# ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В. М. Ентов

(Москва)

При нестационарной фильтрации сжимаемой жидкости распределение давления описывается квазилинейным уравнением параболического типа. Известен ряд точных (автомодельных) решений этого уравнения, соответствующих специальным классам начальных и граничных условий. В общем случае для отыскания эффективных решений используются приближенные методы, не имеющие, как правило, строгого обоснования или оценки погрешности.

В ряде случаев приближенные решения, весьма близкие к точным, можно получить, если распределение массовых скоростей фильтрации находить из решения линеаризованной задачи. Это имеет место как для фильтрации, следующей закону Дарси [1], так и для нелинейной фильтрации [2]. Линеаризация равносильна замене переменных коэффициентов в уравнениях фильтрации постоянными. Поэтому погрешность линеаризации, как и погрешность некоторых других приближенных методов, можно оценить, исследуя зависимость решений от коэффициентов уравнений. Теоремы сравнения, определяющие характер этой зависимости, были получены А. М. Пирвердяном для автомодельных решений [3, 4].

В предлагаемой работе рассматриваются теоремы сравнения для уравнений одномерной фильтрации без предположения об автомодельности. Наряду с этим рассмотрены оценки типа принципа максимума, позволяющие определить пределы изменения решения по начальным и граничным условиям. Полученные результаты используются для оценки точности линеаризованного решения уравнений фильтрации газа.

**1°. Зависимость решений от начальных и граничных условий.** Одномерная фильтрация сжимаемой жидкости в однородном пласте описывается системой

$$\frac{k\rho}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} = -\varphi(j), \qquad \frac{\partial(m\rho)}{\partial t} = -\frac{1}{x^s}\frac{\partial}{\partial x}(x^s j) \tag{1.1}$$

Здесь $p$ — давление, $\rho$ — плотность, $\mu$ — вязкость жидкости, $k$ — проницаемость, а $m$ — пористость породы, $j$ — массовая скорость фильтрации, $s+1$ — размерность пространства.

Функция $\varphi$ выражает закон фильтрации и по своему физическому смыслу монотонно возрастает и нечетна. Для фильтрации по закону Дарси $\varphi(j) \equiv j$.

Введем новые переменные: функцию Лейбензона $P(p)$ и $q = -x^s j$ (мгновенный массовый расход через единичный угол координатной поверхности $x = \text{const}$). В новых переменных система (1.1), (1.2) примет вид

$$(A)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial x} = \varphi(q/x^s) && \left(P(p) = \int_0^p \frac{k\rho}{\mu}\,dp\right) \\ &\frac{\partial P}{\partial t} = \varkappa(P)\frac{1}{x^s}\frac{\partial q}{\partial x}, && \varkappa(P) = \left(\frac{d(m\rho)}{dP}\right)^{-1} > 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Из уравнений (1.2) можно исключить $q$. Получающееся при этом уравнение для случая изотермической фильтрации совершенного газа, подчиняющегося закону Дарси, исследовано в работе [5]. Для него доказаны принцип максимума и монотонная зависимость от начальных и граничных условий. В дальнейшем эти результаты были обобщены в работе [6], где доказано существование и единственность решения основных задач и исследованы свойства решений уравнения нестационарной фильтрации газа. Если предположить достаточную гладкость решения, то принцип максимума и монотонную зависимость от начальных и граничных условий можно доказать и для системы уравнений (1.2).

Доказательство можно провести методами, использованными в работе [7] для линейных уравнений параболического типа.

Для задачи, рассматриваемой в прямоугольнике $D$ $(0 < a < x < b,\ 0 < t < T)$, справедливы следующие утверждения (через Г обозначена граница прямоугольника $D$ без верхнего основания $t = T$, $a < x < b$):

1.1. Если $P|_\Gamma \geqslant 0$, то $P \geqslant 0$ всюду в $D^\circ$ $(a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$

1.2. Если $q|_\Gamma \geqslant 0$, то $q \geqslant 0$ всюду в $D^\circ$.

