

КОРАБЕЛЬНЫЕ ВОЛНЫ ПРИ РАВНОУСКОРЕННОМ ДВИЖЕНИИ

Р. А. Грунтфест (Ростов-на-Дону)

В настоящей работе рассматривается задача о волнах, создаваемых кораблем, движущимся в несжимаемой вязкой жидкости бесконечной глубины. Движение предполагается прямолинейным равноускоренным, без начальной скорости, хотя последнее не имеет принципиального значения. Для упрощения задачи действие корабля заменяется действием точечного импульса давлений.

В работе [1] было получено решение задачи о волнах на поверхности вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины, возникающих из состояния покоя под действием поверхностного давления $p_0(x, y, t)$; найдена формула для свободной поверхности

$$\zeta(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi\mu} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_0(u, v, \tau) G(t - \tau, r) du dv d\tau \quad (1)$$

$$G(r, t) \sim \frac{gvt^3}{4\sqrt{2}r^4} \exp\left(-\frac{vg^2t^5}{8r^4}\right) \sin \frac{gt^2}{4r}, \quad r = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$$

Начало координат взято на поверхности жидкости в положении равновесия, ось z направлена вертикально вверх.

Считая движение корабля направленным против оси x , получим в рассматриваемом случае для p_0

$$p_0(x, y, t) = Q\delta(y)\delta(x + 1/2at^2)$$

Здесь a — ускорение корабля, а Q — постоянная интенсивность импульса. Подставляя это выражение в (1), найдем искомый вид свободной поверхности

$$\zeta(x, y, t) \sim -\frac{Q}{2\pi\mu} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(v)\delta(u + 1/2a\tau^2) G(t - \tau, r) du dv d\tau$$

Используя свойства δ -функций, получим

$$\zeta(x, y, t) \sim -\frac{Qg}{8\sqrt{2}\pi\rho} \int_0^t \frac{(t-\tau)^3}{r^4} \exp\left(-\frac{vg^2(t-\tau)^5}{8r^4}\right) \sin \frac{g(t-\tau)^2}{4r} d\tau \quad (2)$$

$$r = \sqrt{(x + 1/2a\tau^2)^2 + y^2}$$

Сделаем замену переменных $\tau' = t - \tau$, $x' = x + 1/2at^2$, т. е. совместим начало координат с точечным импульсом, при этом началу координат соответствует время $t = 0$, а началу движения время t . Опуская в дальнейшем штрихи при τ и x , получим

$$\zeta(x, y, t) \sim -\frac{Qg}{8\sqrt{2}\pi\rho} \int_0^t \frac{\tau^3}{r^4} \exp\left(-\frac{vg^2\tau^5}{8r^4}\right) \sin \frac{g\tau^2}{4r} d\tau \quad (3)$$

$$r = \sqrt{(x - at\tau + 1/2a\tau^2)^2 + y^2} \quad (4)$$

Предполагая применить для нахождения интеграла (3) метод стационарной фазы, запишем его в виде

$$\zeta(x, y, t) \sim \int_0^t \psi(\tau) \sin \varphi(\tau) d\tau$$

$$\psi(\tau) = -\frac{Qg}{8\sqrt{2}\pi\rho} \frac{\tau^3}{r^4} \exp\left(-\frac{vg^2\tau^5}{8r^4}\right), \quad \varphi(\tau) = \frac{g\tau^2}{4r}$$

Находим

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{g}{4} \left(\frac{2\tau}{r} - \frac{\tau^2}{r^2} \frac{dr}{d\tau} \right) \quad (5)$$

