НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К РАБОТЕ Р. Л. САЛГАНИКА «ОБ ОЦЕНКЕ ОШИБКИ, СОВЕРШАЕМОЙ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ ТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ К УРАВНЕНИЯМ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ» (ПММ, 1964, Т. 28, ВЫП. 1)

И. И. Ворович

(Ростов-на-Дону)

1. В вышеозначенной работе дается оценка асимптотической погрешности перехода от трехмерных задач теории упругости к двумерным в случае плоского напряженного состояния. При этом автор утверждает, что данная им оценка не может быть улучшена. На основе этих результатов предпринимается попытка объяснить, почему в некоторых случаях [1] последующие члены асимптотики оказываются весомее предыдущих. Однако сама оценка и особенно утверждение об ее неулучшаемости могут служить причиной недоразумений в этом важном вопросе. В связи с этим целесообразно разобрать некоторые положения работы [2].

Для простоты рассмотрим конечную плиту, ограниченную плоскими гранями Г и криволинейным цилиндром Г* с замкнутой направляющей γ. В [2] предполагается, что Г свободны от напряжений, а на Г* задан вектор перемещений, причем[1]

$$u_\alpha^* \big|_\Gamma = \varphi_\alpha(\xi_1, \xi_2) \qquad (\alpha = 1, 2) \tag{1}$$

$$u_3^* \big|_\Gamma = 0 \tag{2}$$

Приближенное решение трехмерной задачи берется в виде

$$u_\alpha = u_{\alpha 0} + \frac{\lambda}{3(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial \theta_0}{\partial \xi_\alpha} P_2(\xi_3), \qquad u_3 = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \theta_0 P_1(\xi_3) \qquad \left(\theta_0 = \frac{\partial u_{\alpha 0}}{\partial \xi_\alpha}\right) \tag{3}$$

где $u_{\alpha 0}$ — решение задачи о плоском напряженном состоянии, соответствующее условиям (1). Оценивая разности $\delta u_i = u_i - u_i^*$, автор полагает известными решения задач для u_i и u_i^* и продолжает гладко эти векторы в некоторую окрестность Г* так чтобы δu_i сводились к нулю на расстоянии порядка 1 от Г*, а грани Г остались бы свободными от напряжений. Теперь легко видеть, что

$$\delta u_i(P) = \int_D G_{ik}(P, Q) f_k(Q)\, dQ \tag{4}$$

Здесь G_{ik} — тензор Грина для слоя, а f_k — линейная комбинация θ_0 и ее производных до третьего порядка включительно. Применяя к (4) неравенство Буняковского и учтя, что $G_{ik} = O(\ln \rho)$, Р. Л. Салганик выписывает следующую оценку:

$$\delta u_i = O(M \ln \Lambda\, \Lambda), \qquad M = \max\left\{\theta_0, \frac{\partial \theta_0}{\partial \xi_\alpha}, \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta}, \frac{\partial^3 \theta_0}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta \partial \xi_\gamma}\right\} \tag{5}$$

2. Прежде всего отметим, что не является очевидной возможность гладкой продолжимости векторов u_i, u_i^*, представляющих собою решение соответствующих краевых задач, за пределы области Ω, занятой плитой. О возможности таких продолжений см., например [3, 4]. Однако надо учитывать, что в рассматриваемом случае дело осложняется требованием отсутствия напряжений на Г у продолженного вектора.

[1] Все используемые ниже обозначения, если они не разъяснены специально, взяты из работы [1].

Допустим все же, следуя Р. Л. Салганику, что такое продолжение возможно, и обратимся к выводу (5). Более внимательный анализ показывает, что при подсчете порядка правой части относительно Λ в формуле (5) пропущен множитель Λ. В самом деле, используя неравенство Буняковского из (4), получаем

$$|\delta u_i| \leqslant \left\{\int\limits_D \sum_k |G_{ik}|^2 dQ\right\}^{1/2} \left\{\int\limits_D \sum_k |f_k|^2 dQ\right\}^{1/2} \tag{6}$$

Учтя далее, что $G_{ik} = O(\ln \rho)$, имеем

$$\left\{\int\limits_D \sum_k |G_{ik}|^2 dQ\right\}^{1/2} \sim \left(\int\limits_D \ln^2 \rho \, dQ\right)^{1/2} \sim \left(2\pi \int\limits_0^\Lambda \ln^2\rho \, \rho \, d\rho\right)^{1/2} = O(\Lambda \ln \Lambda) \tag{7}$$

Далее, так как все f_k ограничены в области интегрирования одной и той же постоянной M, то имеем очевидную оценку

$$\left\{\int\limits_D \sum_k |f_k|^2 \, dQ\right\}^{1/2} = O(M \cdot \Lambda) \tag{8}$$

Из (7), (8) вытекает оценка

$$\delta u_i = O(M\Lambda^2 \ln \Lambda) \tag{9}$$

вместо (5). Ошибочно также и утверждение о неулучшаемости полученных оценок. В самом деле, при доказательстве Р. Л. Салганик исходит из этого факта, что неравенство Буняковского обращается в равенство, если входящие в него функции отличаются числовым множителем. Таким образом, в рассматриваемых условиях оценка (9) может достигаться точно, если $f_k = \text{const}\ G_{ik}$. Однако последнее невозможно, по крайней мере, по двум причинам. Во-первых, по построению, f_k исчезают на расстоянии порядка 1 от Γ^*, а G_{ik} такими свойствами не обладает. Во-вторых, G_{ik} имеет внутри Ω известные особенности, в то время как f_k в области плиты голоморфны (ведь $u_{0\alpha}$ — решения плоской задачи теории упругости) и гладко продолжены вне плиты. Таким образом, утверждение об окончательности оценок типа (9) отпадает.

