\beta}g^{\wedge}{}_{\alpha\gamma} = 0$, а

$$\nabla^{\wedge}{}_{\beta}g^{\circ}{}_{\alpha\gamma} = \frac{\partial g^{\circ}{}_{\alpha\gamma}}{\partial\xi^{\beta}} - g^{\circ}{}_{\alpha\mu}\Gamma^{\wedge\mu}_{\beta\gamma} - g^{\circ}{}_{\mu\gamma}\Gamma^{\wedge\mu}_{\alpha\beta}$$

то в аргументах функции F можно указать как переменные величины по времени $\partial g^{\wedge}{}_{\alpha\gamma} / \partial\xi^{\beta}$ и как постоянные $g^{\circ}{}_{\alpha\beta}$ и $\partial g^{\circ}{}_{\alpha\gamma} / \partial\xi^{\beta}$. Примем еще, что

$$Q^{\beta}dt^{\wedge} = R^{\wedge}{}_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}d\pi^{\wedge\alpha} + N^{\wedge}{}_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}dm^{\wedge\alpha} + \Lambda^{\wedge\beta\alpha\gamma}dg^{\wedge}{}_{\alpha\gamma} + \Omega^{\wedge\beta}dt^{\wedge} \tag{38}$$

где коэффициенты $R^{\wedge}{}_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}$, $N^{\wedge}{}_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}$, $\Lambda^{\wedge\beta\alpha\gamma}$ и $\Omega^{\wedge\beta}$ зависят от параметров (37) и в общем случае от некоторых других величин [1].

Систему (37) можно дополнить другими параметрами и включить некоторые производные по времени, в этих, более общих случаях развитие последующей теории с усложнениями также возможно.

Нетрудно проверить справедливость равенств

$$d\nabla_{\beta}\,\pi^{\alpha} = \nabla_{\beta}\,d\pi^{\alpha} + \pi^{\gamma}\,d\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$$

где

$$d\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} = -\Gamma^{\lambda}_{\gamma\beta}g^{\alpha\mu}\,dg_{\lambda\mu} + \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}\left(d\,\frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial\xi^{\beta}} + d\,\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial\xi^{\gamma}} - d\,\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial\xi^{\mu}}\right) \tag{39}$$

$$\nabla_{\beta}\,dg_{\alpha\gamma} = d\,\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial\xi^{\beta}} - dg_{\alpha\mu}\Gamma^{\mu}_{\gamma\beta} - dg_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$$

Уравнение (36) на основании (37) — (39) можно написать в виде

$$\begin{gathered}\varphi\,dT + \psi^{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}\,dt^{\wedge} + \Omega^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta}\,dt^{\wedge} + \chi_{\alpha}\,d\pi^{\alpha} + \varkappa_{\alpha}\,dm^{\alpha} + \theta_{\alpha}{}^{\beta}\,d\nabla_{\beta}\pi^{\alpha} + \\ + \vartheta_{\alpha}{}^{\beta}\,d\nabla_{\beta}m^{\alpha} + \Phi^{\beta\alpha\gamma}d\,\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial\xi^{\beta}} - \frac{1}{\rho}\nabla_{\beta}\Omega^{\beta}\,dt^{\wedge} + \frac{\mathbf{E}}{\rho}\cdot\mathbf{j}\,dt^{\wedge} + \frac{d^{*}q}{\rho} - T\,dS = 0\end{gathered} \tag{40}$$

где φ, $\psi^{\alpha\beta}$, $\Omega^{\alpha\beta}$, χ_{α}, $\varkappa^{\alpha}$, $\theta_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}$, $\vartheta_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}$ и $\Phi^{\alpha\beta\gamma}$ определены формулами

$$-S = \frac{\partial F}{\partial T} + \varphi, \qquad \frac{p^{\alpha\beta} + p^{\beta\alpha}}{2} = 2\rho\,\frac{\partial F}{\partial g_{\alpha\beta}} - \frac{2}{\sqrt{g^{*}}}\frac{\partial}{\partial\xi^{\lambda}}\left[\rho\sqrt{g^{*}}\,\frac{\partial F}{\partial(\partial g_{\alpha\beta}/\partial\xi^{\lambda})}\right] +$$

