Подставляя в (19) выражения для φ, ψ и φ''' на границе области и учитывая (20), получим

$$\zeta(x, y, t) \sim \frac{Q\Gamma(^1/_3)\, g^{^2/_3}}{2\sqrt{3}\pi\rho\alpha^{^{11}/_3} t^4} \frac{(3-2\alpha)^{^{11}/_6}}{\alpha^{^1/_3}(1-\alpha)^{^{31}/_6}(2-\alpha)^{^1/_3}} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{\nu g^2\alpha(3-2\alpha)^2}{2a^4t^3(1-\alpha)^6}\right]\sin\frac{g\alpha(3-2\alpha)^{^1/_2}}{2\sqrt{2a}\,(1-\alpha)^{^3/_2}} \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1) \qquad (21)$$

Переход от параметра α к координатам точек на границе области возмущения (x, y) осуществляется по формулам (10).

Как известно, метод стационарной фазы применим к быстро колеблющимся функциям, поэтому приближение будет достаточно верным, если велика фаза в формуле (17), т. е. если $^1/_2 g / ac$ велико. Физически это означает, что приближение будет удовлетворительным на некотором расстоянии от точечного импульса.

Поступила 21 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Никитин А. К., Подрезов С. А. К пространственной задаче о волнах на поверхности вязкой жидкости. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
2. Стокер Дж. Волны на воде. Изд-во иностр. литер., 1959.
3. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. ОНТИ, М., 1936.

ДЛИННЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

И. П. Оборотов (Ростов-на-Дону)

При рассмотрении длинных волн на поверхности вязкой жидкости принято считать, что частота колебания и скорость распространения их определяются по формулам для идеальной жидкости. Коэффициент затухания при этом определяется из энергетических соображений.

Ниже рассматриваются уравнения движения для длинных волн в цилиндрической системе координат. Получены формулы для частоты колебания и коэффициента затухания, а также определены вид свободной поверхности, траектории частиц жидкости, компоненты скорости и давление.

Задача о цилиндрических волнах на поверхности вязкой жидкости конечной глубины сведена в работе [1] к решению уравнений

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial r} + \nu\left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right), \qquad \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \nu\Delta v_z^{(1)}$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p_1}{\partial \varphi} + \nu\left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right), \qquad \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z^1}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

$$\left(p_1 = p + \rho g z, \qquad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = 0, \quad -\frac{\partial p_1}{\partial t} + \rho g v_z + 2\mu\frac{\partial^2 v_z}{\partial z\,\partial t} = 0 \quad \text{при } z = 0 \qquad (2)$$

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = 0, \quad v_z = 0 \quad \text{при } z = -h \qquad (3)$$

Эти уравнения и граничные условия можно значительно упростить, если ввести обычные для длинных волн допущения [2].

Пренебрегая в третьем уравнении системы (1) силами инерции и вязкости, после интегрирования его найдем

$$p_1 = p_0 + \rho g\zeta \tag{4}$$

Здесь ζ — ордината свободной поверхности $z = \zeta(r, \varphi, t)$.

Исключая при помощи (4) давление из первых двух уравнений системы (1), тем самым введем в них новую неизвестную величину $\zeta = \zeta(r, \varphi, t)$. Так как $\partial\zeta / \partial t = v_z(r, \varphi, 0, t)$, то, умножив последнее уравнение системы (1) на dz и проинтегрировав его в пределах от $-h$ до 0, получим третье уравнение, содержащее те же самые неизвестные ζ, v_r и v_φ

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\frac{h}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_r^*) + \frac{\partial v_\varphi^*}{\partial\varphi}\right] \qquad \left(v_r^* = \frac{1}{h}\int_{-h}^{0} v_r\,dz,\ v_\varphi^* = \frac{1}{h}\int_{-h}^{0} v_\varphi\,dz\right) \tag{5}$$

При помощи последнего уравнения можно исключить ζ из первых двух. Кроме того, в силу принятых допущений в первых двух граничных условиях (2) можно пренебречь вторыми членами.