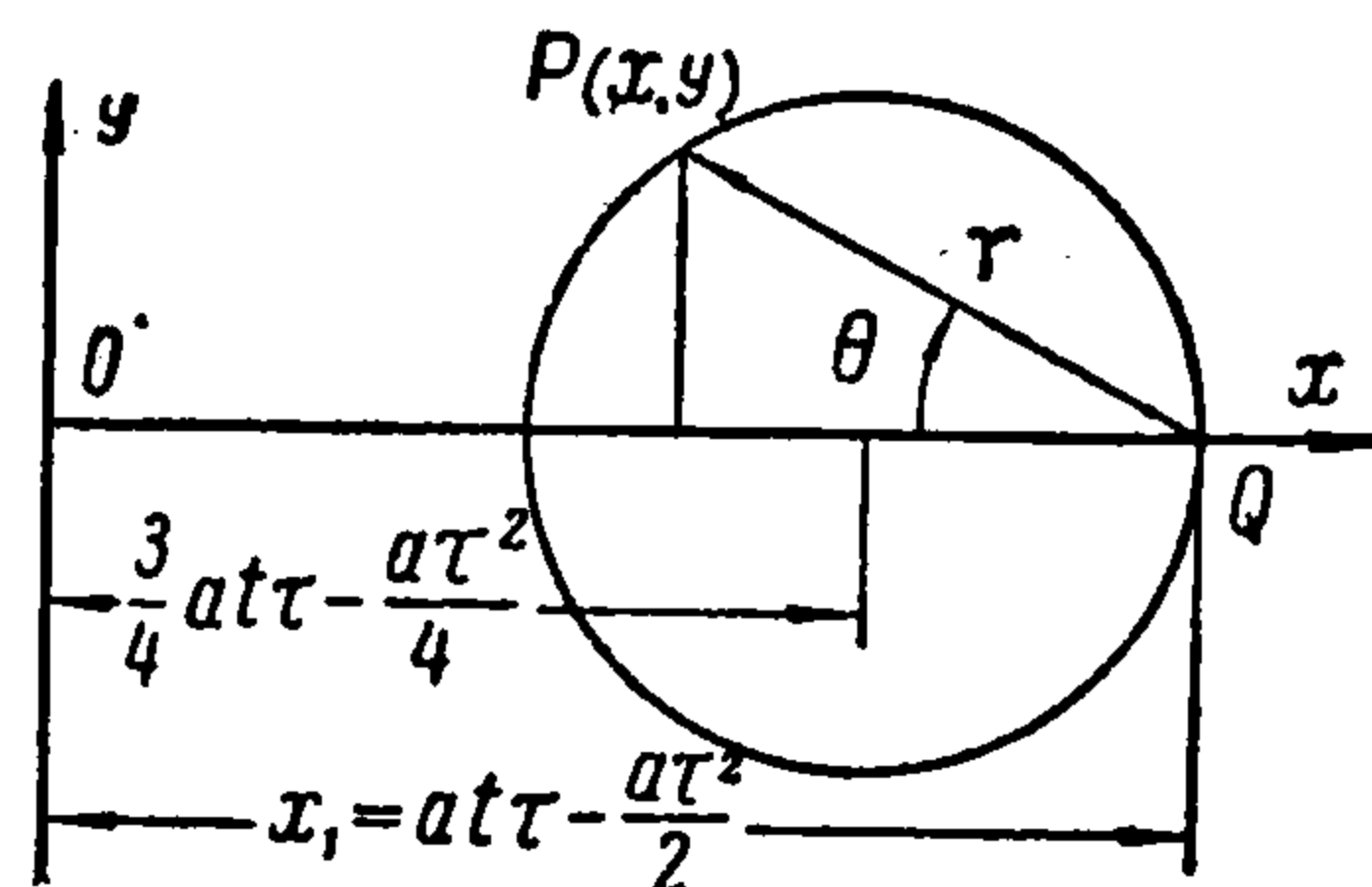
Условие стационарности фазы дает следующее соотношение

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{2r}{\tau} = a(t - \tau) \cos \theta \quad (6)$$

