Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ СОБСТВЕННОГО ВРАЩЕНИЯ ВОЛЧКА С ПОЛОСТЬЮ, НАПОЛЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Н. Н. Вахания

(Тбилиси)

Работа примыкает к работе С. Л. Соболева, в которой [1] исследована устойчивость основного (невозмущенного) движения симметричного замкнутого сосуда с одной неподвижной точкой (симметричного волчка), целиком наполненного идеальной несжимаемой жидкостью. При этом под основным движением понимается равномерное свободное вращение в поле силы тяжести всей системы (волчок + жидкость), как единого твердого тела, вокруг оси симметрии волчка, не меняющего своего положения о пространстве, а причиной возмущения является малое отклонение этой оси от первоначального положения и одновременное «включение» остальных внешних сил. В [1] исследована устойчивость двух степеней свободы волчка, характеризующихся двумя координатами проекции единичного вектора по оси волчка на плоскость, перпендикулярную оси вращения в невозмущенном движении. При этом неявно предполагается, что на движение этих двух степеней свободы третья степень свободы не оказывает никакого влияния, и тем самым отдельное изучение устойчивости по этим двум координатам законно. В § 1 настоящей работы доказана справедливость этого предположения. Изложение в этом параграфе ведется параллельно соответствующей части работы [1] с естественными дополнениями, связанными с введением новой степени свободы — угловой скорости собственного вращения волчка. В § 2 исследуется устойчивость третьей степени свободы. Показано, что, в отличие от первых двух координат, устойчивость по которым зависит от формы оболочки волчка и физических параметров задачи, устойчивость по угловой скорости имеет место всегда.

В заключение благодарю С. Л. Соболева за интерес к работе и ценные советы.

§ 1. 1°. Рассматривается тяжелый симметричный волчок, закрепленный в ножке, целиком наполненный идеальной несжимаемой жидкостью с плотностью ρ и вращающийся с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси симметрии порядка $k > 2$ (порядок симметрии определяется как наименьшее среди натуральных чисел n, таких, при которых волчок совмещается с самим собой при его повороте на угол $2\pi \;/\; k$ вокруг оси). Пусть S — поверхность полости волчка, наполненной жидкостью, M_1 и M_2 — массы волчка и жидкости, C_1 и C_2 — моменты инерции волчка и жидкости относительно оси симметрии, A_1 и A_2 — моменты инерции волчка и жидкости относительно осей, перпендикулярных оси симметрии, l_1 и l_2 — расстояния от неподвижной ножки волчка до центров тяжести волчка и жидкости, g — ускорение силы тяжести.

Начало неподвижной прямоугольной координатной системы $Ox^*y^*z^*$ поместим в закрепленной ножке волчка, ось z^* направим вертикально вверх. Ось волчка в невозмущенном движении также будем считать направленной по вертикали. Ориентация волчка в пространстве обычно задается тремя углами Эйлера. Однако для исследования устойчивости при малых отклонениях оси волчка удобнее определять положение волчка параметрами X^*, Y^*, ϑ, из которых X^* и Y^* обозначают координаты проекции на плоскость x^*y^* конца единичного вектора, направленного вдоль оси волчка от ножки в сторону центра тяжести. Параметр ϑ связан с проекцией η угловой скорости волчка на его ось соотношением $d\vartheta = \eta dt$.

Величина $d\vartheta$ как известно, не будет полным дифференциалом, и поэтому η не будет лагранжевой обобщенной координатой в обычном смысле; это — так называемая квазикоордината. Определенный смысл имеет не ϑ, а только $d\vartheta$, или η, которая связана известными соотношениями с эйлеровыми углами и характеризует так называемое собственное вращение волчка (вращение волчка вокруг собственной оси).

2°. Уравнения движения волчка в параметрах X^*, Y^* и η в предположении малости X^*, Y^* и разности $\eta - \omega$ имеют вид

$$\begin{gathered}
A_1 X^{*\cdot\cdot} + C_1\omega Y^{*\cdot} - gl_1 M_1 X^* - M_{y^*}(p^*) - M_{y^*}{}^\circ = 0 \\
A_1 Y^{*\cdot\cdot} - C_1\omega X^{*\cdot} - gl_1 M_1 Y^* + M_{x^*}(p^*) + M_{*x}{}^\circ = 0 \\
C_1\eta^\cdot - M_{z^*}(p^*) - M_{z^*}{}^\circ = 0
\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь $M_{x^*}(p^*)$, $M_{y^*}(p^*)$ и $M_{z^*}(p^*)$ — проекции момента сил давления жидкости на оболочку волчка, $M_{x^*}{}^\circ$, $M_{y^*}{}^\circ$, $M_{z^*}{}^\circ$ — проекции момента внешних негравитационных сил. Система уравнений (1.1) не будет замкнутой, так как в них входит момент сил давления жидкости, для определения которого нужно воспользоваться уравнениями гидродинамики

$$\frac{d\mathbf{u}^*}{dt} + \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p^* = \mathbf{F} - g\mathbf{k}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{u}^* = 0 \tag{1.2}$$

где $\mathbf{F}$ — вектор внешних массовых сил и $\mathbf{k}$ — единичный вектор по оси z^*. Естественным граничным условием для уравнений (1.2) является условие непроницаемости частиц жидкости через оболочку волчка

$$u_n{}^*|_S = w_n{}^*|_S \tag{1.3}$$

Здесь $w_n{}^*$ — нормальная составляющая переносной скорости оболочки волчка, зависящей от параметров X^*, Y^*, η.