Обратим внимание на тот факт, что оценки типа (9) (если еще учесть утверждение автора об их неулучшаемости) могут создать впечатление, что погрешность гипотезы о плоском напряженном состоянии в определении перемещений бесконечно возрастает, когда $h \to 0$. В действительности, для такого утверждения нет оснований, так как оценка (9) завышена. Детальное исследование [5, 6] случая изгиба плиты показывает, что напряженное состояние при свободных от напряжений Γ можно представить символически в виде

$$H = H_1 + H_2, \qquad H_1 = \sum_{k=p}^{\infty} H_{1k}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\Lambda^{-k}$$

$$H_2 = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\Lambda\gamma_m n} \sum_{k=p}^{\infty} b_{mk}(\xi_1, \xi_2)\, a_m(\xi_3)\Lambda^{-k} \qquad (\sin 2\gamma_m + 2\gamma_m)\frac{\sin \gamma_m}{\gamma_m^2} = 0 \tag{10}$$

В (10) значение H_{1k}, b_{mk} — плавные функции координат, n — расстояние по внутренней нормали. Любой член асимптотики (10) можно выписать, если γ и внешняя нагрузка бесконечно дифференцируемы. Такой случай имеет место в [1]. Разложения па (10) могут быть получены и для перемещений в условиях [2].

При этом $p = 0$. В случае, если γ и $u_\alpha(\xi_1, \xi_2)$ дифференцируемы лишь конечное число раз, разложение (10) может быть оборвано с соответствующей оценкой.

Из вышеизложенного вытекает, что: при исследовании погрешности плоского напряженного состояния надо учитывать дифференциальные свойства γ и заданных на Γ^* перемещений u_i; кроме того, оценка погрешности будет существенно разная: рассматриваются ли замкнутые области, не имеющие общих точек с Γ^*, или же рассматриваются области, выходящие на Γ^*. Эти обстоятельства игнорируются в работе [2]. Можно только догадываться, что γ и $u_\alpha|_{\Gamma^*}$ должны быть здесь достаточно гладкими. В самом деле, $u_{\alpha 0}$, являясь решением системы уравнений плоской задачи теории упругости, имеют у Р. Л. Салганика в замкнутой плоской области, ограниченной γ, непрерывные производные четвертого порядка. Это возможно, если γ и $u_\alpha|_{\Gamma^*}$ достаточно гладкие. Так, в силу самых последних результатов в этом вопросе [7] величина γ должна принадлежать Ω_4, а u_α — классу H $(4, A, \sigma)$. Определение Ω_4 и H $(4, A, \sigma)$ см., например, в работе [8]. Используя метод, развитый в (5), можно установить, что в этом случае $\delta u_i = O(1)$ в замкнутой области, занятой пластиной. Если допустить, что γ и $u_\alpha|_\Gamma$ имеют более сильные дифференциальные свойства, то можно в асимптотике выписать большее число членов. Отметим в заключение, что оценка остаточного члена в этом случае может, по-видимому, включать члены вида $\Lambda^{-t} \ln \Lambda$; $t > 0$. Однако такая оценка может быть получена в связи с достаточно тонкими характеристиками дифференциальных свойств γ и $u_\alpha|_{\Gamma^*}$. Эти характеристики должны, например, различать функции, принадлежащие к одному и тому же классу Гёльдера.

Поступила 26 X 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Н и г у л У. К. О приближенном учете краевых эффектов типа Сен-Венана в задачах статики плит. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
2. С а л г а н и к Р. Л. Об оценке ошибки, совершаемой при переходе от точных уравнений теории упругости к уравнениям плоского напряженного состояния. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
3. Ф и х т е н г о л ь ц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. I. Физматгиз, 1958, стр. 587—599.
4. В а с и л ь к о в с к и й В. В., М ы ш к и с А. Д. О продолжении непрерывно дифференцируемых функций. Успехи матем. наук, 1962, т. 17, вып. 5, стр. 107.
5. А к с е н т я н О. К., В о р о в и ч И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, 1964, т. 27, вып. 6.
6. А к с е н т я н О. К., В о р о в и ч И. И. Об определении концентрации напряжений на основе прикладной теории. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
7. А г м о н С., Д у г л и с А. и Н и р е н б е р г Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений частных производных при общих граничных условиях. Изд. иностр. литер., 1962.
8. Г ю н т е р Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. Гостехиздат, 1953.

Исправление к статье «Одна теорема динамики» (ПММ, 1964, т. 28, вып. 6, стр. 1138)

В моей заметке «Одна теорема динамики» в формуле (9) допущена принципиальная ошибка, делающая основной результат работы — формулу (12) — в общем случае неверным.

Приношу благодарность Б. А. Смольникову и Т. Р. Харитоновой, указавшим мне на эту ошибку.

А. И. Лурье