---

[1] Дальше компоненты всех векторов и тензоров взяты в сопутствующей системе координат. Для упрощения опущен символ ^ — метка компонент в сопутствующей системе. Дальнейшие рассуждения и формулы упрощаются, если вместо системы определяющих параметров (37) взять систему

$$T, \quad g^{\circ}{}_{ij}, \quad g_{ij}, \quad \pi^{\alpha}, \quad m^{\alpha}, \quad \overset{\circ}{\nabla}_{\beta}\pi^{\alpha}, \quad \overset{\circ}{\nabla}_{\beta}m^{\alpha}, \quad \overset{\circ}{\nabla}_{\beta}g_{\alpha\gamma}$$

Здесь $\overset{\circ}{\nabla}_{\beta}$ — символ ковариантной производной в трехмерном пространстве начальных состояний. Ниже не рассматривается случай насыщенной намагниченности, когда $|\,\mathbf{m}\,| = \mathrm{const}$. Учет насыщенности не внесет существенных затруднений.

$$+\frac{1}{2}(E_\gamma P^\gamma + B_\gamma M^\gamma)\,g^{*\alpha\beta} - \frac{1}{2}(E^\alpha P^\beta + E^\beta P^\alpha + B^\alpha M^\beta + B^\beta M^\alpha) +$$
$$+\frac{1}{2}\nabla_\lambda\left[(R^{\beta\lambda} - R^{\lambda\beta})\,\pi^\alpha + (R^{\alpha\lambda} - R^{\lambda\alpha})\,\pi^\beta + (R^{\beta\alpha} + R^{\alpha\beta})\,\pi^\lambda\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\nabla_\lambda\left[(N^{\beta\lambda} - N^{\lambda\beta})\,m^\alpha + (N^{\alpha\lambda} - N^{\lambda\alpha})\,m^\beta + (N^{\beta\alpha} + N^{\alpha\beta})\,m^\lambda\right] -$$
$$-\frac{2}{\sqrt{g^*}}\frac{\partial\rho\sqrt{g^*}\Phi^{\lambda\alpha\beta}}{\partial\xi^\lambda} + \rho\psi^{\alpha\beta}$$

$$p^{\alpha\beta} - p^{\beta\alpha} + E^\alpha P^\beta - E^\beta P^\alpha + B^\alpha M^\beta - B^\beta M^\alpha = 2\rho\Omega^{\alpha\beta}$$
$$E_\alpha = \frac{\partial F}{\partial \pi^\alpha} + \frac{1}{\rho}\nabla_\beta R_{\alpha.}^{\cdot\beta} + \chi_\alpha, \quad R_{\alpha.}^{\cdot\beta} = -\rho\frac{\partial F}{\partial\nabla_\beta\pi^\alpha} + \rho\theta_{\alpha.}^{\cdot\beta} \tag{41}$$
$$B_\alpha = \frac{\partial F}{\partial m^\alpha} + \frac{1}{\rho}\nabla_\beta N_{\alpha.}^{\cdot\beta} + \varkappa_\alpha, \quad N_{\alpha.}^{\cdot\beta} = -\rho\frac{\partial F}{\partial\nabla_\beta m^\alpha} + \rho\vartheta_{\alpha.}^{\cdot\beta}$$
$$\Lambda^{\beta\alpha\gamma} = -\rho\frac{\partial F}{\partial(\partial g_{\alpha\gamma}/\partial\xi^\beta)} + \frac{\left[(R^{\gamma\beta} - R^{\beta\gamma})\,\pi^\alpha + (R^{\alpha\beta} - R^{\beta\alpha})\,\pi^\gamma + (R^{\gamma\alpha} + R^{\alpha\gamma})\pi^\beta\right]}{4} +$$
$$+\frac{\left[(N^{\gamma\beta} - N^{\beta\gamma})\,m^\alpha + (N^{\alpha\beta} - N^{\beta\alpha})\,m^\gamma + (N^{\gamma\alpha} + N^{\alpha\gamma})\,m^\beta\right]}{4} - \rho\Phi^{\beta\alpha\gamma}$$

Тензор $\psi^{\alpha\beta}$ симметричный, а тензор $\Omega^{\alpha\beta}$ антисимметричный. Компоненты $\Lambda^{\beta\alpha\gamma}$ и $\Phi^{\beta\alpha\gamma}$ симметричны по двум последним индексам.