Граничное условие осуществляет, таким образом, обратную связь и вместе с обыкновенными дифференциальными уравнениями (1.1) и уравнениями в частных производных (1.2) дает замкнутую совокупность соотношений, полностью определяющих движение системы волчок + жидкость для произвольно заданного ее начального состояния. Было бы слишком оптимистично надеяться получить явное выражение этого движения. Такая цель и не ставится в данном случае. Цель состоит, как было отмечено выше, в изучении условий устойчивости в том или ином естественном смысле, т. е. в выяснении условий, при которых движение, соответствующее малому отклонению от свободного равномерного вращения вокруг вертикали [1], будет оставаться все время малым, или ограниченным, или будет расти не выше данного порядка по времени в зависимости от характера роста внешних сил.

3°. Имея в виду выяснение влияния возмущения, естественно рассматривать не все решение задачи при возмущенном движении, а только разность этого решения и решения при невозмущенном движении [1]. Для этого, очевидно, надо перейти к координатной системе $Oxyz$, вращающейся вокруг оси z^* с угловой скоростью ω и совпадающей в начальный

[1] Свободное ($\mathbf{F} = M_{x^*}^\circ = M_{y^*}^\circ = M_{z^*}^\circ = 0$) равномерное ($\eta = \omega = \mathrm{const}$) вращение вокруг вертикали (невозмущенное движение) имеет, как нетрудно проверить, простое полное решение $X^* = Y^* = 0$, $\eta = \omega$, $\mathbf{U}^* = \omega\mathbf{k}\times\mathbf{r}$, $p^* = {}^1/_2\,\rho\omega^2(x^{*2} + y^{*2}) - \rho g z^* + \mathrm{const}$.

момент с неподвижной системой $Ox^*y^*z^*$. Кроме того, вместо скалярной функции p^* и скаляра η надо ввести другую скалярную функцию p (выражающую, с точностью до несущественной постоянной, избыток давления жидкости, возникающий от влияния возмущения) и другой скаляр θ соотношениями

$$p^* = -\rho g z^* + {}^1/_2 \rho\omega^2 (x^{*2} + y^{*2}) + p, \qquad \eta = \omega + \theta \tag{1.4}$$

Ускорение частицы жидкости в неподвижной системе складывается из относительного, переносного и кориолисова ускорений. Пользуясь этим фактом и (1.4), из (1.2) после отбрасывания малых членов второго порядка получаем уравнения движения жидкости во вращающейся системе координат

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_x}{\partial t} - 2\omega u_y + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = F_x, \qquad &&\frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = F_z \\ &\frac{\partial u_y}{\partial t} + 2\omega u_x + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = F_y, \qquad &&\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Пользуясь соотношением (1.4), можно показать [1], что

$$\begin{aligned} M_{x^*}(p^*) &= M_{x^*}(p) - (gl_2M_2 + \omega^2 A_2 - \omega^2 C_2)\, Y^* \\ M_{y^*}(p^*) &= M_{y^*}(p) + (gl_2M_2 + \omega^2 A_2 - \omega^2 C_2)\, X^* \\ M_{z^*}(p^*) &= M_{z^*}(p) \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (1.1) и переходя к комплексному параметру $Z = X + iY = e^{-i\omega t}(X^* + iY^*)$, получим комплексную форму уравнений движения волчка во вращающейся системе координат

$$\begin{gathered} A_1 Z^{\cdot\cdot} - (C_1 - 2A_1)\, i\omega Z^{\cdot} + L\omega^2 Z + 2iN(p) + 2iN^\circ = 0 \\ C_1\theta^{\cdot} - M_z(p) - M_z{}^\circ = 0 \end{gathered} \tag{1.6}$$

Здесь

$$L = C_1 + C_2 - A_1 - A_2 - \frac{g(l_1M_1 + l_2M_2)}{\omega^2}$$

$$2N(p) = M_x(p) + iM_y(p), \qquad 2N^\circ = M_x{}^\circ + iM_y{}^\circ$$

Введем обозначения

$$\mu = z(\cos nx + i\cos ny) - (x + iy)\cos nz, \quad \nu = x\cos ny - y\cos nx \tag{1.7}$$

Тогда будем иметь

$$2N(p) = i\iint \mu p\, dS, \qquad M_z(p) = \iint \nu p\, dS \tag{1.8}$$

Теперь запишем в удобном виде граничное условие (1.3). Оболочка волчка участвует в двух вращательных движениях, вызванных отклонением оси и собственным вращением волчка. Нетрудно видеть, что вектор угловой скорости первого движения во вращающейся системе координат равен $(-Y^{\cdot}, X^{\cdot}, 0)$, а второе движение с точностью до бесконечно — малых второго порядка имеет угловую скорость $(0, 0, \theta)$.

