

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

П. В. Харламов

(Новосибирск)

В указанных здесь трех точных решениях задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой и полостями, заполненными идеальной жидкостью, пять искомым переменных — алгебраические функции шестой, зависимость которой от времени устанавливается квадратурой. Два решения обобщают случаи интегрируемости В. А. Стеклова [1] и Ковалевского [2], третье совпадает с решением, полученным ранее Д. Н. Горячевым [3]. Движению тела в последнем случае дано кинематическое истолкование, основанное на уравнении неподвижного годографа [4].

§ 1. Уравнения движения тела. Воспользуемся специальными прямоугольными осями координат [5], неизменно связанными с телом. Первая ось проведена из неподвижной точки через центр тяжести, а вторая и третья выбраны так, что в выражении кинетической энергии, как квадратичной формы компонент x, y, z момента количества движения

$$2T = ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2 + 2(b_1y + b_2z)x$$

отсутствует произведение yz . В такой системе координат указанная во введении задача приведена к двум уравнениям, каждое из которых имеет первый порядок [6]

$$\begin{aligned} & [(a_2z + b_2x)(y + \lambda_1) - (a_1y + b_1x)(z + \lambda_2)] [(y + \lambda_1) dz / dx - \\ & - (z + \lambda_2) dy / dx] + (ax + b_1y + b_2z) [(y + \lambda_1)^2 + (z + \lambda_2)^2] + \\ & + (x + \lambda) [1/2(ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2) + (b_1y + b_2z)x - (a_1y + b_1x) \times \\ & \times (y + \lambda_1) - (a_2z + b_2x)(z + \lambda_2) - E] - k = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} & \{[(a_2z + b_2x)(y + \lambda_1) - (a_1y + b_1x)(z + \lambda_2)] dy / dx - \\ & - (ax + b_1y + b_2z)(z + \lambda_2) + (a_2z + b_2x)(x + \lambda)\}^2 + \\ & + \{[(a_1y + b_1x)(z + \lambda_2) - (a_2z + b_2x)(y + \lambda_1)] dz / dx - \\ & - (ax + b_1y + b_2z)(y + \lambda_1) + (a_1y + b_1x)(x + \lambda)\}^2 + \\ & + [1/2(ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2) + (b_1y + b_2z)x - E]^2 - \Gamma^2 = 0 \end{aligned}$$

Здесь k, E — постоянные площадей и энергии; Γ — вес гиростата, умноженный на расстояние центра тяжести от неподвижной точки; постоянные $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ — компоненты момента количества движения жидкости в циркуляционном течении.

Если из уравнений (1.1) найдены

$$y = y(x), \quad z = z(x)$$

то зависимость остальных переменных от x дают формулы

$$\begin{aligned}\gamma &= 1/2 (ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2) + (b_1y + b_2z)x - E \\ \gamma' &= (ax + b_1y + b_2z)(y + \lambda_1) - (a_1y + b_1x)(x + \lambda) + \\ &\quad + [(a_2z + b_2x)(y + \lambda_1) - (a_1y + b_1x)(z + \lambda_2)] dz / dx \quad (1.2) \\ \gamma'' &= (ax + b_1y + b_2z)(z + \lambda_2) - (a_2z + b_2x)(x + \lambda) + \\ &\quad + [(a_1y + b_1x)(z + \lambda_2) - (a_2z + b_2x)(y + \lambda_1)] dy / dx\end{aligned}$$

Здесь

$$\gamma = \Gamma v_1, \quad \gamma' = \Gamma v_2, \quad \gamma'' = \Gamma v_3 \quad (1.3)$$

а v_1, v_2, v_3 — орты направления силы тяжести. Зависимость x от t устанавливается квадратурой

$$\frac{dx}{dt} = (a_2z + b_2x)(y + \lambda_1) - (a_1y + b_1x)(z + \lambda_2) \quad (1.4)$$

Уравнения (1.4) значительно упрощаются, если главные оси совпадают со специальными осями ($b_1 = b_2 = 0$), а вектор λ направлен по первой координатной оси ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). Переходя к обычным для главных осей обозначениям $x = Ap, y = Bq, z = Cr, a = A^{-1}, a_1 = B^{-1}, a_2 = C^{-1}$, записываем (1.1), (1.2), (1.4) так:

$$\begin{aligned}[2Q + (A - B)p^2 + 2\lambda p] \frac{dR}{dp} - [2R + (A - C)p^2 + 2\lambda p] \frac{dQ}{dp} + \\ + (Ap + \lambda) \left[Q - R + \frac{(C - B)E}{A} \right] = \frac{(B - C)k}{A} \quad (1.5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B(B - C) [2Q + (A - B)p^2 + 2\lambda p] \left(\frac{dR}{dp} \right)^2 + C(C - B) [2R + \\ + (A - C)p^2 + 2\lambda p] \left(\frac{dQ}{dp} \right)^2 + ABC \left[Q - R + \frac{(C - B)E}{A} \right]^2 = \Gamma^2 \frac{(B - C)^2 BC}{A}\end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{(Q - R)A}{B - C} - E, \quad \gamma' = q \frac{dQ}{dp}, \quad \gamma'' = r \frac{dR}{dp} \quad (1.6)$$

$$Adp / dt = (B - C)qr \quad (1.7)$$

Переменные Q, R введены вместо q, r :

$$\frac{r^2 (B - C)C}{A} = (A - B)p^2 + 2\lambda p + 2Q \quad (1.8)$$

$$q^2 \frac{(C - B)B}{A} = (A - C)p^2 + 2\lambda p + 2R$$

Дифференцируя (1.5) по p , получаем

$$\begin{aligned}[2R + (A - C)p^2 + 2\lambda p] \frac{d^2Q}{dp^2} + \left[\frac{dR}{dp} + (A - C)p + \lambda \right] \frac{dQ}{dp} + \\ + Bp \frac{dR}{dp} - \frac{(Q - R)AB}{B - C} + BE = 0 \quad (1.9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[2Q + (A - B)p^2 + 2\lambda p] \frac{d^2R}{dp^2} + \left[\frac{dQ}{dp} + (A - B)p + \lambda \right] \frac{dR}{dp} + \\ + Cp \frac{dQ}{dp} - \frac{(Q - R)AC}{B - C} + CE = 0 \quad (1.10)\end{aligned}$$

§ 2. Условия существования полиномиальных решений. Укажем полиномы

$$Q = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n \quad (b_n \neq 0) \quad (2.1)$$

$$R = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \dots + c_m p^m \quad (n \geq m) \quad (2.2)$$

удовлетворяющие уравнениям (1.5).