Проделав это, приведем задачу к решению уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_r}{\partial t^2} &= gh\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_r^*) + \frac{\partial v_\varphi^*}{\partial\varphi}\right] + \nu\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right) \\ \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial t^2} &= g\frac{h}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_r^*) + \frac{\partial v_\varphi^*}{\partial\varphi}\right] + \nu\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = 0, \quad \text{при } z = 0, \quad v_r = 0, \quad v_\varphi = 0 \quad \text{при } z = -h \tag{7}$$

Воспользовавшись методом Фурье, ищем решение системы (6) в виде

$$v_r = e^{kt}\cos n\varphi\,[J_{n-1}(ar) - J_{n+1}(ar)]\,Z_1(z), \quad v_\varphi = \frac{n}{r}e^{kt}\sin n\varphi J_n(ar)\,Z_2(z) \tag{8}$$

где a и n — заданные положительные числа, причем n — целое.

Подставляя это решение в (6) и воспользовавшись рекуррентными формулами для функций Бесселя, получим для определения функций Z_1 и Z_2 уравнения

$$Z_1'' - b^2 Z_1 = g\frac{a^2h}{k\nu}Z_1^*, \quad Z_2'' - b^2 Z_2 = -g\frac{2ah}{k\nu}Z_1^* \quad \left(b^2 = a^2 + \frac{k}{\nu}, \quad Z_1^* = Z_1(z^\circ)\right) \tag{9}$$

Решение системы (9) можно взять в виде

$$Z_1 = Ae^{bz} + Be^{-bz} - g\frac{a^2h}{k\nu b^2}Z_1^*, \qquad Z_2 = Ce^{bz} + De^{-bz} + g\frac{2ah}{k\nu b^2}Z_1^* \tag{10}$$

Воспользовавшись для определения произвольных постоянных A, B, C и D граничными условиями (7), получим

$$A = B = g\frac{a^2hZ_1^*}{2k\nu b^2\,\mathrm{ch}\,bh}, \qquad C = D = -g\frac{ah\,Z_1^*}{k\nu b^2\,\mathrm{ch}\,bh}$$

Подставляя выражения (10) для Z_1 и Z_2 в (8), получим

$$\begin{aligned} v_r &= g\frac{ha^2Z_1^*}{k\nu b^2}e^{kt}\cos n\varphi\,[J_{n-1}(ar) - J_{n+1}(ar)]\left(\frac{\mathrm{ch}\,bz}{\mathrm{ch}\,bh} - 1\right) \\ v_\varphi &= g\frac{2hanZ_1^*}{rk\nu b^2}e^{kt}\sin n\varphi J_n(ar)\left(1 - \frac{\mathrm{ch}\,bz}{\mathrm{ch}\,bh}\right) \end{aligned} \tag{11}$$

Для определения вертикальной проекции скорости воспользуемся последним уравнением (1), подставив в него вместо v_r и v_φ их значения (11) и проинтегрировав затем полученное выражение по z. Проделав выкладки, найдем

$$v_z = g\frac{2ha^3Z_1^*}{k\nu b^2}e^{kt}\cos n\varphi J_n(ar)\left(\frac{\mathrm{sh}\,bz + \mathrm{sh}\,bh}{b\,\mathrm{ch}\,bh} - z - h\right) \tag{12}$$

Вид свободной поверхности можно определить, проинтегрировав выражение (12) по времени, предварительно положив в нем $z = 0$. Проведя выкладки и выделяя действительную часть, получим

$$\zeta(r, \varphi, t) = Ne^{\vartheta t} J_n(ar) \cos n\varphi \sin(\sigma t + \varepsilon)$$

$$\left(N = \frac{2ha\,|Z_1^*|}{\sqrt{\vartheta^2 + \sigma^2}},\ \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\vartheta \operatorname{Re} Z_1^* + \sigma \operatorname{Im} Z_1^*}{\sigma \operatorname{Re} Z_1^* - \vartheta \operatorname{Im} Z_1^*},\ \vartheta + i\sigma = k\right) \tag{13}$$