Следовательно, переносная скорость оболочки волчка выражается вектором $(X^{\cdot}z - \theta y, Y^{\cdot}z + \theta x, -X^{\cdot}x - Y^{\cdot}y)$, и условие (1.3) дает соотношение для точек поверхности S

$$\begin{aligned} u_n = X^{\cdot}(z\cos nx - x\cos nz) + Y^{\cdot}(z\cos ny - y\cos nz) + \\ + \theta\,(x\cos ny - y\cos nx) \end{aligned}$$

Для удобства выразим это условие через Z и θ. Имеем

$$u_n = {}^1/_2\,(Z'\bar{\mu} + \bar{Z}'\mu) + \theta\nu \tag{1.9}$$

где μ и ν определяются равенствами (1.7).

Введем комплексное переменное $\zeta = x + iy$ и комплексные функции

$$u_\zeta = u_x + iu_y, \quad u_{\bar\zeta} = u_x - iu_y, \quad F_\zeta = F_x + iF_y, \quad F_{\bar\zeta} = F_x - iF_y \tag{1.10}$$

Определяя далее формальное дифференцирование по ζ и $\bar\zeta$ равенствами

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial\bar\zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

легко переписать в комплексном виде также и систему (1.5). Получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_\zeta}{\partial t} + 2i\omega u_\zeta + \frac{2}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\bar\zeta} = F_\zeta, \qquad &&\frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = F_z \\ &\frac{\partial u_{\bar\zeta}}{\partial t} - 2i\omega u_{\bar\zeta} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\zeta} = F_{\bar\zeta}, \qquad &&\frac{\partial u_\zeta}{\partial\zeta} + \frac{\partial u_{\bar\zeta}}{\partial\bar\zeta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Целесообразность перехода к комплексным переменным проявляется в возможности представления полного решения рассматриваемой задачи о совместном движении волчка и жидкости в виде суммы k частных решений (напомним, что k — порядок симметрии волчка). При этом из k решений требуют изучения только два, так как в остальных решениях взаимодействие волчка с жидкостью отсутствует. Далее оказывается, что эти решения, в свою очередь, могут быть изучены раздельно, так как в одном из них вместе с параметрами жидкости участвует только параметр Z волчка (и отсутствует параметр θ), а в другом—участвует только параметр θ (и отсутствует Z).

Расщепление полного решения на k решений происходит следующим образом (см. [1]). Пусть $\varphi\,(x, y, z; t)$ — произвольная (комплекснозначная) функция, определенная для $t \geqslant 0$ в области V, ограниченной поверхностью S. Будем смотреть на z и t как на параметры, считая φ функцией двух вещественных переменных x и y. С каждой такой функцией φ будем связывать функцию пары комплексных переменных ζ и $\bar\zeta$, обозначаемую для простоты записи той же буквой φ и определяемую равенством $\varphi\,(\zeta, \bar\zeta) = \varphi\,({}^1/_2\,(\zeta + \bar\zeta), -{}^1/_2\, i\,(\zeta - \bar\zeta); z, t)$. Двумерное комплексное многообразие, на котором определена функция $\varphi\,(\zeta, \bar\zeta)$, задается условием $(x, y, z) \in V$. Ввиду предполагаемой симметрии области V очевидно, что вместе с любой парой $(\zeta, \bar\zeta)$ в область определения функции $\varphi\,(\zeta, \bar\zeta)$ входит также и пара $(\zeta \exp\,(2\pi il\,/\,k),\ \bar\zeta \exp\,(-2\pi il\,/\,k))$ для любого целого l. Рассмотрим теперь k новых функций

$$\varphi_{(s)}\,(\zeta, \bar\zeta) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} \exp\frac{2\pi ils}{k}\,\varphi\left(\zeta\exp\frac{2\pi il}{k},\ \bar\zeta\exp\frac{-2\pi il}{k}\right) \quad (s = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Очевидно, что $\varphi_{(s)}$ можно определить и для всех целых s, положив $\varphi_{(s_1)} = \varphi_{(s_2)}$ при $s_1 \equiv s_2 \pmod{k}$. При этом, в частности, для вещественных φ получим $\varphi_{(-s)} = \bar\varphi_{(s)}$.

Нетрудно проверить, что имеет место разложение

$$\varphi\,(\zeta, \bar\zeta) = \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{(s)}\,(\zeta, \bar\zeta)$$

Единственность такого разложения очевидна: если $\varphi \equiv 0$, то $\varphi_{(s)} \equiv 0$ для любого s.

Функции $\varphi_{(s)}$ обладают своеобразной периодичностью

$$\varphi_{(s)}\left(\zeta \exp\frac{2\pi i}{k},\ \bar\zeta \exp\frac{-2\pi i}{k}\right) = \exp\frac{-2\pi i s}{k}\,\varphi_{(s)}\,(\zeta,\ \bar\zeta)$$

Легко проверить непосредственным вычислением справедливость обратного в определенном смысле утверждения: если некоторая функция φ обладает периодичностью в указанном смысле с периодом s, то $\varphi_{s'} = 0$ для $s' \neq s$ и $\varphi_{(s)} = \varphi$.