Если допустить, что $m > 2$, то, приравняв нулю коэффициент при p^{2n+m-2} в тождестве, появляющемся при подстановке (2.1), (2.2) в (1.10), получим

$$2n^2 C (C - B) c_m b_n^2 = 0 \quad (2.3)$$

Но равенство $C = B$ исключено при выводе уравнений (1.1), и поэтому из (2.1), (2.3) следует $c_m = 0$ для всех $m > 2$, т. е.

$$R = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 \quad (2.4)$$

Полином (2.1) не может иметь степень выше четвертой

$$Q = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3 + b_4 p^4 \quad (2.5)$$

Полиномы (2.4), (2.5) должны обращать (1.9), (1.10) в тождества, что приводит к следующим условиям:

$$\begin{aligned} b_4 [2c_2 + A - C - AB / 16 (B - C)] &= 0 \\ b_4 [12c_2 + 4C - AC / (B - C)] &= 0 \\ 28b_4 (c_1 + \lambda) + 9b_3 [2c_2 + A - C - AB / 9 (B - C)] &= 0 \\ 4b_4 c_1 + b_3 [10c_2 + 3C - AC / (B - C)] &= 0 \\ 24b_4 c_0 + 15b_3 (c_1 + \lambda) + 4b_2 (2c_2 + A - C) + 2c_2 B - \\ - (b_2 - c_2) AB / (B - C) &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} 3b_3 c_1 + 4c_2 (2b_2 + A - B) + 2b_2 C - (b_2 - c_2) AC / (B - C) &= 0 \\ 12b_3 c_0 + 6b_2 (c_1 + \lambda) + b_1 (2c_2 + A - C) + c_1 B - (b_1 - c_1) AB / (B - C) &= 0 \\ 6c_2 (b_1 + \lambda) + c_1 (2b_2 + A - B) + b_1 C - (b_1 - c_1) AC / (B - C) &= 0 \\ 4b_2 c_0 + b_1 (c_1 + \lambda) = BH, \quad 4c_2 b_0 + c_1 (b_1 + \lambda) = CH \end{aligned}$$

Постоянная H введена вместо E

$$H = (b_0 - c_0) A / (B - C) - E \quad (2.7)$$

Внося (2.4), (2.5) в (1.8), (1.6), учтем (2.7)

$$\begin{aligned} q^2 B (C - B) / A &= (2c_2 + A - C) p^2 + 2(c_1 + \lambda) p + 2c_0 \quad (2.8) \\ r^2 C (B - C) / A &= 2b_4 p^4 + 2b_3 p^3 + (2b_2 + A - B) p^2 + 2(b_1 + \lambda) p + 2b_0 \\ \gamma &= [A / (B - C)] [b_4 p^4 + b_3 p^3 + (b_2 - c_2) p^2 + (b_1 - c_1) p] + H \\ \gamma' &= q (4b_4 p^3 + 3b_3 p^2 + 2b_2 p + b_1), \quad \gamma'' = r (2c_2 p + c_1) \end{aligned}$$

Зависимость p от t находим из (1.7)

$$\begin{aligned} BC (dp / dt)^2 &= [(2c_2 + A - C) p^2 + 2(c_1 + \lambda) p + 2c_0] [2b_4 p^4 + 2b_3 p^3 + \\ + (2b_2 + A - B) p^2 + 2(b_1 + \lambda) p + 2b_0] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Так как (1.5) — первые интегралы уравнений (1.9), (1.10), то соотношения, вытекающие из требования, чтобы (2.4), (2.5) обращали (1.5) в тождества, оказываются следствием условий (2.6), за исключением двух, стесняющих константы k и Γ :

$$k = \lambda H + \frac{2(b_0 c_1 - c_0 b_1) A}{B - C}, \quad \Gamma^2 = H^2 + 2 \left(\frac{b_0 c_1^2}{C} - \frac{c_0 b_1^2}{B} \right) \frac{A}{B - C} \quad (2.10)$$

Три различных решения уравнений (2.6) приводят к трем частным случаям интегрируемости уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку. Эти решения даны в § 3—5.

§ 3. Первое решение ($n = 2$). При $b_4 = b_3 = 0$ уравнения (2.6) удовлетворены значениями

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{(A - B)(A - C)}{2(2C - A)}, & c_2 &= \frac{(A - B)(A - C)}{2(2B - A)} \\ b_1 &= \lambda \left[C \frac{3BC - AC - B^2}{(2C - A)^2(2B - A)} - 1 \right], & c_1 &= \lambda \left[B \frac{3BC - AB - C^2}{(2B - A)^2(2C - A)} - 1 \right] \\ b_0 &= \frac{C(2B - A)}{2(A - B)(A - C)} \left\{ H - \lambda^2 \frac{3BC - AC - B^2}{(2C - A)^3(2B - A)^3} [A^3 - 2A^2(2B + C) + \right. \\ & \quad \left. + AB(3B + 8C) - BC(5B + C)] \right\} \\ c_0 &= \frac{B(2C - A)}{2(A - B)(A - C)} \left\{ H - \lambda^2 \frac{3BC - AB - C^2}{(2B - A)^3(2C - A)^3} [A^3 - 2A^2(2C + B) + \right. \\ & \quad \left. + AC(3C + 8B) - BC(5C + B)] \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Внося (3.1) в (2.8), (2.9), получаем первое из двух решений, указанных без вывода в сообщении [7]. Константы k и Γ определяются из (2.10); (3.1) в зависимости от A, B, C, λ, H . Естественно, однако, полагать заданной величину Γ , а H устанавливать в зависимости от этой величины. Имеем

$$H = \pm \left(\Gamma^2 + \lambda^4 \frac{A(B - C)^2(B + C - 2A)[2A^2 - 3A(B + C) + 4BC]^3}{4(A - B)^2(A - C)^2(2B - A)^4(2C - A)^4} \right)^{1/2} + \lambda^2 A \{ [N / 2(A - B)(A - C)(2B - A)^2(2C - A)^2] - 1 \} / (2B - A)(2C - A)$$

где

$$N = 2A^4BC + A^3(B + C)(B^2 - 8BC + C^2) + 26A^2B^2C^2 - 12AB^2C^2(B + C) + 2B^2C^2(B + C)^2$$

Два значения параметра H приводят к двум различным вариантам найденного решения. Для решения Стеклова [1] (получающегося из рассмотренного в этом параграфе при $\lambda = 0$) это обстоятельство отметил П. А. Кузьмин [8].

§ 4. Второе решение ($n = 3$). Пусть $b_4 = 0, b_3 = b \neq 0$. Коэффициенты полиномов в (2.4), (2.5) определяются в этом случае из (2.6), если величины A, B, C связаны соотношением