Если предположить, что притоки энергии — $\rho^{-1}\nabla_\beta\Omega^\beta dt^\wedge$ и $\rho^{-1}d^*q$ соответствуют притоку тепловой энергии, то при обратимых и некоторых необратимых процессах (например, при учете теплопроводности и излучения) будет выполняться равенство

$$TdS = \frac{1}{\rho}\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}\,dt + \frac{1}{\rho}\,d^*q - \frac{1}{\rho}\nabla_\beta\Omega^\beta\,dt = dq^{(e)} \tag{42}$$

Если вдобавок к этому допустить, что величины φ, $\psi^{\alpha\beta}$, $\Omega^{\alpha\beta}$, χ_α, $\varkappa_\alpha$, $\theta_\alpha{}^\beta$, $\vartheta_\alpha{}^\beta$ и $\Phi^{\beta\alpha\gamma}$, определенные равенствами (41), не зависят от производных по времени[1] и от определяющих параметров (37), то из уравнения (40), ввиду линейной независимости приращений по времени[2] от определяющих параметров, получим

$$\varphi = \psi^{\alpha\beta} = \Omega^{\alpha\beta} = \chi_\alpha = \varkappa_\alpha = \theta_\alpha{}^\beta = \vartheta_\alpha{}^\beta = \Phi^{\beta\alpha\gamma} = 0 \tag{43}$$

Таким образом, на основании (42) и (43) получим, что равенства (41) определяют собой уравнения состояния для материальной среды. Эти уравнения являются обобщением обычных уравнений теории упругости на случай, когда свободная энергия зависит от градиентов вектора поляризации, вектора намагниченности и градиентов тензора деформаций.

Если F зависит только от T, $g_{\alpha\beta}^\wedge$, $\mathring{g}_{\alpha\beta}$, $\pi^{\wedge\alpha}$ и $m^{\wedge\alpha}$ и не зависит от их градиентов, то $R_\alpha{}^\beta = N_\alpha{}^\beta = \Lambda^{\beta\gamma\alpha} = 0$.

В этом случае компоненты вектора $Q dt^\wedge$, $Q^\beta dt^\wedge = \Omega^\beta dt^\wedge$ определяют приток тепла, а уравнения (41) превращаются в уравнения состояния теории упругости с учетом электрической поляризации и намагниченности.

---

[1] Существенно только предположение о независимости от производных по времени. Гипотезы о зависимости или независимости этих коэффициентов от любых производных по координатам не нужны.

[2] Можно строить модели, в которых производные по времени от определяющих параметров могут быть линейно зависимы [7].

Для объяснения гиромагнитных эффектов необходимо учесть зависимость свободной энергии от вектора вихря $\boldsymbol{\omega} = {}^1/_2 \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{v}$. Если таблицу определяющих параметров (37) дополнить компонентами аксиального вектора вихря[1] ω^γ, связанного с антисимметричным тензором $\omega_{\alpha\beta}$, то в левой части уравнения (40) добавится член вида $-\partial F / \partial\omega^\gamma$. При включении ω^γ в систему определяющих параметров (37) компоненты ω^γ и $d\omega^\gamma / dt^\wedge$ для множества всевозможных процессов можно рассматривать в уравнении (40) как величины, не зависимые от других параметров из системы (37) и от их производных по времени. Отсюда следует, что $\partial F / \partial\omega^\gamma = 0$ и $(\partial F / \partial\omega^\gamma) d\omega^\gamma = 0$, так как в противном случае равенства $\partial F / \partial\omega^\gamma = 0$ представляли бы собой универсальные соотношения между определяющими параметрами. С другой стороны, если сохранить равенство (42) и другие допущения о независимости всех коэффициентов в равенстве (40) от приращений системы параметров (37), а также от ω^γ и $d\omega^\gamma/dt$, то наряду с равенствами (43), получим еще вывод

$$\frac{\partial F}{\partial\omega^\gamma} d\omega^\gamma = 0$$

который противоречит постановке задачи, поэтому в данном случае основные допущения должны быть видоизменены.