1.3. Пусть функция $\psi$, обратная к $\varphi$, удовлетворяет условию Липшица, а при $y \geqslant \eta > 0$ ($\eta$ — произвольное число) $\varphi'(y) \leqslant N_\eta < \infty$. Тогда для функции $P$ справедлив принцип максимума: если $m \leqslant P|_\Gamma \leqslant M$, то $m \leqslant P \leqslant M$ всюду в $D^\circ$.

1.4. Пусть функция $\varkappa(P)$ удовлетворяет условию Липшица. Предположим, что функции $P_1$ и $P_2$ удовлетворяют системе (1.2) и условию

$$(P_1 - P_2)_\Gamma \geqslant 0 \tag{1.3}$$

Тогда, если

$$\left|\frac{\partial P_2}{\partial t}\right| < Mt^{-r}, \qquad r < 1$$

то всюду в $D^\circ$

$$P_1 - P_2 \geqslant 0 \tag{1.4}$$

В неравенствах (1.3) и (1.4) можно знаки изменить на противоположные.

1.5. Если коэффициенты системы (1.2) удовлетворяют условиям

$$0 < \eta \leqslant \varphi'(j) \leqslant N_1 < \infty, \qquad |\varkappa'(P)| \leqslant N < \infty$$

то из $m \leqslant q|_\Gamma \leqslant M$ следует $m \leqslant q \leqslant M$ всюду в $D^\circ$.

Приведенные теоремы позволяют грубо оценивать решение по начальным и граничным условиям.

2°. Теоремы сравнения. Рассмотрим функции $P_1$ и $q_1$, удовлетворяющие системе того же вида, что и система ($A$) уравнений (1.2), но с некоторым другим коэффициентом $\varkappa_1(P_1)$. Эту систему будем называть системой ($B$). Вычитая из уравнений системы ($B$) соответствующие уравнения системы ($A$), получим

$$\frac{\partial(P_1 - P)}{\partial x} = \varphi(q_1 / x^s) - \varphi(q / x^s) \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial(P_1 - P)}{\partial t} = \frac{\varkappa_1(P_1)}{x^s}\frac{\partial(q_1 - q)}{\partial x} + \frac{\varkappa_1(P_1) - \varkappa(P)}{x^s}\frac{\partial q}{\partial x} \tag{2.2}$$

Найдем условия, при которых $P_1 - P_2 \geqslant 0$ всюду в замкнутом прямоугольнике $D^\circ$ Для этого рассмотрим функцию $U_1 = (P_1 - P)\,e^{-\alpha t}$. Предположим, что она имеет минимум в некоторой точке $(x_1, t_1) \in D_*$ (через $D_*$ обозначен прямоугольник $D^\circ$ без участка границы Г). Используя уравнения (2.1) и (2.2), легко убедиться, что в точке минимума

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = \frac{\varkappa_1(P_1)}{x^s\,\varphi'(q / x^s)}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + e^{-\alpha t}\,\frac{\varkappa_1(P_1) - \varkappa(P_1)}{x^s}\frac{\partial q}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\varkappa(P_1) - \varkappa(P)}{x^s}\,e^{-\alpha t}\,\frac{\partial q}{\partial x} - \alpha U_1 \tag{2.3}$$

Предположим, что в $D_*$

$$0 \leqslant \partial q / \partial x \leqslant N < \infty, \qquad \varkappa(P) \leqslant \varkappa_1(P) \tag{2.4}$$

и что функция $\varkappa(P)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|\varkappa(P_1) - \varkappa(P_2)| \leqslant C\,|P_1 - P_2| \tag{2.5}$$

Выберем $\alpha > CN / a^s$. Используя уравнение (2.3) и то, что в точке минимума $\partial U_1 / \partial t \leqslant 0$, $\partial^2 U_1 / \partial x^2 \geqslant 0$, можно убедиться, что $U_1(x_1, t_1) \geqslant 0$.

Отсюда следует следующее утверждение.

*Теорема* 2.1. Если выполнены условия (2.4), (2.5) и

$$(P_1 - P)\,|_\Gamma \geqslant 0 \tag{2.6}$$

то $P_1 - P \geqslant 0$ всюду в $D°$.

Действительно, в противном случае при любом $\alpha$ функция $U_1$ имеет в $D_*$ отрицательный минимум, что противоречит доказанному выше.