Здесь $dr/d\tau$ найдено согласно (4), при этом θ — угол между вектором r и отрицательным направлением оси x (фиг. 1). Выражение (6) удобнее записать в виде

$$r = 1/2 a \tau (t - \tau) \cos \theta \quad (7)$$

Смысл полученного соотношения состоит в том, что для определенной точки $P(x, y)$ оно дает те точки N_i на курсе корабля, которые будут единственными точками, участвующими в создании возмущения в точке P и которые, следуя Стокеру, назовем точками влияния. Соотношение (7) можно интерпретировать иначе: оно дает полярные координаты r, θ с полюсом в N_i всех точек, для которых N_i есть точка влияния в указанном выше смысле. Эти точки лежат на окружности диаметром $1/2 a \tau (t - \tau)$, центр которой находится на курсе корабля на расстоянии $3/4 a t \tau - 1/4 a \tau^2$ от начала координат (фиг. 1). Теперь очевидно, что возмущение, создаваемое кораблем, действует не на всю поверхность жидкости, а затрагивает лишь область, покрытую всеми окружностями влияния. Границей этой области будет огибающая однопараметрического семейства окружностей влияния. Запишем уравнение семейства указанных окружностей



Фиг. 1

$$(x - 3/4 a t \tau + 1/4 a \tau^2)^2 + y^2 = 1/16 a^2 \tau^2 (t - \tau)^2 \quad (0 \leq \tau \leq t) \quad (8)$$

Беря производную по параметру τ , получим

$$(x - 3/4 a t \tau + 1/4 a \tau^2) (a \tau - 3/2 a t) = 1/8 a^2 \tau (t - \tau) (t - 2\tau) \quad (9)$$

Отсюда находим

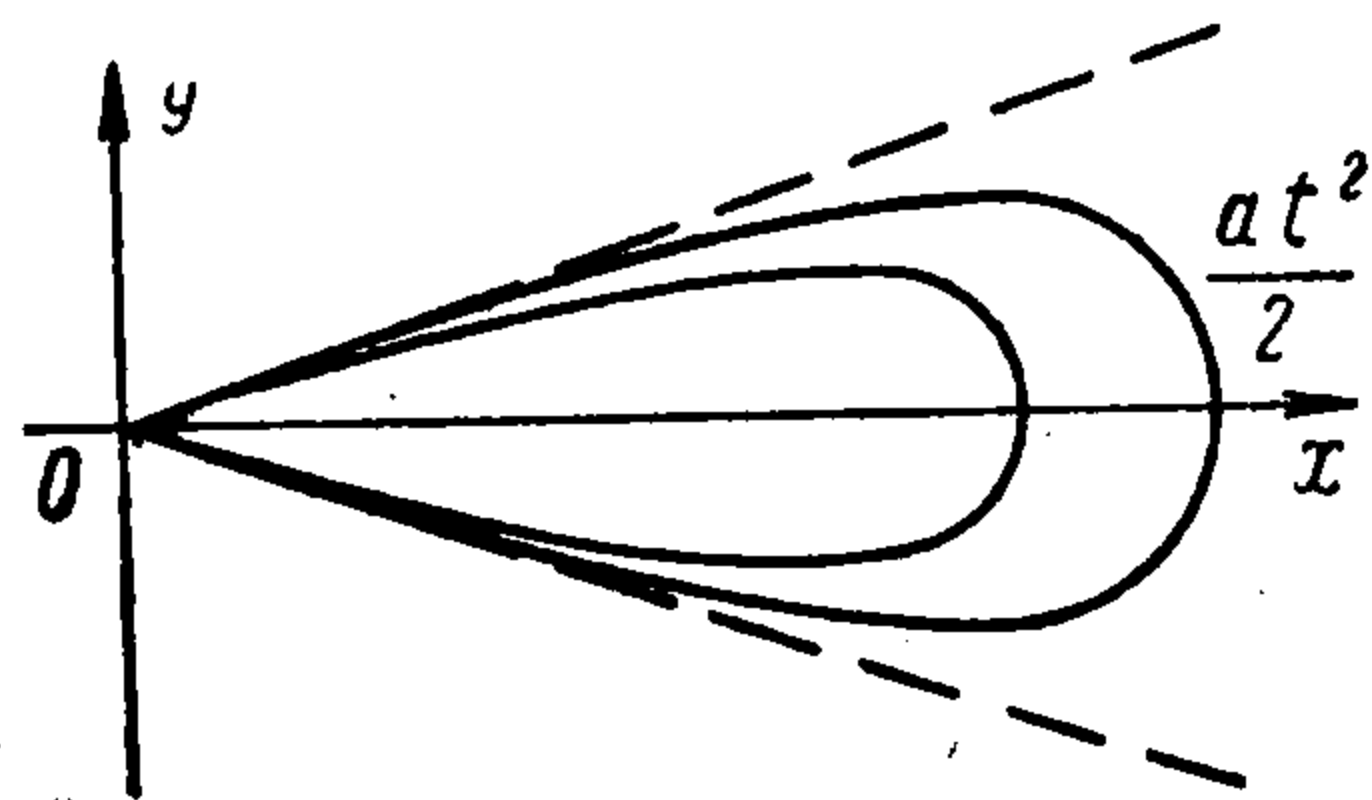
$$x = a t \tau \frac{4t - 3\tau}{6t - 4\tau}, \quad y^2 = \frac{a^2 \tau^2 (t - \tau)^3 t}{2 (3t - 2\tau)^2}$$