В связи с этим рассмотрим пример обобщения предыдущей теории, основанный на следующих более слабых допущениях (последующие соотношения и выводы применимы и тогда, когда F не зависит от ω^γ)

1°. Для учета необратимого характера намагничивания вместо (42) примем

$$TdS = \frac{1}{\rho}\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}dt + \frac{1}{\rho}d^*q - \frac{1}{\rho}\nabla_\beta\Omega^\beta dt + dq' = dq^{(e)} + dq' \qquad \left(dq' = c_{\alpha\beta}\frac{dm^\alpha}{dt}\frac{dm^\beta}{dt}\right) \tag{44}$$

где $c_{\alpha\beta}$ — компоненты в сопутствующей системе координат симметричного тензора, зависящего вообще от определяющих параметров (37).

2°. В уравнении (40), приобретающем форму

$$\begin{gathered}\varphi dT + \psi^{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}dt + D_\gamma\omega^\gamma dt + \chi_\alpha d\pi^\alpha + \varkappa_\alpha dm^\alpha + \theta_{\alpha}^{\cdot\beta} d\nabla_\beta\pi^\alpha + \\ + \vartheta_{\alpha}^{\cdot\beta} d\nabla_\beta m^\alpha + \Phi^{\beta\alpha\gamma} d\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial\xi^\beta} - \frac{\partial F}{\partial\omega^\gamma}d\omega^\gamma - c_{\alpha\beta}\frac{dm^\alpha}{dt}\frac{dm^\beta}{dt} = 0\end{gathered} \tag{45}$$

предположим, что коэффициенты при $\omega^\gamma dt$ и при линейно независимых приращениях определяющих параметров могут зависеть от определяющих параметров и от следующих производных по времени $d\omega^\gamma / dt$, $d\pi^\alpha / dt$ и dm^α/dt. (В уравнении (45) значения $D_\gamma = -2\Omega^{\alpha\beta}$, $\omega^\gamma = -\omega_{\alpha\beta}$, где α, β, γ образуют циклическую перестановку индексов 1, 2, 3).

На основании 1°, 2° и уравнения (45) следует[2]

$$\varphi = \psi^{\alpha\beta} = \theta_\alpha{}^\beta = \vartheta_\alpha{}^\beta = \Phi^{\beta\alpha\gamma} = 0, \qquad \mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\chi}\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} + (\boldsymbol{\varkappa} - \mathbf{C})\cdot\frac{d\mathbf{m}}{dt} - \frac{\partial F}{\partial\omega^\gamma}\frac{d\omega^\gamma}{dt} = 0 \tag{46}$$

где

$$\boldsymbol{\chi} = \chi_\alpha \mathbf{э}^{\alpha\wedge}, \qquad \boldsymbol{\varkappa} = \varkappa_\alpha \mathbf{э}^{\alpha\wedge}, \qquad \mathbf{C} = c_{\alpha\beta}\frac{dm^\beta}{dt}\mathbf{э}^{\wedge\alpha}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega^\gamma \mathbf{э}_\gamma{}^\wedge$$

$$\mathbf{D} = D_\gamma \mathbf{э}^{\wedge\gamma} = \frac{p^{\beta\alpha} - p^{\alpha\beta}}{\rho}\mathbf{э}^{\wedge\gamma} + \boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{E} + \mathbf{m}\times\mathbf{B} \tag{47}$$

---

[1] Для дальнейшего существенно, что в число аргументов свободной энергии F включаются компоненты ω^γ и не включаются компоненты тензора градиентов векора вихря $\nabla_\alpha\omega^\gamma$. В силу этого допущения и допущения о линейной независимости производных по времени в правой части (38) не появляются члены вида $M_\gamma{}^\alpha\, d\omega^\gamma$.

[2] Седов Л. И. Некоторые проблемы построения новых моделей сплошных сред. Доклад на XV Всемирном конгрессе по теоретической и прикладной механике, Мюнхен, 1964 г. Препринт, Изд. ВИНИТИ, М., 1964.