$$A = 18C(B - C)/(10B - 9C)$$

Находим

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{3}{2} C \frac{3C - 2B}{10B - 9C}, & c_1 &= -2\lambda - \frac{3C(3C - 2B)^2(3C - 4B)}{b(10B - 9C)^2} \\ c_0 &= \lambda^2 \frac{10B - 9C}{4BC} - \frac{3}{2} \frac{\lambda}{b} \frac{(3C - 2B)(2B - C)}{10B - 9C} - \frac{81C(B - C)^2(3C - 2B)^3(3C - 4B)}{b^2B(10B - 9C)^3} \\ b_2 &= - \frac{3(3C - 2B)(27C^2 - 54BC + 22B^2)}{2B(10B - 9C)} - \frac{3}{2} b\lambda \frac{10B - 9C}{BC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{3}{4} b \lambda^2 \frac{(10B - 9C)^2}{B^2 C^2} + \frac{\lambda}{8 B^2 C} (729 C^3 - 1917 B C^2 + 1512 B^2 C - 388 B^3) + \\
&\quad + \frac{3}{8} \frac{(3C - 2B)^2 (3C - 4B)}{b B^2 (10B - 9C)} (243 C^3 - 648 B C^2 + 495 B^2 C - 122 B^3) \\
b_0 &= - \frac{b \lambda^3 (10B - 9C)^3}{8 B^3 C^3} - \frac{\lambda^2}{48 B^3 C^2} \frac{10B - 9C}{3C - 2B} (2187 C^4 - 7533 B C^3 + 9234 B^2 C^2 - \\
&\quad - 5036 B^3 C + 1064 B^4) + \frac{\lambda}{4b} \frac{3C - 2B}{B^2 C (10B - 9C)} (729 C^4 - 2754 B C^3 + 3951 B^2 C^2 - \\
&\quad - 2582 B^3 C + 632 B^4) - \frac{3 (B - C) (3C - 2B)^3 (3C - 4B)}{16 B^3 (10B - 9C)^3} (2187 C^4 - 5832 B C^3 + \\
&\quad + 4131 B^2 C^2 - 30 B^3 C - 488 B^4)
\end{aligned}$$

Подставив эти значения в (2.8), (2.9), приходим ко второму решению, указанному в сообщении [7].

§ 5. Третье решение ($n=4$). Полагаем теперь $b_4 \neq 0$. При этом необходимо подчинить параметры системы условиям

$$\lambda = 0, \quad A = 16C (B - C) / (9B - 8C) \quad (5.1)$$

Тогда уравнения (2.6) дают

$$\begin{aligned}
c_2 &= C \frac{4C - 3B}{9B - 8C}, \quad c_1 = 0, \quad c_0 = - \frac{HB^2 (9B - 8C)}{8 (4C - 3B)(2C - 3B)(2C - B)} \\
b_4 &= \frac{2C (4C - 3B)^2 (4C - 5B) (2C - 3B) (2C - B)}{HB^2 (9B - 8C)^3}, \quad b_3 = 0 \\
b_2 &= - \frac{2 (4C - 3B) (2C - 3B) (2C - B)}{B (9B - 8C)}, \quad b_1 = 0, \quad b_0 = \frac{9B - 8C}{4 (4C - 3B)} H
\end{aligned} \quad (5.2)$$

и из (2.8) находим

$$q^2 + \frac{16C^2}{(9B - 8C)^2} p^2 = \frac{4BCH}{(4C - 3B) (2C - 3B) (2C - B)} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned}
r^2 &= \frac{64C (4C - 3B)^3 (4C - 5B) (2C - 3B) (2C - B)}{(9B - 8C)^3 B^2 H} p^4 - \\
&\quad - \frac{16 (4C - 3B) (16C^2 - 28BC + 9B^2)}{(9B - 8C)^2 B} p^2 + \frac{8H}{4C - 3B}
\end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{32C^2 (4C - 3B)^3 (4C - 5B) (2C - 3B) (2C - B)}{HB^2 (9B - 8C)^4} p^4 - \\
&\quad - \frac{16C (4C - 3B) (8C^2 - 15BC + 6B^2)}{B (9B - 8C)^2} p^2 + H
\end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\gamma' = \frac{8C (4C - 3B)^3 (4C - 5B) (2C - 3B) (2C - B)}{HB^2 (9B - 8C^3)} pq \left[p^2 - \frac{B (9B - 8C)^2 H}{2C (4C - 3B)^2 (4C - 5B)} \right]$$

$$\gamma'' = 2C \frac{4C - 3B}{9B - 8C} pr$$

Другим путем к этому решению пришел Горячев [3]. Условие $\lambda = 0$ выполнено, в частности, если тело не имеет жидкого заполнения. При этом $A < B + C$, $B < A + C$. Это совместно с (5.1) дает

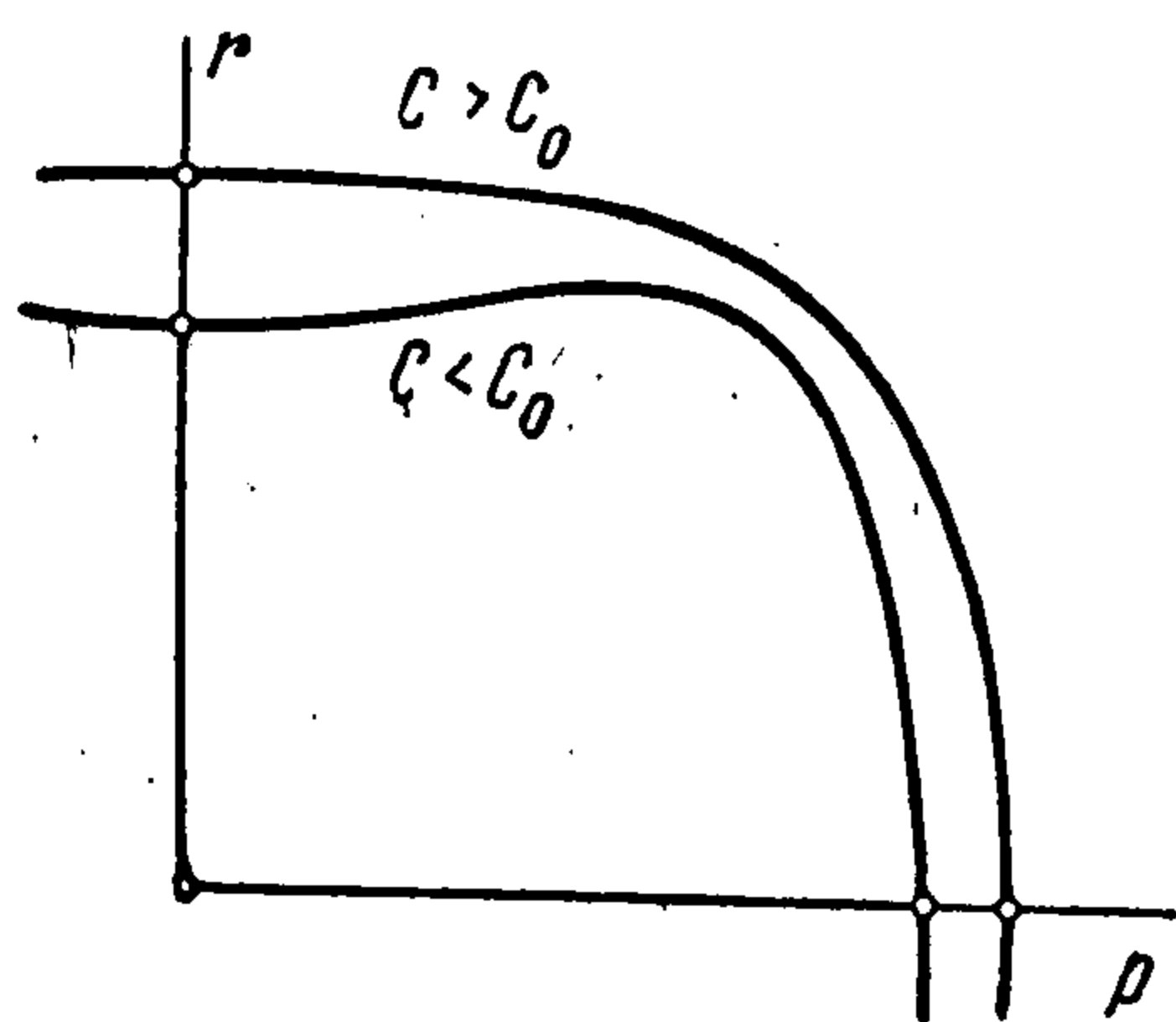
$$0.375 B < C < B \quad (5.6)$$

Из (2.10) и (5.2) получаем $k = 0$, $H = -\Gamma$. Знак в последнем соотношении выбран из тех соображений, что при $H = \Gamma > 0$ из (5.3) следует $0.5 B < C < 0.75 B$, а при этом