Введем вместо параметра τ , имеющего размерность времени, безразмерный параметр α соотношением $\tau = \alpha t, 0 \leq \alpha \leq 1$.

Получим уравнение границы области возмущения

$$x = \frac{a t^2}{2} \alpha \frac{4 - 3\alpha}{3 - 2\alpha}, \quad y = \pm \frac{a t^2}{2} \frac{\sqrt{2\alpha(1-\alpha)^{3/2}}}{3 - 2\alpha} \quad (10)$$

На фиг. 2 приведены границы для различных значений времени t (в подвижной системе координат). Пунктиром указана граница области возмущения при равномерном движении. Вычисления показывают, что угол раствора зоны возмущения не зависит от ускорения и времени и совпадает с соответствующим углом при равномерном движении. Но область теперь ограничена замкнутой кривой, изменяющейся со временем и подобной относительно начала координат с коэффициентом подобия $1/2 a t^2$.



Фиг. 2

Перейдем к построению кривых постоянной фазы. Координаты точек $P(x, y)$, в которых ищется возмущение, можно записать так:

$$x = OQ - r \cos \theta = a t \tau - 1/2 a \tau^2 - r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

Воспользовавшись условием (7), выразим x и y через r

$$x = a t \tau - \frac{a \tau^2}{2} - \frac{2r^2}{a \tau (t - \tau)}, \quad y = \pm r \left(1 - \frac{4r^2}{a^2 \tau^2 (t - \tau)^2} \right)^{1/2}$$

Определим геометрическое место точек, для которых фаза $\varphi = 1/4 g \tau^2 r^{-1} = \text{const.}$

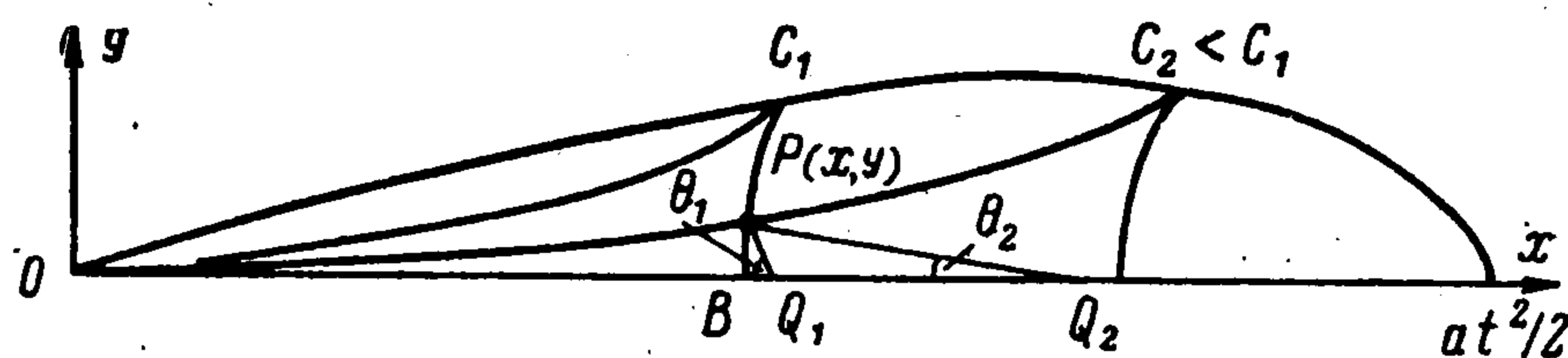
Выражая r через φ , получим уравнения кривых постоянной фазы