5°. Применим теперь к уравнениям (1.11) операцию (s). Учитывая легко проверяемые соотношения

$$\frac{\partial \varphi_{(s)}}{\partial \zeta} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\right)_{(s+1)}, \qquad \frac{\partial \varphi_{(s)}}{\partial \bar\zeta} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar\zeta}\right)_{(s-1)}$$

получим $(s = 0, 1, \ldots, k-1)$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_{\zeta,\,(s-1)}}{\partial t} + 2i\omega u_{\zeta,\,(s-1)} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial p_{(s)}}{\partial \bar\zeta} = F_{\zeta,\,(s-1)} \\ \frac{\partial u_{\bar\zeta,\,(s+1)}}{\partial t} - 2i\omega u_{\bar\zeta,\,(s+1)} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial p_{(s)}}{\partial \zeta} = F_{\bar\zeta,\,(s+1)} \\ \frac{\partial u_{z,\,(s)}}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{(s)}}{\partial z} = F_{z,\,(s)} \qquad \frac{\partial u_{\zeta,\,(s-1)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_{\bar\zeta,\,(s+1)}}{\partial \bar\zeta} + \frac{\partial u_{z,\,(s)}}{\partial z} = 0\end{gathered} \tag{1.12}$$

Система (1.11) таким образом расщепляется — вместо одной системы получаем k новых систем, связывающих $u_{\zeta,\,(s-1)}$, $u_{\bar\zeta,\,(s+1)}$, $u_{z,\,(s)}$, $p_{(s)}$.

Обратимся теперь к граничному условию. Подставим в условие (1.9) вместо u_x и u_y их выражение из (1.10). Получим следующее соотношение на S:

$$\begin{gathered}\bar\lambda u_\zeta + \lambda u_{\bar\zeta} + 2u_z \cos nz = Z\bar\mu + \bar Z\mu + 2\theta\nu \\ \lambda = \cos nx + i\cos ny\end{gathered} \tag{1.13}$$

Заметив, что

$$\begin{gathered}\lambda\left(\zeta\exp\frac{2\pi i}{k},\quad \bar\zeta\exp\frac{-2\pi i}{k}\right) = \exp\frac{2\pi i}{k}\,\lambda\,(\zeta,\ \bar\zeta) \\ \bar\lambda\left(\zeta\exp\frac{2\pi i}{k},\ \bar\zeta\exp\frac{-2\pi i}{k}\right) = \exp\frac{-2\pi i}{k}\,\bar\lambda\,(\zeta,\ \bar\zeta) \\ \mu\left(\zeta\exp\frac{2\pi i}{k},\ \bar\zeta\exp\frac{-2\pi i}{k}\right) = \exp\frac{2\pi i}{k}\mu\,(\zeta,\ \bar\zeta) \\ \bar\mu\left(\zeta\exp\frac{2\pi i}{k},\ \bar\zeta\exp\frac{-2\pi i}{k}\right) = \exp\frac{-2\pi i}{k}\bar\mu\,(\zeta,\ \bar\zeta) \\ \nu\left(\zeta\exp\frac{2\pi i}{k},\ \bar\zeta\exp\frac{-2\pi i}{k}\right) = \nu\,(\zeta,\ \bar\zeta)\end{gathered}$$

получаем $\lambda = \lambda_{(-1)}$, $\bar\lambda = \bar\lambda_{(1)}$, $\mu = \mu_{(-1)}$, $\bar\mu = \bar\mu_{(1)}$ и $\nu = \nu_{(0)}$. Поэтому, применяя операцию (s) к обеим частям равенства (1.13), имеем следующее условие на S:

$$\bar\lambda u_{\zeta,\,(s-1)} + \lambda u_{\bar\zeta,\,(s+1)} + 2u_{z(s)}\cos nz =$$

$$= Z\bar\mu_{(s)} + \bar Z\mu_{(s)} + 2\theta\nu_{(s)} = \begin{cases} Z\bar\mu, & s = 1 \\ \bar Z\mu & s = -1 \equiv k-1 \pmod{k} \\ 2\theta\nu & s = 0 \\ 0 & \text{при остальных } s\end{cases} \tag{1.14}$$

Подставляя в $M_z(p)$ выражение p, получим, согласно (1.8),

$$M_z(p) = \sum_{s=0}^{k-1} \iint p_{(s)}\, \nu ds \tag{1.15}$$

Сделаем замену переменных в каждом из интегралов (1.15), поворачивая координатные оси в плоскости xy на угол $2\pi / k$. При этом, в силу симметрии волчка, область интегрирования не изменится; согласно указанному выше свойству периодичности функций φ, функция $p_{(s)}$ перейдет в $\exp(-2s\pi i / k)\, p_{(s)}$, а функция ν не изменится, так как $\nu = \nu_{(0)}$, как уже было отмечено выше; якобиан же этого преобразования равен, очевидно, единице. Поэтому

$$\iint p_{(s)}\, \nu dS = \exp\frac{-2s\pi i}{k} \iint p_{(s)}\, \nu dS$$

и, следовательно, все интегралы (1.15) равны нулю, кроме интеграла, в котором $s = 0$. Аналогично показывается, что интеграл по S от $p_{(s)}\, \mu$ равен нулю, если $s \neq 1$. Таким образом, получим