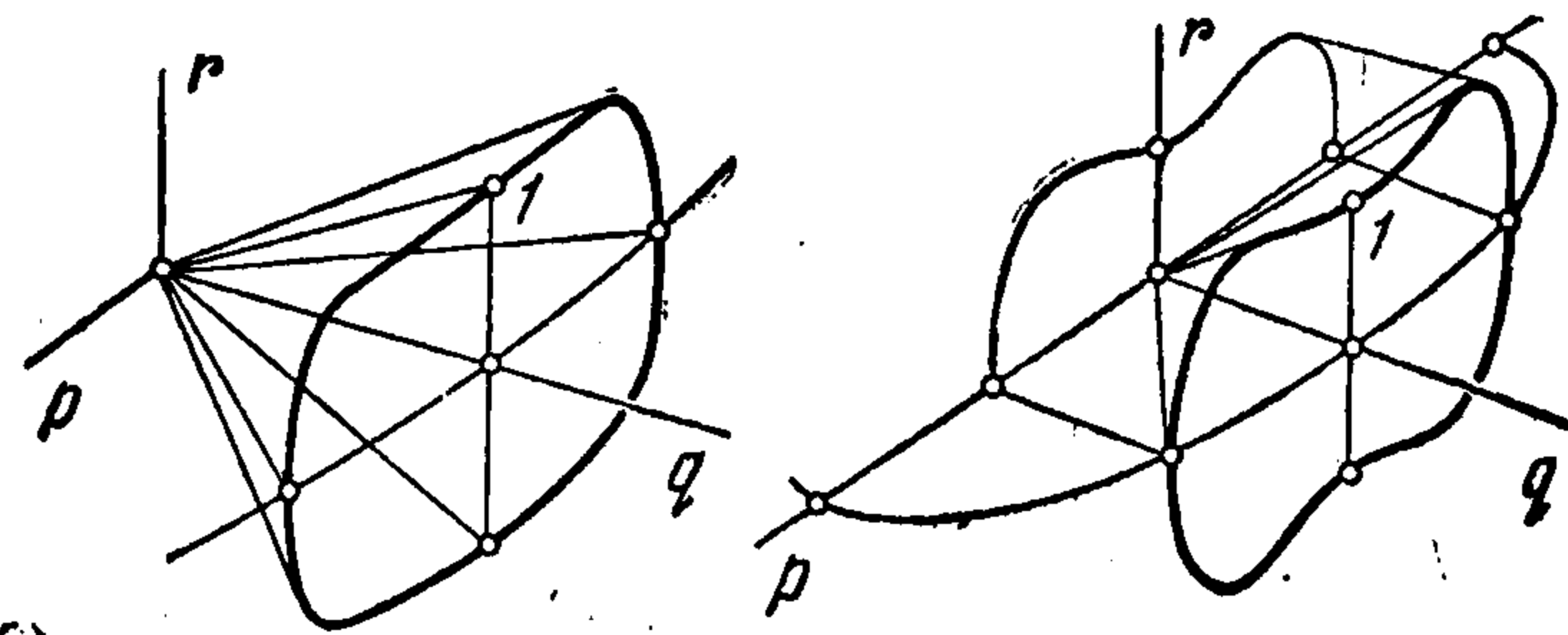
все слагаемые правой части (5.4) отрицательны. Требование, чтобы при $H = -\Gamma$ величины p, q, r , удовлетворяющие соотношениям (5.3), (5.4), были действительными, приводит к сужению интервала (5.6).

$$0.375 B < C < 0.5 B \quad (5.7)$$

Из (5.1), (5.7), заключаем, что $B > A > C$, т. е. центр тяжести тела находится на средней оси эллипсоида инерции.



Фиг. 1



Фиг. 2

Отнесем компоненты угловой скорости к величине $\sqrt{\Gamma/C}$ и введем безразмерный параметр $c = C/B$. Вследствие (5.7)

$$0.375 < c < 0.5 \quad (5.8)$$

Вводя новую переменную σ и вспоминая обозначения (1.3), запишем решение (5.3) — (5.5) в безразмерном виде

$$p = \frac{9-8c}{2(3-4c)} \sqrt{\sigma}, \quad q = \frac{2c}{3-4c} \sqrt{\sigma^\circ - \sigma}, \quad r = 2 \left(\frac{5-4c}{\sigma^\circ} (\sigma_0 - \sigma) (\sigma_1 + \sigma) \right)^{1/2} \quad (5.9)$$

$$v_1 = -1 + 4 \frac{6-15c+8c^2}{3-4c} \sigma - 2 \frac{5-4c}{\sigma^\circ} \sigma^2$$

$$v_2 = 2 \frac{5-4c}{\sigma^\circ} \left(\frac{2}{5-4c} - \sigma \right) \sqrt{\sigma (\sigma^\circ - \sigma)}, \quad v_3 = -2 \left(\frac{5-4c}{\sigma^\circ} \sigma (\sigma_0 - \sigma) (\sigma_1 + \sigma) \right)^{1/2} \quad (5.10)$$

Здесь

$$\sigma^\circ = \frac{3-4c}{(3-2c)(1-2c)}, \quad \sigma_0 = \frac{R(c) + 9 - 28c - 16c^2}{2(5-4c)(3-2c)(1-2c)}$$

$$\sigma_1 = \frac{R(c) - 9 + 28c - 16c^2}{2(5-4c)(3-2c)(1-2c)}, \quad R(c) = \sqrt{(3-4c)(27-92c+96c^2-32c^3)}$$

В интервале (5.8)

$$0 < \sigma_0 < \sigma^\circ, \quad 0 < \sigma_1 \quad (5.11)$$

Зависимость σ от времени получим, подставив (5.9) в уравнение (1.7), предварительно преобразованное к безразмерным переменным

$$d\sigma / d\tau = \sqrt{\sigma (\sigma_0 - \sigma) (\sigma^\circ - \sigma) (\sigma_1 + \sigma)} \quad (\tau = t \sqrt{(5-4c)\Gamma/B\sigma^\circ c}) \quad (5.12)$$

Из (5.12) заключаем, что σ — эллиптическая функция времени. Изменяясь в пределах

$$0 \leq \sigma \leq \sigma_0 \quad (5.13)$$

она переходит от одного граничного значения к другому за конечный промежуток времени.

§ 6. Кинематическое истолкование. Движение тела, имеющего неподвижную точку, может быть представлено качением без скольжения неизменно связанной с телом кривой (подвижного годографа угловой скорости) по неподвижной в пространстве кривой (неподвижному годографу угловой скорости).