$$x = at\tau - \frac{a\tau^2}{2} - \frac{g^2\tau^3}{8a\varphi^2(t-\tau)}, \quad y = \pm \frac{g\tau^2}{4\varphi} \left[1 - \frac{g^2\tau^2}{4a^2\varphi^2(t-\tau)^2} \right]^{1/2}$$

Эти формулы можно упростить; введем величину $c = 1/2g/a\varphi$ и перейдем опять к безразмерному параметру α , получим

$$x = \frac{at^2}{2} \frac{\alpha}{1-\alpha} [\alpha^2(1-c^2) - 3\alpha + 2], \quad y = \pm \frac{at^2}{2} \frac{c\alpha^2}{1-\alpha} \sqrt{\alpha^2(1-c^2) - 2\alpha + 1} \quad (11)$$

Так как подкоренное выражение в последней формуле не должно быть отрицательным, то границы для изменения α определяются неравенством $0 \leq \alpha \leq (1+c)^{-1}$. Давая c какое-либо фиксированное значение и меняя α в указанных выше пределах, получим некоторую кривую постоянной фазы. Вид этих кривых дан на фиг. 3. Ясно видны



Фиг. 2

системы расходящихся и поперечных волн, как и при равномерном движении. Из (11) найдем

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{at^2}{2} \frac{[2\alpha^3(1-c^2) - 3\alpha^2(2-c^2) + 6\alpha - 2]}{(1-\alpha)^2}$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = \mp \frac{at^2}{2} \frac{c\alpha [2\alpha^3(1-c^2) - 3\alpha^2(2-c^2) + 6\alpha - 2]}{(1-\alpha)^2 \sqrt{\alpha^2(1-c^2) - 2\alpha + 1}} \quad (12)$$

Значениям $\alpha = \alpha_*$, для которых

$$M(\alpha, c) = \alpha^3(1-c^2) - 3\alpha^2(2-c^2) + 6\alpha - 2 = 0 \quad (13)$$

соответствуют особые точки кривых. Они лежат на границе области возмущения. Из построения видно также, что система расходящихся волн получается, когда α меняется в интервале $0 \leq \alpha < \alpha_*$, а поперечным волнам отвечают значения α в пределах $\alpha_* < \alpha \leq (1+c)^{-1}$.

Покажем, что кривые постоянной фазы ортогональны прямым, проведенным к соответствующим точкам влияния. Из уравнений (12) имеем

$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{c\alpha}{\sqrt{\alpha^2(1-c^2) - 2\alpha + 1}} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \quad (14)$$

Здесь использовано выражение (7), из которого следует

$$\operatorname{tg} \theta = \pm [\alpha^2(1-c^2) - 2\alpha + 1]^{1/2} (c\alpha)^{-1}$$