$$M_z(p) = M_z(p_{(0)}), \qquad N(p) = N(p_{(1)}) \tag{1.16}$$

6°. Теперь остается только сделать заключения. Система уравнений (1.6), описывающая движение волчка, содержит функцию p, для определения которой были привлечены соотношения (1.12) и (1.14). Однако, согласно (1.6) и (1.16), на движение волчка оказывают влияние только составляющие $p_{(0)}$ и $p_{(1)}$, для определения которых достаточны соотношения (1.12) и (1.14) только при $s = 0$ и $s = 1$. Обратно, волчок влияет только на те составляющие движения жидкости, которые связаны соотношениями (1.12) и (1.14) при тех же значениях s, так как при остальных значениях s граничное условие (1.14) однородно и не содержит параметров волчка. Далее, указанные же соотношения показывают, что на параметр Z оказывает влияние только составляющая $p_{(1)}$, а система соотношений, определяющих $p_{(1)}$, не содержит параметра θ. Обратно, на параметр θ влияет только составляющая $p_{(0)}$, для определения которой нужно рассмотреть соотношения (1.12) и (1.14) при $s = 0$, в которых Z не участвует. Таким образом, требуют изучения только случаи[1] $s = 0$ и $s = 1$; эти случаи не связаны между собой и могут быть изучены раздельно. Случай $s = 1$ изучен в работе [1]. Устойчивость же при $s = 0$ (устойчивость параметра θ) доказывается ниже.

§ 2. 1°. Для того чтобы перенести влияние волчка с граничных условий в уравнения, введем новые функции

$$v_x = u_{\bar{\zeta},(1)} + u_{\zeta,(-1)} - 2\theta\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad v_y = i\,(u_{\bar{\zeta},(1)} - u_{\zeta,(-1)}) - 2\theta\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$v_z = 2u_{z,(0)} - 2\theta\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

где функция ψ определяется условиями

$$\Delta\psi = 0, \qquad \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_S = \nu \tag{2.1}$$

[1] Нетрудно видеть, что решение задачи при $s = k - 1$ будет просто комплексно-сопряженным к решению при $s = 1$.

Согласно (1.14) (при $s = 0$), вектор $\mathbf{v}$ удовлетворяет однородному граничному условию $v_n = 0$ на S. А уравнения для $\mathbf{v}$ получаются из уравнений (1.12) при $s = 0$ сложением и вычитанием. Имеем

$$\begin{gathered}
\frac{\partial v_x}{\partial t} - 2\omega v_y + \frac{2}{\rho}\frac{\partial p_{(0)}}{\partial x} + 2\theta^{\cdot}\frac{\partial\psi}{\partial x} - 4\omega\theta\frac{\partial\psi}{\partial y} = G_x \\
\frac{\partial v_y}{\partial t} + 2\omega v_x + \frac{2}{\rho}\frac{\partial p_{(0)}}{\partial y} + 2\theta^{\cdot}\frac{\partial\psi}{\partial y} + 4\omega\theta\frac{\partial\psi}{\partial x} = G_y \\
\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial p_{(0)}}{\partial z} + 2\theta^{\cdot}\frac{\partial\psi}{\partial z} = G_z, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad v_n|_S = 0
\end{gathered} \tag{2.2}$$

где

$$G_x = F_{\bar{\zeta},(1)} + F_{\zeta,(-1)}, \qquad G_y = i\,(F_{\bar{\zeta},(1)} - F_{\zeta,(-1)}), \qquad G_z = 2F_{z,(0)}$$

Система уравнений (2.2) совместно со вторым уравнением системы (1.6) в котором в силу (1.16) вместо $M_z(p)$ надо писать $M_z(p_{(0)})$, дает замкнутую систему соотношений, которую назовем системой D_θ. Прежде чем перейти к исследованию системы D_θ, сделаем следующее замечание.

Если считат, что вектор $\mathbf{G}$ непрерывен в области V вплоть до границы и имеет непрерывные производные первого порядка внутри V, то без ограничения общности можно считать, что он имеет некоторый специальный вид, именно

$$\mathbf{G} = \varphi(t)\operatorname{grad}\psi + \Psi(x, y, z; t)$$

где φ — некоторая (известная) функция только от t, ψ — решение краевой задачи (2.1), и вектор Ψ удовлетворяет условиям

$$\operatorname{div}\Psi = 0, \qquad \Psi_n = 0 \ \text{ на } S \tag{2.3}$$

Для доказательства этого утверждения обозначим через $\Phi(x, y, z; t)$ решение задачи Неймана с краевым условием $\partial\Phi/\partial n = G_n$ на S для уравнения Пуассона (по пространственным переменным) с правой частью, равной $\operatorname{div}\mathbf{G}$. При этом очевидно, что разность $\Psi = \mathbf{G} - \operatorname{grad}\Phi$ удовлетворяет обоим условиям (2.3). Следовательно, надо только показать, что функцию Φ можно считать равной $\varphi(t)\psi(x, y, z)$. Обозначив

$$\varphi(t) = \frac{1}{\alpha^2}\iint \Phi\nu\, dS, \qquad \alpha^2 = \iiint\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right] dV \tag{2.4}$$

получаем разложение $\Phi = f(x, y, z; t) + \varphi(t)\psi(x, y, z)$, где функция f удовлетворяет условию

$$\iint f\nu\, dS = 0$$

Остается заметить, что без ограничения общности можно считать $f \equiv 0$, так как частное решение рассматриваемой (линейной) системы D_θ, соответствующее случаю $f \not\equiv 0$, $\varphi \equiv 0$, $\Psi \equiv 0$, $M_z^0 \equiv 0$, находится элементарно и имеет простой вид: $\theta \equiv 0$, $\mathbf{v} \equiv 0$, $p_{(0)} = {}^1\!/_2\,\rho f$. Таким образом, высказанное утверждение доказано полностью.