В случае, рассмотренном в предыдущем параграфе, подвижный годограф описывается уравнениями (5.9). Это линия пересечения эллиптического цилиндра

$$q^2 + \frac{16c^2}{(9-8c)^2} p^2 = \frac{4c^2}{(3-4c)(3-2c)(1-2c)}$$

с цилиндром четвертого порядка

$$r^2 = \frac{8c}{3-4c} + 16 \frac{(3-4c)(9-28c+16c^2)}{(9-8c)^2} p^2 - 64 \frac{(3-4c)^3(5-4c)(3-2c)(1-2c)}{(9-8c)^4} p^4 \quad (6.1)$$

Направляющая линия цилиндра (6.1) симметрична относительно осей p, r ; при $c > c_0 = 1/8(7 - \sqrt{13})$ эта кривая выпукла, при $c < c_0$ она имеет точки перегиба (фиг. 1). Соответствующие подвижные годографы изображены на фиг. 2.

Введем в неподвижном пространстве цилиндрическую систему координат ζ, ρ, α , направив ось ζ по орту v_i (см. (1.13)). Неподвижный годограф угловой скорости задается уравнениями [4]

$$\begin{aligned} \omega_\zeta &= pv_1 + qv_2 + rv_3, & \omega_\rho^2 &= p^2 + q^2 + r^2 - \omega_\zeta^2 \\ \omega_\rho^2 d\alpha &= (rv_2 - qv_3) dp + (pv_3 - rv_1) dq + (qv_1 - pv_2) dr \end{aligned}$$

Внесем сюда (5.9), (5.10)

$$\omega_\zeta = \frac{\sqrt{\sigma}}{3-4c} \left[-\frac{9-8c}{2} + 2c(5-4c)\sigma + (5-4c)(3-2c)(1-2c)\sigma^2 \right] \quad (6.2)$$

$$\omega_\rho^2 = k_0 + k_1\sigma - k_2\sigma^2 + k_3\sigma^3 - k_4\sigma^4 - k_5\sigma^5 \quad (6.3)$$

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{\Pi(\sigma)}{n\omega_\rho^2(\sigma) \sqrt{(\sigma_0 - \sigma)(\sigma^\circ - \sigma)(\sigma_1 + \sigma)}} \quad (6.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{4c(6-15c+8c^2)}{(3-4c)(3-2c)(1-2c)}, & k_1 &= 4 \frac{27-120c+159c^2-64c^3}{(3-4c)^2} \\ k_2 &= 2 \frac{(5-4c)(18-81c+96c^2-32c^3)}{(3-4c)^2}, & k_3 &= \frac{(5-4c)(27-96c+80c^2-16c^3)}{(3-4c)^2} \\ k_4 &= 4c \frac{(5-4c)^2(3-2c)(1-2c)}{(3-4c)^2}, & k_5 &= \frac{(5-4c)^2(3-2c)^2(1-2c)^2}{(3-4c)^2} \end{aligned}$$

$$n = (3-4c) \sqrt{(3-4c)(5-4c)(3-2c)(1-2c)}$$

$$\Pi(\sigma) = n_0 - n_1\sigma - n_2\sigma^2 - n_3\sigma^3 + n_4\sigma^4 \quad (6.5)$$

$$n_0 = 2c \frac{27-69c+48c^2-8c^3}{(3-2c)(1-2c)}, \quad n_1 = 3c \frac{(5-4c)(8c-3)(7-16c+8c^2)}{(3-2c)(1-2c)}$$

$$n_2 = 3(5-4c)(-18+107c-176c^2+80c^3)$$

$$n_3 = (5-4c)(3-2c)(1-2c)(63-172c+96c^2)$$

$$n_4 = 3(5-4c)^2(3-2c)^2(1-2c)^2$$

Неподвижный годограф (6.2) — (6.4) расположен на поверхности вращения, меридиан которой задан уравнениями (6.2), (6.3).

При построении этого меридиана учтем, что в интервале (5.13)

$$\omega_\zeta(0) = 0, \quad \omega_\zeta(\sigma_*) = 0, \quad \min \omega_\zeta(\sigma) = \omega_\zeta(\sigma^*) < 0, \quad 0 < \sigma^* < \sigma_* < \sigma_0$$

причем

$$\sigma_* = \{ \sqrt{27 - 96c + 110c^2 - 40c^3} - c \sqrt{2(5 - 4c)} \} \{ (3 - 2c)(1 - 2c) \sqrt{2(5 - 4c)} \}^{-1}$$

$$\sigma^* = \{ \sqrt{135 - 480c + 590c^2 - 232c^3} - 3c \sqrt{2(5 - 4c)} \} \{ (5(3 - 2c)(1 - 2c) \sqrt{2(5 - 4c)})^{-1} \}$$

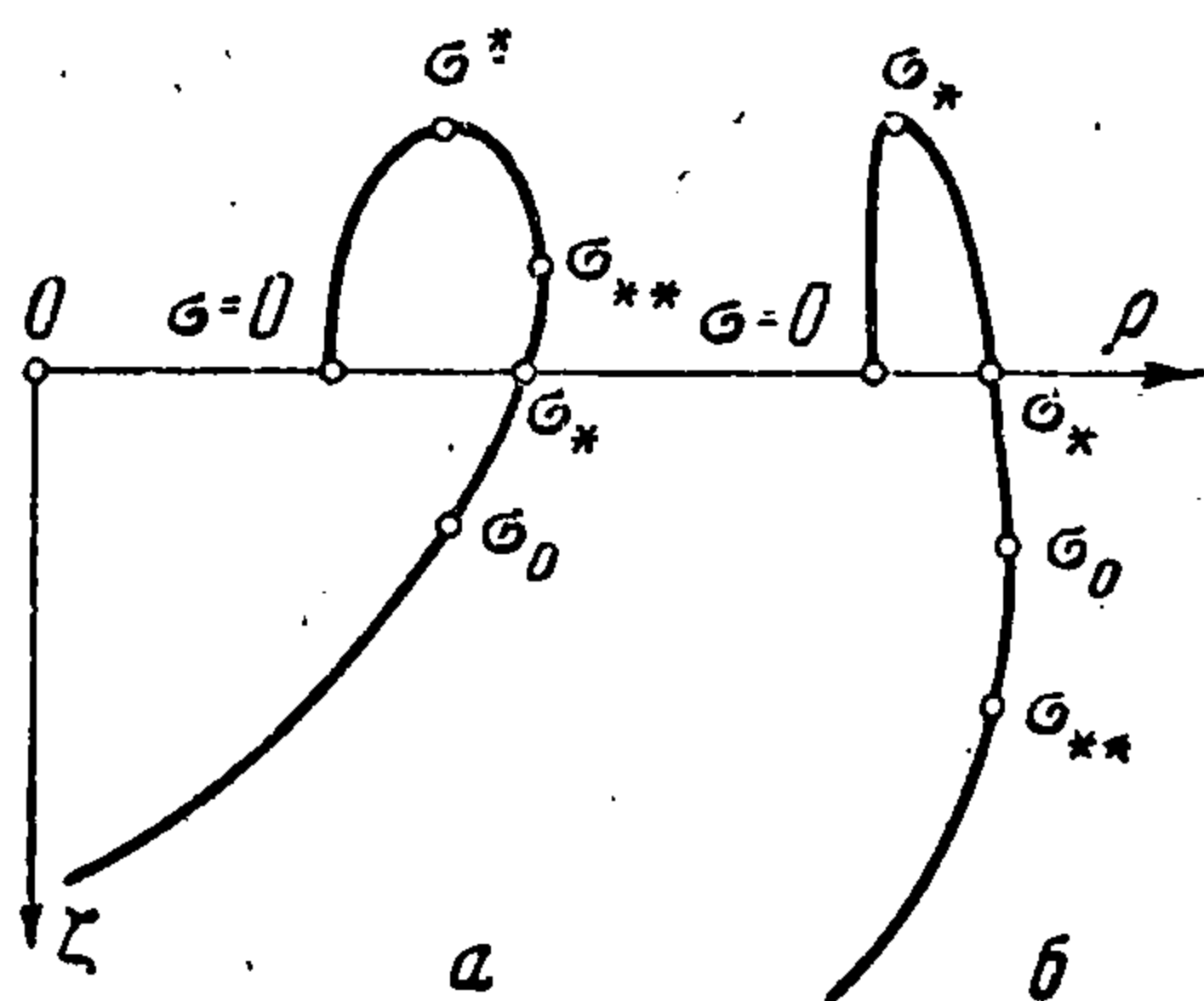
Величина угловой скорости минимальна на левом конце интервала (5.13) и максимальна при