Равенство (14) означает, что кривые постоянной фазы действительно ортогональны прямым, проведенным к соответствующим точкам влияния (фиг. 3). Так как через каждую точку, лежащую внутри области возмущения (за исключением точек на курсе корабля), проходят две кривые постоянной фазы, то для каждой точки внутри области возмущения существуют две точки влияния. Отметим еще, что при $\alpha = (1+c)^{-1}$ будет $x = OB$ (фиг. 3), следовательно, по формуле (11)

$$x = \frac{at^2}{2(1+c)} = \frac{at^2}{2} \frac{2a\varphi}{g+2a\varphi}$$

Отсюда можно получить длину поперечных волн, так как разность фаз 2π соответствует длине волны

$$\lambda = \frac{at^2}{2} \frac{4\pi a g}{(g+2a\varphi)(g+4\pi a+2a\varphi)}$$

С удалением от начала координат фаза φ увеличивается от 0 до ∞ , поэтому длина поперечных волн не остается постоянной, как при равномерном движении, а уменьшается от значения $2\pi a^2 t^2 / (g + 4\pi a)$ до нуля. Соответственно скорость распространения поперечных волн, равная $(g\lambda/2\pi)^{1/4}$, уменьшается от значения $at (g/(g + 4\pi a))^{1/2}$ до нуля, т. е. всегда меньше скорости корабля в данный момент времени.

Изучим, наконец, амплитуду волн, применив метод стационарной фазы. Найдем для этого φ , ψ и $d^2\varphi/d\tau^2$ для таких значений r и θ , которые удовлетворяют условию стационарности (7).

Из выражений (5) и (6) находим

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = \frac{g}{2r} \left[1 + \frac{a\tau^2}{2r} \cos \theta - \frac{a^2 (t - \tau)^2 \tau^2 \sin^2 \theta}{2r^2} \right]$$

Здесь использована зависимость $\theta = \arctg y / (x_1 - x)$ (фиг. 1). Удобнее выразить $d^2\varphi/d\tau^2$ через параметры α и c , используя соотношения $\cos \theta = c\alpha (1 - \alpha)^{-1}$, $r = 1/2 at^2 c\alpha^2$; получим

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = \frac{g}{at^2} \frac{[2\alpha^3 (1 - c^2) - 3\alpha^2 (2 - c^2) + 6\alpha - 2]}{c^3 \alpha^4 (1 - \alpha)} \quad (15)$$

Заметим, что $\varphi''(\alpha, c) < 0$ при $0 \leq \alpha < \alpha_*$ и $\varphi''(\alpha, c) > 0$ при $\alpha_* < \alpha \leq (1 + c)^{-1}$. Вклад стационарной точки в интеграл (3) дается формулой [2,3]

$$\zeta(x, y, t) \sim \psi(\alpha, c) \left(\frac{2\pi}{|\varphi''(\alpha, c)|} \right)^{1/2} \left[\sin \left[\varphi(\alpha, c) \pm \frac{\pi}{4} \right] \right] \quad (16)$$

Здесь c, α — параметры, характеризующие [положение стационарной точки на курсе корабля для данной точки $P(x, y)$. Знак слагаемого $\pm 1/4\pi$ берется одинаковым со знаком $\varphi''(\alpha, c)$. Как отмечалось, каждой точке внутри области возмущения соответствуют две пары значений параметров c и α , которые удовлетворяют условию стационарности; одна пара $(c_1; \alpha_1)$ принадлежит к системе поперечных волн ($\varphi''(\alpha_1; c_1) > 0$, $\alpha_* < \alpha_1 \leq (1 + c)^{-1}$), другая пара $(c_2; \alpha_2)$ — к системе расходящихся волн ($\varphi''(\alpha_2; c_2) < 0$, $0 \leq \alpha_2 < \alpha_*$). В силу сказанного получим внутри области возмущения

$$\zeta(x, y, t) \sim - \frac{2Q \sqrt{g}}{\sqrt{\pi} \rho a^{1/2} t^4} \left[\frac{(1 - \alpha_1)^{1/2}}{\alpha_1^3 c_1^{5/2} M^{1/2}(\alpha_1; c_1)} \exp \left(- \frac{2vg^2}{a^4 t^3 c_1^4 \alpha_1^3} \right) \sin \left(\frac{g}{2ac_1} + \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\ \left. + \frac{(1 - \alpha_2)^{1/2}}{\alpha_2^3 c_2^{5/2} M^{1/2}(\alpha_2; c_2)} \exp \left(- \frac{2vg^2}{a^4 t^3 c_2^4 \alpha_2^3} \right) \sin \left(\frac{g}{2ac_2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (17)$$

Из этой формулы видно, что две системы волн имеют разность фаз $1/2\pi$ во всякой точке, где $c_1 = c_2$. Переход от параметров c, α к координатам x, y дается выражениями (12).