Введем теперь вместо функции $p_{(0)}$ функцию

$$q = 2p_{(0)} + 2\rho\theta^{\cdot}\psi - \rho\varphi\psi \tag{2.5}$$

Тогда уравнения системы (2.2) примут вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial v_x}{\partial t} - 2\omega v_y + \frac{1}{\rho}\frac{\partial q}{\partial x} - 4\omega\theta\frac{\partial\psi}{\partial y} = \Psi_x \\
\frac{\partial v_y}{\partial t} + 2\omega v_x + \frac{1}{\rho}\frac{\partial q}{\partial y} + 4\omega\theta\frac{\partial\psi}{\partial x} = \Psi_y \\
\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial q}{\partial z} = \Psi_z, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad v_n|_S = 0
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Умножая первые три уравнения системы (2.6) на $\partial\psi / \partial x$, $\partial\psi / \partial y$ и $\partial\psi / \partial z$ соответственно, складывая и интегрируя по V, получим, в силу (2.1), (2.3) и (2.6),

$$2\omega \iiint \left(v_x \frac{\partial\psi}{\partial y} - v_y \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) dV + \frac{1}{\rho} \iint q\nu dS = 0$$

Полученное уравнение совместно со вторым уравнением системы (1.6) и равенствами (1.16) и (2.5) дает

$$(C_1 + \rho\alpha^2)\,\theta^{\cdot} + \rho\omega \iiint \left(v_x \frac{\partial\psi}{\partial y} - v_y \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) dV = M_z^{\circ} + \frac{\varphi\rho\alpha^2}{2} \qquad (2.7)$$

Здесь α определяется (2.4). Система уравнений (2.6) и (2.7) дает удобный для дальнейшего исследования вид системы D_θ. Легко убедиться в том, что все величины, входящие в систему D_θ, вещественны.

Взяв оператор div от первых трех уравнений системы (2.6), получим после сложения

$$\Delta q = 2\omega\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \qquad (2.8)$$

Уравнения системы (2.6) дают также граничное условие на S

$$\frac{\partial q}{\partial n} = 2\rho\omega\,(v_y \cos nx - v_x \cos ny) + 4\omega\theta\rho \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \cos nx - \frac{\partial\psi}{\partial x} \cos ny \right) \qquad (2.9)$$

Отсюда видно, что функция q определяется (с точностью до несущественного постоянного слагаемого) заданием $\mathbf{v}$ и θ. Следовательно, зная $\mathbf{v}$ и θ (а также внешний режим — функции Ψ, φ и M_z°) в какой-либо момент времени, можем вычислить $\mathbf{v}_1 = d\mathbf{v} / dt$ и $\theta_1 = d\theta / dt$, согласно уравнениям (2.6) и (2.7), которые таким образом задают некоторый оператор, переводящий пару $(\mathbf{v}, \theta)$ в пару $(\mathbf{v}_1, \theta_1)$. Точное определение этого оператора дается ниже.

2°. Пусть H обозначает гильбертово пространство вещественных вектор-функций $\mathbf{v}$, определенных в области V и удовлетворяющих условиям

$$(a) \qquad \iiint (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\, dV = \|\mathbf{v}\|^2 < +\infty$$

(*б*) Какова бы ни была функция $\varphi\,(x, y, z)$, имеющая внутри области V непрерывные производные первого порядка, интегрируемые в квадрате по V, справедливо тождество

$$\iiint \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} v_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} v_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} v_z \right) dV = 0$$

Замечание. Для гладких функций $\mathbf{v}$ условие (*б*) равносильно выполнению двух последних равенств системы (2.6).

Лемма [1]. Линейное многообразие функций $\mathbf{v}$, имеющих производные любого порядка, непрерывные вплоть до границы области V, всюду плотно в H.

Пусть, далее, $\{R\}$ обозначает вещественное векторное пространство элементов $R = (\mathbf{v}, \theta)$ ($\mathbf{v} \in H$, θ — вещественное число) с естественным определением линейных операций и нормой, задаваемой равенством $\|R\| = \max\{\|\mathbf{v}\|, |\theta|\}$.

[1] Доказательство этой леммы содержится в работе [2].

3°. Уравнения системы D_θ (уравнения (2.6) и (2.7)) могут быть записаны в виде

$$R^{\cdot} = TR + R_0, \qquad R^{\cdot} = (d\mathbf{v} \,/\, dt,\, d\theta \,/\, dt) \tag{2.10}$$

Здесь $dv \,/\, dt$ понимается в смысле сильной сходимости в H соответствующего разностного отношения, R_0 — элемент пространства $\{R\}$, имеющий компоненты

$$\left(\Psi,\ \frac{2M_z{}^{\circ} + \rho\varphi\alpha^2}{2(C_1 + \rho\alpha^2)}\right) \tag{2.11}$$