$$\sigma = \sigma_{**} = (171 - 460c + 256c^2) \{ 32(5 - 4c)(3 - 2c)(1 - 2c) \}^{-1}$$

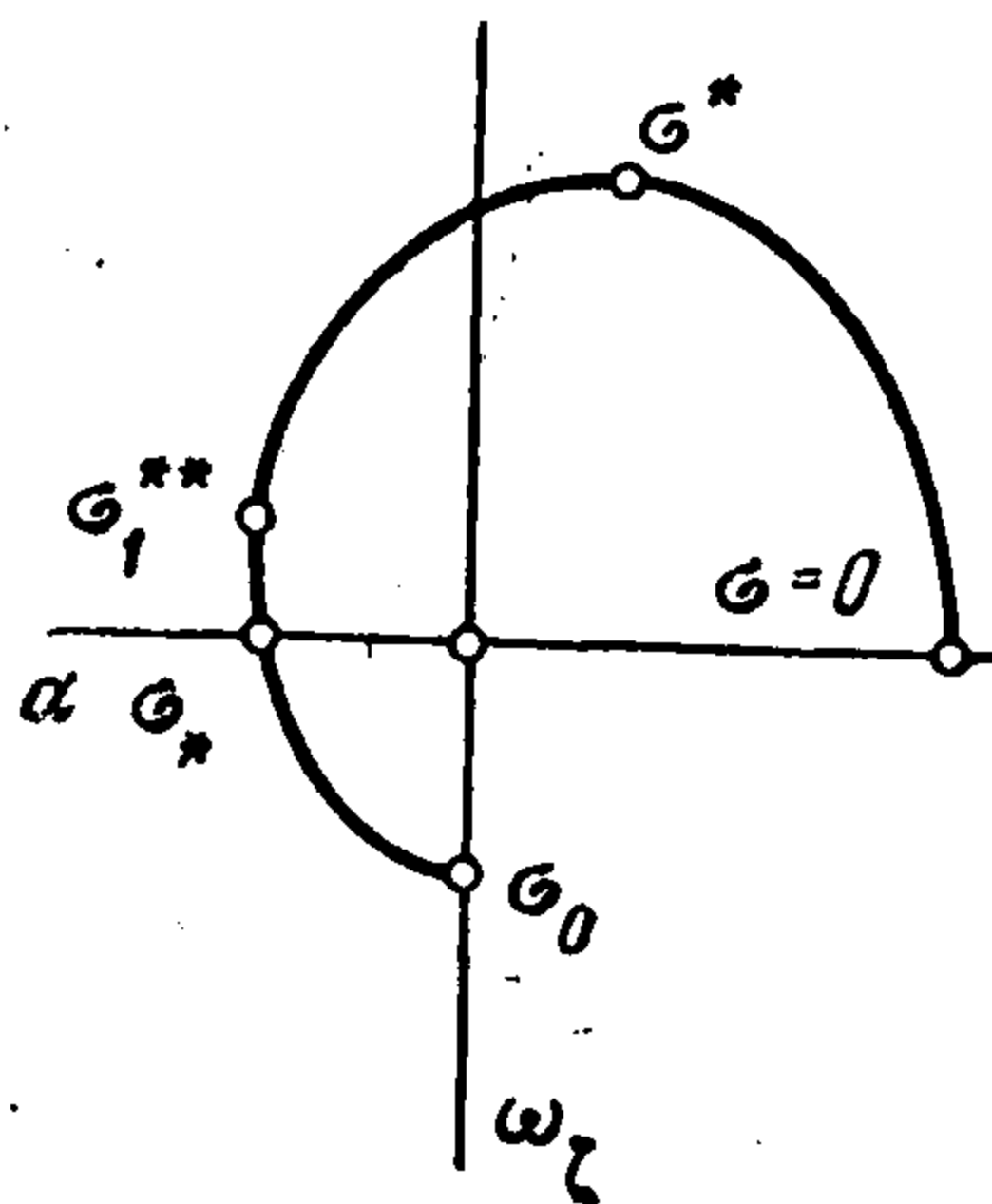
$$\sigma_{**} < \sigma_* \text{ при значениях } c, \text{ близких к } 0.375 \quad (6.6)$$

$$\sigma_{**} > \sigma_0 \text{ при значениях } c, \text{ близких к } 0.5 \quad (6.7)$$