Формула (17) непригодна на границе области, где $\varphi''(\alpha, c) = 0$. Для определения амплитуды вдоль границы нужно вычислить значение производной $\varphi'''(\alpha, c)$ при условии $\varphi''(\alpha, c) = 0$. Опуская несложные вычисления, находим

$$\frac{d^3\varphi}{d\tau^3} = \frac{6g(2 - \alpha)[\alpha^2(1 - c^2) - 2\alpha + 1]}{at^3 c^2 \alpha^5 (1 - \alpha)} \quad (18)$$

Амплитуда вдоль границы дается выражением [2,3]

$$\zeta(x, y, t) \sim \frac{\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}} \psi(\alpha_*) \left(\frac{6}{|\varphi'''(\alpha_*)|} \right)^{1/2} \sin \varphi(\alpha_*) \quad (19)$$

Так как α_* является корнем уравнения (13), то можно исключить параметр c , выразив его через α

$$c^2 = \frac{2(1 - \alpha)^3}{\alpha^2(3 - 2\alpha)} \quad (20)$$

Подставляя в (19) выражения для φ , ψ и φ''' на границе области и учитывая (20), получим

$$\zeta(x, y, t) \sim \frac{Q\Gamma(1/3)g^{2/3}}{2\sqrt{3}\pi r\alpha^{1/3}t^4} \frac{(3-2\alpha)^{11/6}}{\alpha^{1/3}(1-\alpha)^{31/6}(2-\alpha)^{1/3}} \times \\ \times \exp\left[-\frac{vg^2\alpha(3-2\alpha)^2}{2a^4t^3(1-\alpha)^6}\right] \sin \frac{g\alpha(3-2\alpha)^{1/2}}{2\sqrt{2a}(1-\alpha)^{3/2}} \quad (0 \leq \alpha \leq 1) \quad (21)$$

Переход от параметра α к координатам точек на границе области возмущения (x, y) осуществляется по формулам (10).

Как известно, метод стационарной фазы применим к быстро колеблющимся функциям, поэтому приближение будет достаточно верным, если велика фаза в формуле (17), т. е. если $1/2g/ac$ велико. Физически это означает, что приближение будет удовлетворительным на некотором расстоянии от точечного импульса.

Поступила 21 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Никитин А. К., Подрезов С. А. К пространственной задаче о волнах на поверхности вязкой жидкости. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
2. Стокер Дж. Волны на воде. Изд-во иностр. литер., 1959.
3. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. ОНТИ, М., 1936.

ДЛИННЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

И. П. Оборотов (Ростов-на-Дону)

При рассмотрении длинных волн на поверхности вязкой жидкости принято считать, что частота колебания и скорость распространения их определяются по формулам для идеальной жидкости. Коэффициент затухания при этом определяется из энергетических соображений.

Ниже рассматриваются уравнения движения для длинных волн в цилиндрической системе координат. Получены формулы для частоты колебания и коэффициента затухания, а также определены вид свободной поверхности, траектории частиц жидкости, компоненты скорости и давление.

Задача о цилиндрических волнах на поверхности вязкой жидкости конечной глубины сведена в работе [1] к решению уравнений

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial r} + \nu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right), \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial z} + \nu \Delta v_z^{(1)} \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} + \nu \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right), \quad \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z^1}{\partial z} = 0 \quad (1) \\ \left(p_1 = p + \rho g z, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = 0, \quad -\frac{\partial p_1}{\partial t} + \rho g v_z + 2\mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial t} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (2)$$

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = 0, \quad v_z = 0 \quad \text{при } z = -h \quad (3)$$

Эти уравнения и граничные условия можно значительно упростить, если ввести обычные для длинных волн допущения [2].