Подставляя найденное значение ζ в (4), определим давление

$$p_1 = p_0 + \rho g N e^{\vartheta t} J_n(ar) \cos n\varphi \sin(\sigma t + \varepsilon)$$

Рассматривая свободную поверхность на достаточном расстоянии от начала координат, можно, ограничиваясь в асимптотической формуле для J_n первым членом, заменить (13) приближенным соотношением

$$\zeta(r, \varphi, t) \approx N\sqrt{2/\pi a r}\, e^{\vartheta t} \cos n\varphi \cos\left(ar - {}^1/_4\pi - {}^1/_2 n\pi\right) \sin(\sigma t + \varepsilon) \tag{14}$$

Из (14) видно, что с ростом r амплитуда колебаний убывает обратно пропорционально $\sqrt{r}$. Узловыми линиями свободной поверхности будут являться концентрические окружности с центром в начале координат, отстоящие друг от друга на расстоянии π / a, и радиусы, составляющие между собою углы π / n.

Траектории жидких частичек легко найти, если проинтегрировать выражения (11) и (12). Так как частицы совершают малые движения, то, используя тот же метод интегрирования, что и в [2], получим после ряда выкладок

$$r - r_0 = \mathrm{R} e^{\vartheta t} \sin(\sigma t + \varepsilon_1) + R_1, \qquad \varphi - \varphi_0 = n\Phi e^{\vartheta t} \sin(\sigma t + \varepsilon_2) + n\Phi_1$$

$$z - z_0 = K e^{\vartheta t} \sin(\sigma t + \varepsilon_3) + K_1 \tag{15}$$

Здесь $R, R_1, \Phi, \Phi_1, K, K_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — некоторые постоянные, а r_0, φ_0 и z_0 — координаты частички в положении равновесия. Из приведенных формул видно, что каждая частичка совершает затухающие колебания около своего равновесного положения.

Если во всех полученных выше формулах положить $n = 0$, то получим как частный случай решение осесимметричной задачи.

В формулах (11) и (12) для компонент скорости не определены еще числа $Z_1^* = Z_1(z^\circ)$ и k. Для определения z° положим $z = z^\circ$ в первой из формул (10), придя к соотношению

$$\operatorname{ch} bz^\circ = \operatorname{ch} bh \left(\frac{kvb^2}{gha^2} + 1\right) \tag{16}$$

Коэффициент k, как видно из формул (8), характеризует изменение движения с течением времени. Его можно определить, воспользовавшись тождеством

$$v_r(r, \varphi, z^\circ, t) = \frac{1}{h} \int_{-h}^{0} v_r(r, \varphi, z, t)\, dz \tag{17}$$

Подставляя в (17) вместо v_r его значение (11) и учитывая соотношение (16), получим после интегрирования уравнение

$$ga^2(\operatorname{th} bh - bh) = kvb^3 \tag{18}$$

которое и служит для определения $k = \vartheta + i\sigma$.

Это уравнение можно несколько упростить, если за неизвестное вместо k принять

$$\beta = bh = h\sqrt{a^2 + k / v} \tag{19}$$

Произведя такую замену, перепишем (18) в виде

$$\beta^3(\beta^2 - \alpha^2) v^2 + \alpha^2 g h^3 (\beta - \operatorname{th}\beta) = 0 \tag{20}$$

Уравнение (20) намного проще уравнения (2.4), полученного в работе [1] для определения того же неизвестного. Корни этого уравнения зависят от двух параметров. Параметр $\alpha = ah = 2\pi h / \lambda$ характеризует отношение глубины жидкости к длине волны и для длинных волн весьма мал. Параметр $gh^3\nu^{-2}$ характеризует отношение глубины жидкости к ее вязкости и может меняться в широких пределах.