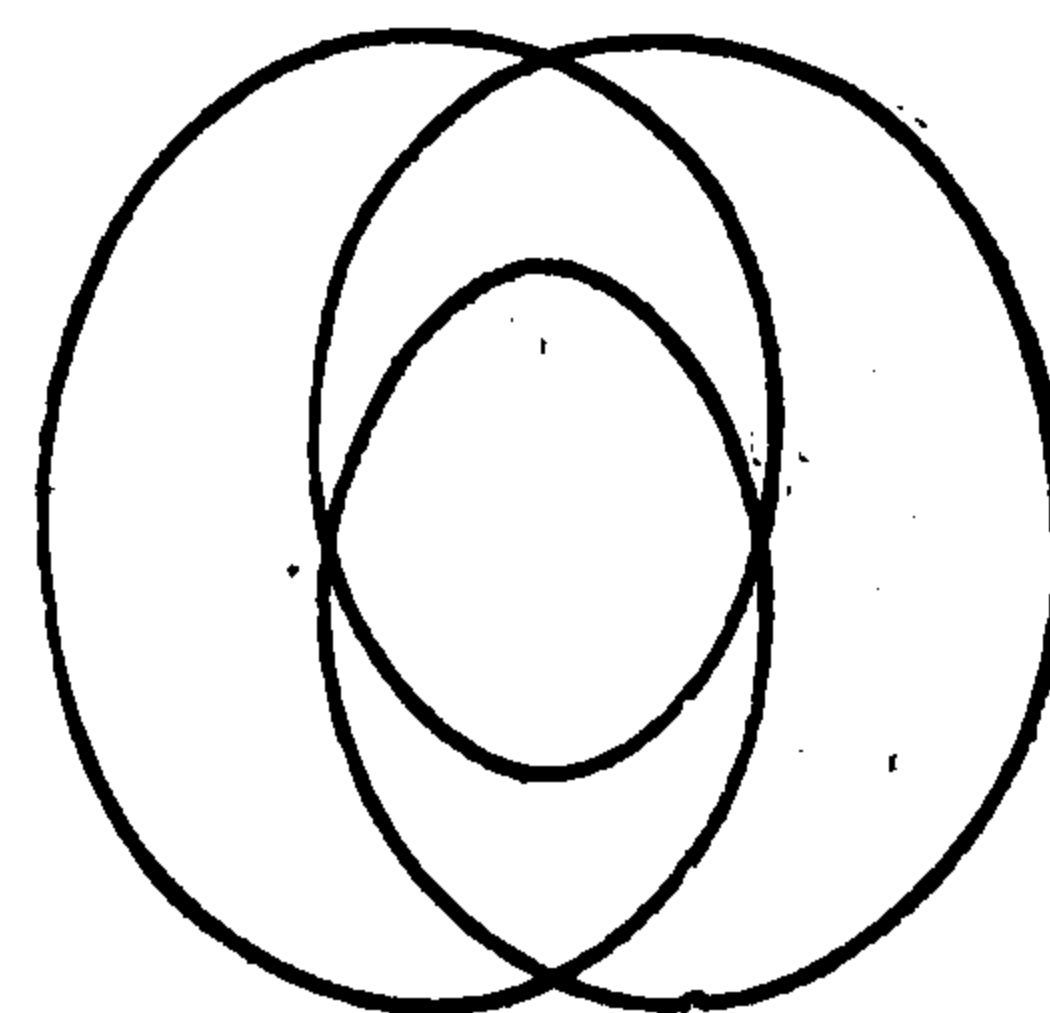
На фиг. 3 изображена часть меридиана, соответствующая положительному знаку у радикала, входящего в (6.2). При изменении знака радикала получаем остальную



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

часть меридиана — она симметрична кривой, изображенной на фиг. 3, относительно оси ρ . Фиг. 3, а, соответствует случаю (6.6), а 3, в, — случаю (6.7).

В интервале (5.8) величины n_i положительны, и, следовательно число перемен знака в ряду коэффициентов многочлена (6.5) равно двум, поэтому число положительных корней этого многочлена не больше двух, а так как $\Pi(0) > 0$ и

$$\Pi(\sigma_0) = - (5 - 4c)(3 - 2c)(1 - 2c)(\sigma^0 - \sigma_0)(\sigma_1 + \sigma_0) \times \\ \times \{ 2c + (5 - 4c)(3 - 2c)(1 - 2c)\sigma_0^2 \} < 0$$

то в интервале (5.13) имеется только один корень. Обозначим его σ^{**} :

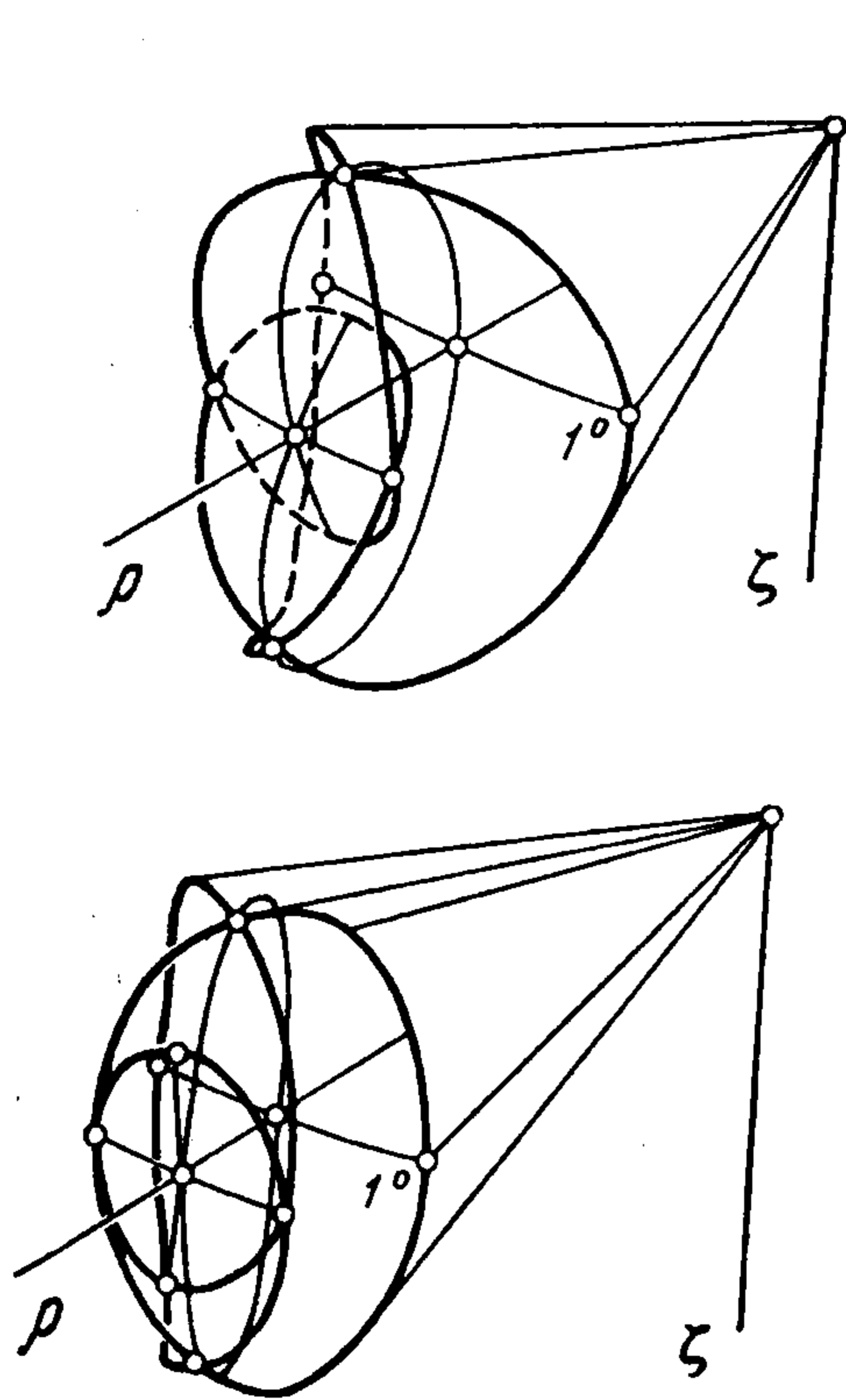
$$\Pi(\sigma^{**}) = 0, \quad 0 < \sigma^{**} < \sigma_0$$

Из (5.11), (5.13) следует, что радикал $\sqrt{(\sigma^0 - \sigma)(\sigma_1 + \sigma)}$ не изменяет знака в интервале (5.13); пусть этот радикал положителен. Момент $\sigma = 0$ считаем начальным. Из (5.12), (5.13) заключаем, что в моменты времени, близкие к начальному, $d\sigma/d\tau > 0$, а следовательно, знаки радикалов $\sqrt{\sigma}$ и $\sqrt{\sigma_0 - \sigma}$ одинаковы, для определенности — положительные.