Если во втором неравенстве (2.4), а также в неравенстве (2.6) изменить знаки на обратные, то утверждение теоремы, очевидно, также изменится на обратное. То же произойдет, если первое условие (2.4) заменить на

$$-\infty < -N \leqslant \partial q / \partial x \leqslant 0 \tag{2.7}$$

Вместо требования ограниченности производной $\partial q / \partial x$ можно потребовать, чтобы $|\partial q / \partial x| < N_1 t^{r-1}$, $r > 0$. Доказательство при этом сохраняется, достаточно $\exp(-\alpha t)$ заменить на $\exp(-\alpha t^r)$.

Теорема 2.1 имеет простой физический смысл. Если $\partial q / \partial x \geqslant 0$, то давление в каждой точке пласта возрастает, как это следует из уравнения (1.2). Величина полного прироста давления с начала процесса определяется начальным и граничным условиями и скоростью выравнивания возмущений, возрастая с ростом последней. Поэтому при сделанных предположениях увеличение $\varkappa(P)$, приводящее к ускорению выравнивания, увеличивает приращение давления.

Во многих задачах теории фильтрации на границе области задается не давление, а расход. Используя тот же метод доказательства, можно также и в этом случае получить некоторые теоремы сравнения. При этом, так как расход является функцией от $\partial P / \partial x$, то приходится дифференцировать исходные уравнения и накладывать некоторые ограничения на производные функций $\varkappa(P)$ и $\varphi(j)$.

Будем сравнивать с системой $(A)$, систему $(C)$, определяемую функциями $\varphi_1(j_1)$ и $\varkappa_1(P_1)$. Пусть функции $P_1$ и $q_1$ удовлетворяют этой системе.

Дифференцируя второе уравнение системы (А) по $x$ и используя первое уравнение той же системы, получим

$$\varphi'\left(\frac{q}{x^s}\right)\frac{\partial q}{\partial t} = \varkappa(P)\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{s}{x}\frac{\partial q}{\partial x}\right) + \varkappa'(P)\,\varphi\left(\frac{q}{x^s}\right)\frac{\partial q}{\partial x} \tag{2.8}$$

Если записать аналогичное уравнение, следующее из системы $(C)$, и вычесть из него уравнение (2.8), то после некоторых преобразований находим

$$\begin{gathered}\varphi_1'(q_1/x^s)\,\frac{\partial(q_1-q)}{\partial t} + [\varphi_1'(q_1/x^s) - \varphi'(q/x^s)]\,\frac{\partial q}{\partial t} = \\ = \varkappa_1(P_1)\left[\frac{\partial^2(q_1-q)}{\partial x^2} - \frac{s}{x}\frac{\partial(q_1-q)}{\partial x} + \frac{\varkappa_1'(P_1)}{\varkappa_1(P_1)}\,\varphi_1(q_1/x^s)\times\right. \\ \left.\times\frac{\partial(q_1-q)}{\partial x}\right] + \varkappa_1(P_1)\left[\frac{\varkappa_1'(P_1)}{\varkappa_1(P_1)}\,\varphi_1(q_1/x^s) - \right. \\ \left. - \frac{\varkappa'(P)}{\varkappa(P)}\,\varphi(q/x^s)\right]\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\varkappa_1(P_1) - \varkappa(P)}{\varkappa(P)}\,\varphi'(q/x^s)\,\frac{\partial q}{\partial t}\end{gathered} \tag{2.9}$$

Предположим, что

$$\partial q / \partial t \geqslant 0, \qquad \partial q / \partial x \leqslant 0, \qquad q \geqslant 0 \tag{2.10}$$

$$0 < \varepsilon \leqslant \varphi_1'(q/x^s) \leqslant \varphi'(q/x^s) \leqslant N_\varphi < \infty \tag{2.11}$$

$$\varkappa_1(P_1) \geqslant \varkappa(P), \quad \varkappa_1'(P_1)/\varkappa_1(P_1) \leqslant \varkappa'(P)/\varkappa(P), \quad 0 \leqslant \varkappa'(P)/\varkappa(P) \leqslant N_\varkappa \tag{2.12}$$