Если $\beta = \gamma + i\delta$ — корень уравнения (20), то частота колебания σ и коэффициент затухания ϑ на основании зависимости (19) определяются по формулам

$$\sigma = 2\nu\gamma\delta h^{-2}, \qquad \vartheta = \nu\,(\gamma^2 - \alpha^2 - \delta^2)h^{-2} \tag{21}$$

из которых видно, что колебательное движение жидкости будет иметь место лишь в случае комплексных корней уравнения (20). Анализ численного решения этого уравнения при различных значениях параметров дал возможность прийти к заключению, что комплексные корни (20) существуют при выполнении условия $h^3(\nu\lambda)^{-2} \geqslant 4.84 \cdot 10^{-5}$ *сек²/см*. Отсюда можно сделать вывод, что для возникновения волн заданной длины в более вязкой жидкости необходима и большая глубина. Преобразуя это выражение к виду $\lambda \leqslant 143\, h^{3/2}\nu^{-1}$, приходим к заключению, что в жидкости данной глубины длина волны ограничена сверху, в то время как на волны в идеальной жидкости такого ограничения не налагается.

Рассмотрение таблиц решений уравнения (20) приводит также к выводу, что при $\alpha^2 gh^3\nu^{-2} \geqslant 3000$ корни этого уравнения имеют действительные части $\gamma \geqslant 5$. Так как $\operatorname{th} x = 1$ при $x \geqslant 5$ (с точностью до пяти значащих цифр), то в этом случае трансцендентное уравнение (20) можно заменить алгебраическим

$$\beta^3(\beta^2 - \alpha^2)\,\nu^2 + \alpha^2 gh^3(\beta - 1) = 0 \tag{22}$$

Считая в первом приближении жидкость идеальной, будем искать решение уравнения (22) в виде ряда

$$\beta = \beta_1 M + \beta_2 + \beta_3 M^{-1} + \ldots \qquad (M = \alpha^2 gh^3\nu^{-2}) \tag{23}$$

Подставляя решение (23) в уравнение (22) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях M, получим систему уравнений

$$\beta_1^5 + \beta_1 = 0, \qquad 5\beta_1^4\beta_2 + \beta_2 - 1 = 0, \qquad 5\beta_1^4\beta_3 + 10\beta_1^3\beta_2 - \alpha^2\beta_1^3 + \beta_3 = 0$$
$$5\beta_1^4\beta_4 + 10\beta_1^2\beta_2(\beta_2^2 + 2\beta_1\beta_3) - 3\alpha^2\beta_1^2\beta_2 + \beta_4 = 0, \ldots$$

решив которую, найдем

$$\beta_1 = {}^1/_2\sqrt{2}\,(1 + i), \qquad \beta_2 = -{}^1/_4,$$
$$\beta_3 = {}^1/_8\sqrt{2}\,(1 - i)(\alpha^2 - {}^5/_8), \qquad \beta_4 = {}^1/_8\, i\,({}^5/_4 - \alpha^2), \ldots$$

Подставляя полученные значения β_i в ряд (23) и воспользовавшись затем формулами (21), для коэффициента затухания ϑ и частоты колебания получим

$$\vartheta = -\left(\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}\nu^{\frac{1}{2}}g^{\frac{1}{4}}h^{-\frac{3}{4}}\lambda^{-\frac{1}{2}} + \frac{\nu}{4h^2} + \frac{2\pi^2\nu}{\lambda^2} + \ldots\right)$$
$$\sigma = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{gh} - \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}\nu^{\frac{1}{2}}g^{\frac{1}{4}}h^{-\frac{3}{4}}\lambda^{-\frac{1}{2}} - \ldots \tag{24}$$

Полагая в этих формулах $\nu = 0$, получим случай идеальной жидкости. Из последней формулы также видно, что частота колебания в вязкой жидкости меньше, чем в идеальной.

Поступила 15 X 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Оборотов И. П. Цилиндрические волны в вязкой жидкости. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 4.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Гостехиздат, 1948, стр. 495, 406.