причем производные по времени от векторов взяты относительно сопутствующей системы координат (при $\text{Э}_\alpha{}^\wedge = \text{const}$).

Из сделанных предположений вытекает, что уравнение (46) равносильно следующим трем векторным равенствам:

$$\mathbf{D} = k_1\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}_1 \tag{48}$$

$$\boldsymbol{\chi} = k_2 \frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} \times \mathbf{G}_2 \tag{49}$$

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = k_3 (\boldsymbol{\varkappa} - \mathbf{C}) + (\boldsymbol{\varkappa} - \mathbf{C}) \times \mathbf{G}_3 \tag{50}$$

где $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{G}_3$ — произвольные векторы, а скаляры k_1, k_2 и k_3 связаны одним соотношением

$$k_1 \,|\, \boldsymbol{\omega} \,|^2 + k_2 \left| \frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} \right|^2 + k_3 \,|\, \boldsymbol{\varkappa} - \mathbf{C} \,|^2 = \frac{\partial F}{\partial \omega^\gamma} \frac{d\omega^\gamma}{dt} \tag{51}$$

Для устранения произвола в соотношениях (48) — (50) необходимо опереться на дополнительные гипотезы физической природы.

Например, можно принять, что уравнение (48) является уравнением моментов количества движения для материальной среды и что правая часть равняется производной по времени относительно инерциальной системы отсчета от внутреннего момента количеств движения $\mathbf{K}$, рассчитанного на единицу массы. Как известно [8], можно допустить, что $\mathbf{K} = -\gamma\mathbf{m}$, где γ — известная постоянная. Этими допущениями фиксируется скаляр k_1 и существенная часть вектора $\mathbf{G}_1$. После этого уравнения (48) можно рассматривать как определение несимметричной части тензора напряжений. Уравнение поляризации (49) можно фиксировать, если допустить, что вектор электрической напряженности $\mathbf{E}$ определяется через свободную энергию, зависящую от системы (37) по квази-статическим соотношениям, отсюда следует, что $\chi_\alpha = 0$, и поэтому $k_2 = 0$, и можно положить, что $\mathbf{G}_2 = 0$.

После этих допущений скаляр k_3 определяется уравнением (51), а уравнение (50) после определения вектора $\mathbf{G}_3$ можно рассматривать как возможное видоизменение или некоторое обобщение феноменологического уравнения Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [8]. Это уравнение предложено ими в теории магнитных волн в ферромагнетиках, развитой без учета ускорений и деформаций.

В работе К. Б. Власова и Б. Х. Ишмухамедова и у ряда других авторов, процитированных в [9], при помощи вариационных принципов, задания гипотетических подходящих функций Лангранжа и некоторых дополнительных предположений получены различные системы кинетических уравнений и уравнений состояния с учетом деформаций среды.

Дальнейшее развитие предлагаемой теории, опирающейся на уравнение притока тепла (40) на случай моделей сред с необратимыми процессами более общего характера (учет вязкости, градиентов температур и многих эффектов) можно провести аналогичным путем при помощи макроскопических теорий типа теории Онзагера.

Поступила 19 XI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, М., 1957.
2. Тоннела Мари-Антуанетт. Основы электромагнетизма и теории относительности. Изд. иностр. лит., М., 1962.
3. Synge L. L. **Relativity. The special Theory.** North-Holland Publ. Camp. Amsterdam, 1956.
4. Паули В. Теория относительности. Гостехиздат, М., 1947.
5. Де Гроот С. и Мазур П. Неравновесная термодинамика. Изд. «Мир», М., 1964.
6. Седов Л. И. Введение в механику сплошных сред. Физматгиз, М., 1962.
7. Седов Л. И., Эглит М. Э. Построение неголономных моделей сплошных сред с учетом конечности деформаций и некоторых физико-химических эффектов. ДАН СССР, 1962, т. 142, № I, стр. 54—57.
8. Гуревич А. Г. Ферриты на сверхвысоких частотах. Физматгиз, 1960.
9. Власов К. Б. Ишмухатов Б. Х. Уравнения движения и состояния магнитоупругих сред. ЖЭТФ, 1964, т. 64, вып. I, стр. 201.