и функция $\varphi'(j)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|\varphi'(j_1) - \varphi'(j_2)| \leqslant C_\varphi\,|j_1 - j_2| \tag{2.13}$$

Достаточно потребовать, чтобы условия (2.10) — (2.13) выполнялись для тех значений аргументов, которые могут встретиться в рассматриваемой задаче. Диапазон изменения этих значений может быть предварительно оценен при помощи теорем п. 1°. Предположим также, что $\partial q / \partial t$ и $\partial q / \partial x$ ограничены или имеют особенности вида $At^{r-1}$

*Теорема* 2.2. При условиях (2.10) — (2.13) и последующих из $|q_1 - q|_\Gamma \geqslant 0$ следует, что $q_1 \geqslant q$ всюду в $D°$.

Для доказательства достаточно рассмотреть функцию

$$U_2 = (q_1 - q) \exp(-\alpha t^r)$$

и при помощи соотношения (2.9) убедиться, что она не может иметь отрицательного минимума в $D_*$.

Используя различные комбинации знаков в неравенствах (2.10) — (2.12), можно получить различные видоизменения теоремы 2.2.

Условия теоремы 2.2 содержат большое число требований, накладываемых на функции, входящие в систему уравнений ($A$), и решения этой системы.

На примерах нетрудно убедиться, что требования монотонности решений и требования $\varkappa_1(P_1) \geqslant \varkappa(P)$ и $\varphi_1'(j) \leqslant \varphi'(j)$ существенны. В то же время, требование $\varkappa_1'(P_1) / \varkappa_1(P_1) \leqslant \varkappa'(P) / \varkappa(P)$ появляется из-за способа доказательства, оказывается чрезвычайно ограничительным и не выполняется в ряде важных случаев. Вместо него естественно было бы требовать малости $\varkappa_1'(P_1) / \varkappa_1(P_1)$ и $\varkappa'(P) / \varkappa(P)$.

Достаточный для ряда приложений результат получается, если ввести в рассмотрение функцию

$$U_3 = (q_1 V_{\beta_1} - q V_{-\beta}) e^{-\alpha t}, \qquad \beta_1 \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0 \tag{2.14}$$

Здесь через $V_\beta(x)$ обозначено решение уравнения

$$\frac{dV_\beta}{dx} = \frac{\beta}{x^s} V_\beta, \qquad V_\beta(a) = 1 \tag{2.15}$$

Очевидно, функция $V_\beta(x)$ положительна, монотонно возрастает при $\beta > 0$ и убывает при $\beta < 0$.

Тем же путем, как и выше, можно показать, что $U_3$ не имеет в $D_*$ отрицательного минимума, если выполнены условия (2.10) и условия

$$0 < \varepsilon \leqslant \varphi_1'(j_1) \leqslant \varphi'(j) \leqslant E < \infty \qquad \text{при } j \geqslant j_1 \tag{2.16}$$

$$\varkappa_1'(P_1) / \varkappa_1(P_1) < N_1, \qquad \varkappa'(P) / \varkappa(P) > -N$$

$$\varkappa_1(P_1) \geqslant \varkappa(P) \geqslant \eta \varkappa_1(P_1), \qquad \eta > 0 \tag{2.17}$$

а $\beta_1$ и $\beta$ выбраны из условий

$$\beta_1 = \max(\tfrac{1}{2} N_1 E Q_1, 0), \qquad Q_1 = \max q_1|_\Gamma \tag{2.18}$$

$$\beta = \max(\tfrac{1}{2} N E Q, 0, \beta^*), \qquad Q = \max q|_\Gamma \tag{2.19}$$

Здесь

$$\beta^* = \sqrt{\tfrac{1}{4} s^2 b^{2s-2} + \eta^{-1}\beta_1^2 - \eta^{-1}\beta_1 s b^{s-1}} - \tfrac{1}{2} s b^{s-1} \qquad (\beta_1 \geqslant s b^{s-1})$$

$$\beta^* = 0 \qquad (\beta_1 < s b^{s-1}) \tag{2.20}$$

*Теорема* 2.3. Если выполнены условия (2.10), (2.16), (2.17) и

$$(q_1 V_{\beta_1+\beta} - q)|_\Gamma \geqslant 0 \tag{2.21}$$

при $\beta_1$ и $\beta$, определяемых (2.18) — (2.20), то $(q_1 V_{\beta_1+\beta} - q) \geqslant 0$ всюду в $D°$.