а T — линейный оператор, определенный пока только для тех элементов пространства $\{R\}$, у которых $\mathbf{v}$ имеет непрерывные производные. Множество таких элементов, в силу сформулированной выше леммы, всюду плотно в $\{R\}$. Поэтому, если оператор T окажется ограниченным на этом множестве, то его можно будеть единственным образом продолжить на все пространство $\{R\}$. Прежде чем доказать ограниченность T, выпишем формулы, определяющие этот оператор. Если положить $TR = R_1 = (\mathbf{v}_1, \theta_1)$, то, согласно (2.6) и (2.7), имеем

$$v_{1x} = 2\omega v_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial q}{\partial x} + 4\omega\theta\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v_{1y} = -2\omega v_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial q}{\partial y} - 4\omega\theta\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$v_{1z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial q}{\partial z}, \qquad \theta_1 = \frac{\rho\omega}{C_1 + \rho\alpha^2}\iiint\left(v_y\frac{\partial\psi}{\partial x} - v_x\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dV \tag{2.12}$$

К этим формулам надо еще добавить соотношения (2.8) и (2.9), определяющие функцию q по элементу R. Из замечания на стр. 42 легко вытекает, что $TR \in \{R\}$ для $R \in \{R\}$.

Можно доказать ограниченностъ оператора T.

Пусть $\mathbf{v}$ — достаточно гладкий вектор. Первое уравнение (2.12) даст равенство

$$v_{1x}^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \frac{2}{\rho}v_{1x}\frac{\partial q}{\partial x} = 4\omega^2 v_y^2 + 16\omega^2\theta^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + 16\omega^2\theta v_y\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

Аналогичные равенства дают второе и третье уравнения системы (2.12). Суммируя все три равенства и интегрируя по области V, получаем

$$\|\mathbf{v}_1\|^2 + \frac{1}{\rho^2}\|\operatorname{grad} q\|^2 + \frac{2}{\rho}\iiint\left(v_{1x}\frac{\partial q}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + v_{1y}\frac{\partial q}{\partial y} + v_{1z}\frac{\partial q}{\partial z}\right)dV = 4\omega^2\iiint(v_x^2 + v_y^2)\,dV + 16\omega^2\theta^2\iiint\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]dV + 16\omega^2\theta\iiint\left(v_x\frac{\partial\psi}{\partial x} + v_y\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dV$$

Отбросим второе слагаемое в левой части этого равенства. Следующее за ним слагаемое равно нулю в силу свойства (*б*) в определении пространства H. В силу того же свойства, последний интеграл в правой части можно заменить интегралом по V от $-v_x\,(\partial\psi/\partial z)$. Учитывая все сказанное, получаем оценку

$$\|\mathbf{v}_1\| \leqslant 2\omega\,(\|\mathbf{v}\| + 2\,|\,\theta\,|\,\alpha) \leqslant 2\omega\,(1 + 2\alpha)\,\|\,R\,\| \tag{2.13}$$

Последнее равенство системы (2.12) дает оценку

$$|\,\theta_1\,| \leqslant \frac{2\rho\omega\alpha}{C_1 + \rho\alpha^2}\|\mathbf{v}\| \leqslant \frac{2\rho\omega\alpha}{C_1 + \rho\alpha^2}\|\,R\,\| \tag{2.14}$$

Из (2.13) и (2.14) вытекает, очевидно, следующая оценка нормы оператора

$$\|T\| \leqslant \max\left\{2\omega(1+2\alpha), \frac{2\rho\omega\alpha}{C_1+\rho\alpha^2}\right\}$$

Таким образом, оператор T ограничен, и его можно распространить на все пространство $\{R\}$. При этом очевидно, что гладкие решения уравнения (2.10) будут решениями системы D_θ, и, обратно, решения системы D_θ будут гладкими решениями уравнения (2.10). Решения же уравнения (2.10), не имеющие классических производных, естественно трактовать как обобщенные решения системы D_θ.

4°. Продолжаем исследование уравнения (2.10). Рассмотрим сначала соответствующее однородное уравнение

$$R^{\boldsymbol\cdot} = TR \tag{2.15}$$

Нетрудно убедиться непосредственной проверкой, что решение уравнения (2.15) имеет вид

$$R(t) = e^{Tt}R^{(0)}, \qquad R^{(0)} = (\mathbf{v}|_{t=0}, \theta|_{t=0}) \tag{2.16}$$

Здесь оператор e^{Tt} понимается в смысле сильной сходимости соответствующего степенного ряда, гарантируемой ограниченностью оператора T в силу очевидного неравенства $\|T^m\| \leqslant \|T\|^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

Можно показать, что существует заданная на всем пространстве $\{R\}$ положительно-определенная билинейная форма $Q(R^{(1)}, R^{(2)})$, по отношению к которой оператор T антисимметричен в том смысле, что

$$Q(TR^{(1)}, R^{(2)}) = -Q(R^{(1)}, TR^{(2)}) \tag{2.17}$$

Чтобы показать это, будем форму Q искать в виде

$$Q(R^{(1)}, R^{(2)}) = Q_1 \iiint (v_x^{(1)} v_x^{(2)} + v_y^{(1)} v_y^{(2)} + v_z^{(1)} v_z^{(2)})\, dV + Q_2\theta^{(1)}\theta^{(2)}$$

где Q_1 и Q_2 — положительные постоянные, подлежащие определению.