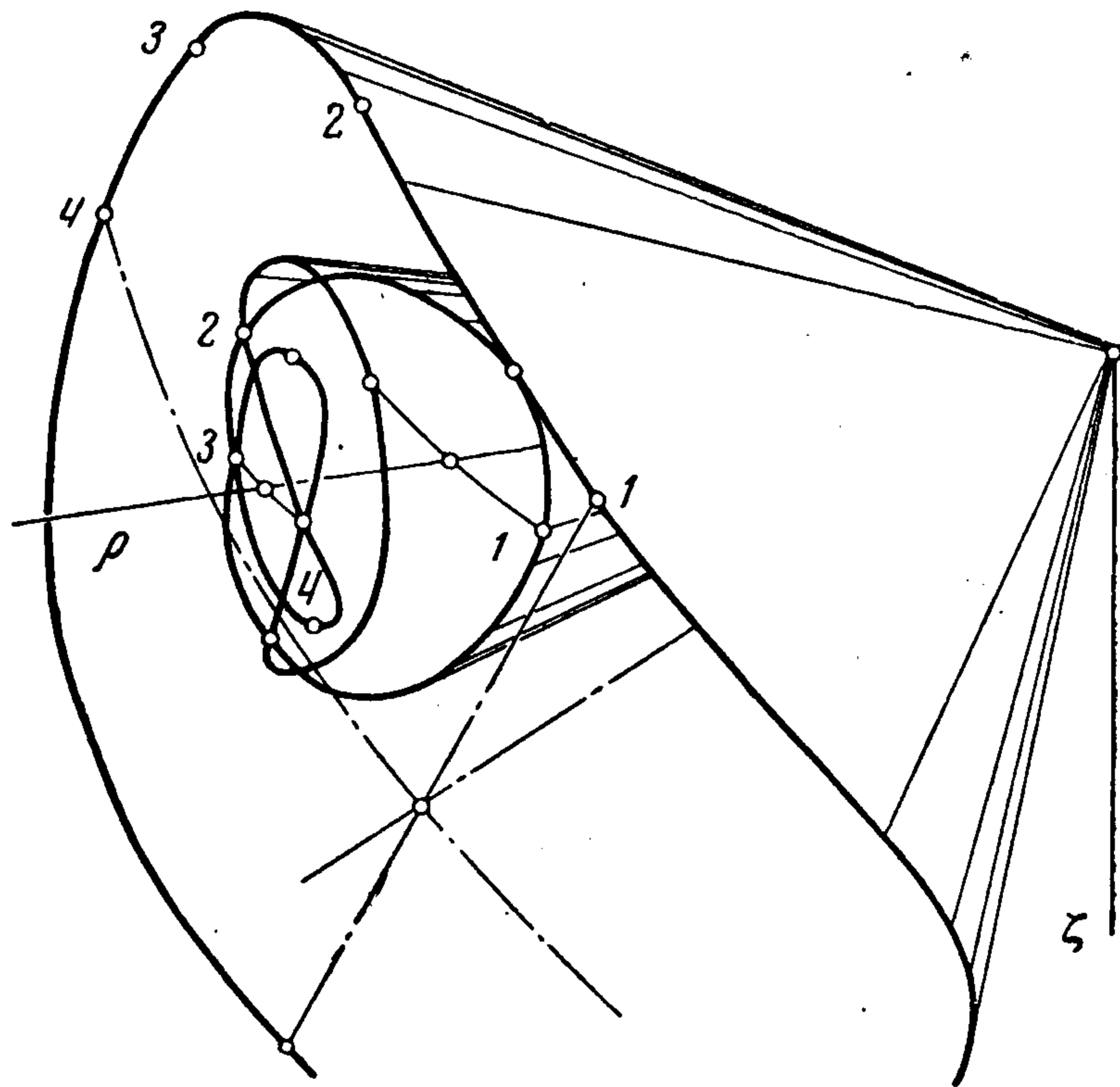
Рассмотрим кривую (6.2), (6.4). При возрастании σ переменная ω_ζ убывает от нуля до минимального значения $\omega_\zeta(\sigma^*)$, затем возрастает до значения $\omega_\zeta(\sigma_0)$, обращаясь в нуль при $\sigma = \sigma_*$. Угол α при этом возрастает, достигая максимума при $\sigma = \sigma^{**}$, затем убывает до значения $\alpha(\sigma_0)$. Соответствующая часть исследуемой кривой изображена на фиг. 4.

При $\sigma = \sigma_0$ радикал $\sqrt{\sigma_0 - \sigma}$ изменяет знак, и $d\sigma/d\tau$ становится отрицательной, σ убывает от σ_0 до нуля. Часть кривой, соответствующая этому этапу, симметрична изображенной на фиг. 4 относительно вертикали, проходящей через точку, определяемую значением σ_0 . При дальнейшем изменении σ от нуля до σ_0 , а затем от σ_0 до нуля получим остальную часть кривой (фиг. 5). Переносим ее на поверхность вращения, меридиан которой изображен на фиг. 3, получаем неподвижный годограф, указанный на фиг. 6.

Из (5.9), (5.10) устанавливаем, что $p = 0$, $v_1 = -1$, $v_2 = v_3 = 0$ при $\sigma = 0$. И, следовательно, в начальный момент ось p вертикальна, центр тяжести находится над точкой опоры, конец вектора угловой скорости совпадает с точкой 1 подвижного



Фиг. 6



Фиг. 7

годографа (фиг. 2). Соответствующая точка неподвижного годографа имеет тот же номер (фиг. 6). В последующем движении тела при обкатывании подвижного годографа по неподвижному, приходят в соприкосновение точки этих кривых, обозначенных соответственно цифрами 2, 3, 4 и т. д. (фиг. 7).

Поступила 29 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. С т е к л о в В. А. Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Тр. Отд. физ. наук Об-ва люб. естеств., 1899, т. 10, вып. 1.
2. К о w a l e w s k i N. Eine neue particuläre Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt. Math. Ann. 1908, Bd. 65.
3. Г о р я ч е в Д. Н. Новое частное решение задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Тр. Отд. физ. наук Об-ва люб. естеств., 1899, т. 10, вып. 1.
4. Х а р л а м о в П. В. Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
5. Х а р л а м о в П. В. Об уравнениях движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
6. Х а р л а м о в П. В. Об уравнениях движения гиростата. Тр. Казанской конф. по устойчивости движения и аналитической механике, 1962.
7. Х а р л а м о в П. В. Два частных решения задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 2.
8. К у з ь м и н П. А. Дополнение к случаю В. А. Стеклова движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. ПММ, 1952, т. 16, вып. 2.