Аналогично предыдущему можно, меняя знаки неравенств в условиях (2.10), (2.16) и (2.17), получить различные видоизменения теоремы 2.3.

При использовании теорем сравнения необходима монотонность хотя бы одного из сравниваемых решений. В случае линейной фильтрации при упругом режиме $\varkappa(P) = \mathrm{const}$, $\varphi(j) \equiv j$, так что система $(A)$ оказывается линейной с постоянными коэффициентами. Для производных решений такой системы справедлив принцип максимума, так как производные также удовлетворяют уравнению параболического типа.

Для общего случая системы $(A)$ можно доказать аналогичное утверждение.

*Теорема* 2.4. Пусть выполнены условия (1.5), а также условия

$$\partial q(x, 0) / \partial x \leqslant 0, \qquad q(a, t) = \Phi_a(t) \geqslant 0, \qquad q(b, t) = \Phi_b(t) \leqslant 0$$

$$\Phi_a'(t) \geqslant 0, \qquad \Phi_b'(t) \leqslant 0$$

Тогда $\partial q / \partial x \leqslant 0$ всюду в $D^\circ$.

Справедливо также утверждение с противоположными знаками неравенств.

3°. Пример применения теорем сравнения. А. М. Пирвердян оценил точность некоторых приближенных методов при помощи полученных им теорем сравнения [3, 4]. Используя теоремы п. 2°, можно получить дальнейшие результаты. В частности, удается оценить погрешность, возникающую при линеаризации уравнений фильтрации газа для плоско-радиального потока.

Рассмотрим плоско-радиальный приток газа к скважине радиуса $a$ в пласте радиуса $A$. Примем двучленный закон фильтрации

$$\varphi_1(j) = j + \gamma j^2, \qquad j \geqslant 0, \qquad \gamma = \mathrm{const} \geqslant 0 \tag{3.1}$$

Предположим, что функция $\varkappa_1(P_1)$ монотонно возрастает, как это имеет место для совершенного газа, $\varkappa_1'(P_1) \geqslant 0$. Пусть в пласте первоначально движение отсутствовало

$$q_1(x, 0) = 0, \qquad P_1(x, 0) = P_0 \tag{3.2}$$

а в момент $t = 0$ начался приток в скважину с расходом

$$q_1(a, t) = \Phi(t), \qquad \Phi'(t) \geqslant 0 \tag{3.3}$$

причем $\Phi(t)$ весьма быстро достигает постоянного значения $\Phi_0$. Такая задача имеет основное значение при обосновании методов исследования пласта по наблюдениям нестационарного притока. Удаленную границу пласта предположим непроницаемой

$$q_1(A, t) = 0 \tag{3.4}$$

При достаточно большом радиусе пласта $A$ условие (3.4) сказывается лишь при весьма больших временах, и на начальном участке может быть заменено другим.

Наряду с этим рассмотрим фильтрацию упругой жидкости, для которой $\varkappa_1 = \varkappa_1(P_0) = \mathrm{const}$, $\varphi(j) \equiv j$ при тех же начальных и граничных условиях. В силу теоремы 2.4 производная $\partial P_1 / \partial t \leqslant 0$, так что $P_1 \leqslant P_0$. Поэтому

$$\varkappa_1(P_1) \leqslant \varkappa_1(P_0) = \varkappa, \qquad \varkappa_1'(P_1) \geqslant 0, \qquad \varkappa'(P) = 0$$

$$\varphi_1'(j) = 1 + 2\gamma j \geqslant 1 = \varphi'(j) \tag{3.5}$$

и в силу теоремы 2.2

$$q_1(x, t) \leqslant q(x, t)$$

Для $q(x, t)$ при достаточно больших $t$ существует формула

$$q(x, t) = \Phi_0 \exp(-x^2/4\varkappa t) \qquad \text{при} \quad a^2/\varkappa \ll t \ll A^2/\varkappa \tag{3.6}$$

В дальнейшем рассматриваются именно такие времена, так что применима формула (3.6). При помощи оценки (3.5), закона фильтрации (3.1) и первого уравнения системы (А) получаем

$$P_1 \geqslant P_0 - \int\limits_x^\infty \left[\frac{q_1(x, t)}{x} + \gamma \frac{q^2(x, t)}{x^2}\right] dx - \frac{\Phi_0 t}{\pi A^2 m \varkappa (P_1(a, t))} \tag{3.7}$$

Заметим, что последний член в (3.7) обычно пренебрежимо мал.