Тогда пользуясь (2.12), получим

$$Q(TR^{(1)}, R^{(2)}) = 2\omega Q_1 \iiint (v_y^{(1)} v_x^{(2)} - v_x^{(1)} v_y^{(2)})\, dV + 4\omega Q_1 \theta^{(1)} \iiint \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} v_x^{(2)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial\psi}{\partial x} v_y^{(2)}\right) dV + \frac{\rho\omega\theta^{(2)} Q_2}{C_1+\rho\alpha^2} \iiint \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} v_y^{(1)} - \frac{\partial\psi}{\partial y} v_x^{(1)}\right) dV$$

$$Q(R^{(1)}, TR^{(2)}) = 2\omega Q_1 \iiint (v_x^{(1)} v_y^{(2)} - v_y^{(1)} v_x^{(2)})\, dV + 4\omega Q_1 \theta^{(2)} \iiint \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} v_x^{(1)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial\psi}{\partial x} v_y^{(1)}\right) dV + \frac{\rho\omega\theta^{(1)} Q_2}{C_1+\rho\alpha^2} \iiint \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} v_y^{(2)} - \frac{\partial\psi}{\partial y} v_x^{(2)}\right) dV$$

Теперь очевидно, что равенство (2.17) будет выполнено, Q_1 и Q_2 удовлетворяют условию $\rho Q_2 = 4(C_1 + \rho\alpha^2) Q_1$. Как и следовало ожидать, это условие определяет Q_1 и O_2 с точностью до общего сомножителя. Полагая, например, $Q_1 = {}^1/_4\rho$, $Q_2 \equiv C_1 + \rho\alpha^2$, получим билинейную форму, удовлетворяющую условию (2.17).

Из (2.17) имеем $Q(T^m R^{(1)}, R^{(2)}) = (-1)^m Q(R^{(1)}, T^m R^{(2)})$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Поэтому, в силу линейности Q по каждому аргументу в отдельности, легко получаем $Q(e^{Tt}R^{(1)}, R^{(2)}) = Q(R^{(1)}, e^{-Tt}R^{(2)})$. Следовательно, справедливо соотношение

$$Q(e^{Tt}R, e^{Tt}R) = Q(R, R), \quad R \in \{R\} \tag{2.18}$$

Из полученного соотношения легко вытекает устойчивость решения однородного уравнения (2.15). В самом деле, введем в пространстве $\{R\}$ наряду с исходной нормой также и эквивалентную ей норму, порожденную формой Q

$$\|R\|_1 = \sqrt{Q(R, R)} \tag{2.19}$$

При этом равенство (2.18) показывает, что каково бы ни было начальное значение $R^{(0)}$, решение задачи Коши для уравнения (2.15), определяемое формулой (2.16), остается все время на поверхности фиксированной сферы с центром в нуле и радиусом, равным $\sqrt{Q(R^{(0)}, R^{(0)})}$, т. е. $\|R(t)\|_1 = \|R^{(0)}\|_1$ для любого t. Таким образом, в случае малости значений $\|\mathbf{v}\|$ и $|\theta|$ при $t = 0$ величины $\|\mathbf{v}(t)\|$ и $|\theta(t)|$ остаются все время малыми. Это означает устойчивость решения системы D_θ и, в частности, устойчивость параметра θ в случае отсутствия внешних негравитационных сил.

Равенство (2.18) можно интерпретировать и несколько иначе: оно показывает, что положительно-определенная квадратичная форма $Q(R, R)$ будет интегралом движения уравнения (2.15), так как вдоль траектории этого уравнения $dQ / dt \equiv 0$ в силу (2.16) и (2.18).

Обратимся теперь к неоднородному уравнению (2.10). Решение этого уравнения, как нетрудно проверить непосредственно, имеет вид

$$R(t) = e^{Tt} R^{(0)} + \int_0^t e^{T(t-\tau)} R_0(\tau)\, d\tau \tag{2.20}$$

где интеграл понимается в смысле сильной сходимости соответствующей интегральной суммы. Пользуясь равенствами (2.18) и (2.19) и производя элементарную оценку, получим из (2.20)

$$\|R(t)\|_1 \leqslant \|R^{(0)}\|_1 + J(t), \qquad J(t) = \int_0^t \|R_0(\tau)\|_1\, d\tau \tag{2.21}$$

Таким образом, для параметра θ (в отличие от параметров X и Y) не имеют места явления типа резонанса — быстрый рост по t при определенных соотношениях между физическими константами задачи и геометрической формой оболочки волчка. Если, например, $\|R_0(t)\|_1$ остается ограниченной на всем промежутке времени, то, согласно (2.21), $\|R(t)\|_1$ (в частности $\theta(t)$) растет не быстрее первой степени по t. Далее, если малы как начальное значение $\|R^{(0)}\|_1$, так и «суммарное действие» внешних сил (величина $J(\infty)$), то $\|R(t)\|_1$ (в частности $\theta(t)$) также остается малой на всем промежутке времени. В этом смысле можно сказать, что устойчивость имеет место и в общем (неоднородном: $\mathbf{F} \neq 0$, $M_z{}^\circ \neq 0$) случае.

Поступила 29 VII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью. ПМТФ, 1960, № 3, стр. 20—55.
2. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1954, т. 18, стр. 3—50.