Теперь можно получить, хотя и грубую, оценку снизу для $q_1(x, t)$ и сверху для $P_1$. Действительно, для промежутка времени $t \leqslant T$

$$q_1 \leqslant \Phi_0, \qquad \varkappa_1(P_1) \geqslant \varkappa_1(P_1(a, T))$$

Положим

$$\varkappa = \varkappa_* = \varkappa\ (P_1(a, T)), \qquad \varphi = (1 + 2\gamma\,\Phi_0/a)\,j \tag{3.8}$$

и обозначим через $q_*$ решение задачи с $\varkappa$ и $\varphi$ определяемыми соотношениями (3.8) и прежними граничными условиями. К функциям $q_1$ и $q_*$ применима теорема 2.2. Выбирая $\beta_1$ и $\beta$, как указано выше, имеем

$$(x / a)^{-\beta-\beta_1} q_*(x, t) \leqslant q_1(x, t) \tag{3.9}$$

(в рассматриваемом случае $s = 1$ и $V_\beta = (x / a)^\beta$).

Для $q_*$ опять можно указать явное решение, которое с достаточной точностью дается выражением

$$q_*(x, t) = \Phi_0 \exp\left[-\frac{x^2}{4\varkappa_*}\left(1+2\frac{\gamma\Phi_0}{a}\right)\right] \tag{3.10}$$

При обычном соотношении параметров $\beta_1 \sim 10^{-2}$. Поэтому $\beta$ можно положить равным нулю, а для $q_1$ получится оценка

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{-\beta_1} \exp\left(-\frac{x^2(1+2\gamma\Phi_0 / a)}{4\varkappa_* t}\right) \leqslant \frac{q_1(x, t)}{\Phi_0} \leqslant \exp\left(-\frac{x^2}{4\varkappa t}\right) \tag{3.11}$$

(Радиус пласта $A$ по-прежнему считаем весьма большим). Используя оценку (3.11), можно показать, что при достаточно больших $t$ имеет место формула

$$(P_0 - P_1) / \Phi_0 \sim i \ln t + \gamma\Phi_0 / a + C \tag{3.12}$$

Постоянная $C$ может содержать члены, слабо (логарифмически) зависящие от $\Phi_0$, а угловой коэффициент определяется формулой

$$i = {}^1/_2\,[1 - {}^1/_4\,\beta_1 \ln(A / a)] \tag{3.13}$$

с относительной точностью не хуже, чем ${}^1/_4\,\beta_1 \ln(A / a)$. Величина $A$ вошла в (3.13) лишь из-за требования $t \ll A^2 / \varkappa$, поэтому она может быть заменена любой другой, удовлетворяющей тому же неравенству для всех рассматриваемых времен. При обычных значениях параметров точность формулы (3.13) около одного процента.

Поступила 30 V 1964

## ЛИТЕРАТУРА


1. Баренблатт Г. И. О возможности линеаризации в некоторых задачах нестационарной фильтрации газа. Изв. АН СССР; ОТН, 1956, № 11.
2. Ентов В. М. О приближенном решении плоско-радиальных задач нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 4.
3. Пирвердян А. М. Об одном способе оценок приближенных решений уравнений нестационарной фильтрации жидкости и газа. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
4. Пирвердян А. М. Об оценках некоторых приближенных методов решения задач нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 5.
5. Баренблатт Г. И., Вишик М. И. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.
6. Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР, сер. матем., 1958, т. 22, № 5, стр. 667—704.
7. Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения параболического типа. Усп. матем. н., 1962, т. 17, № 3 (105), 3—146.