

О КОРАБЕЛЬНЫХ ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

А. К. Никитин (Ростов-на-Дону)

Задача о корабельных волнах на поверхности вязкой жидкости бесконечной глубины рассматривается в упрощенной постановке: корабль, движущийся с постоянной скоростью по некоторому криволинейному пути в спокойной жидкости, заменяется одним возмущающим центром — импульсом давления на свободной поверхности¹.

§ 1. Начало координат поместим на свободной поверхности жидкости в положении равновесия, ось z направим вертикально вверх. Пусть импульс давления (корабль) движется к началу координат O с постоянной скоростью c по некоторому криволинейному курсу L (фиг. 1).]

В дальнейшем изложении будем следовать в основном работам [2, 3].

Курс корабля L можно рассматривать как кривую, заданную параметрическими уравнениями

$$x_1 = x_1(t), \quad y_1 = y_1(t) \quad (1.1)$$

где t — время, требующееся кораблю, чтобы пройти от некоторой точки $Q(x_1, y_1)$ до его настоящего положения O . Выберем начало отсчета времени так, чтобы $t = 0$ соответствовало началу координат. Тогда точка $Q(x_1, y_1)$ будет двигаться назад вдоль курса корабля. Форма волн будет определяться в момент, когда корабль находится в начале координат. Ось x направляется по касательной к курсу корабля L в точке O в сторону, противоположную движению корабля. Параметр t в выражениях (1.1) является временем с отрицательным знаком. Вектор касательной u к курсу корабля L в точке $Q(x_1, y_1)$ по модулю равен скорости корабля, имеет направление, противоположное движению корабля, и задается выражением

$$-c = u = \frac{dx_1}{dt} i + \frac{dy_1}{dt} j \quad (1.2)$$

Точка $P(x, y)$, в которой вычисляется амплитуда поверхностных волн, определяется радиусом-вектором

$$r = (x - x_1) i + (y - y_1) j \quad (1.3)$$

Угол θ , указанный на фиг. 1, есть угол между вектором r и скоростью корабля c . ▮

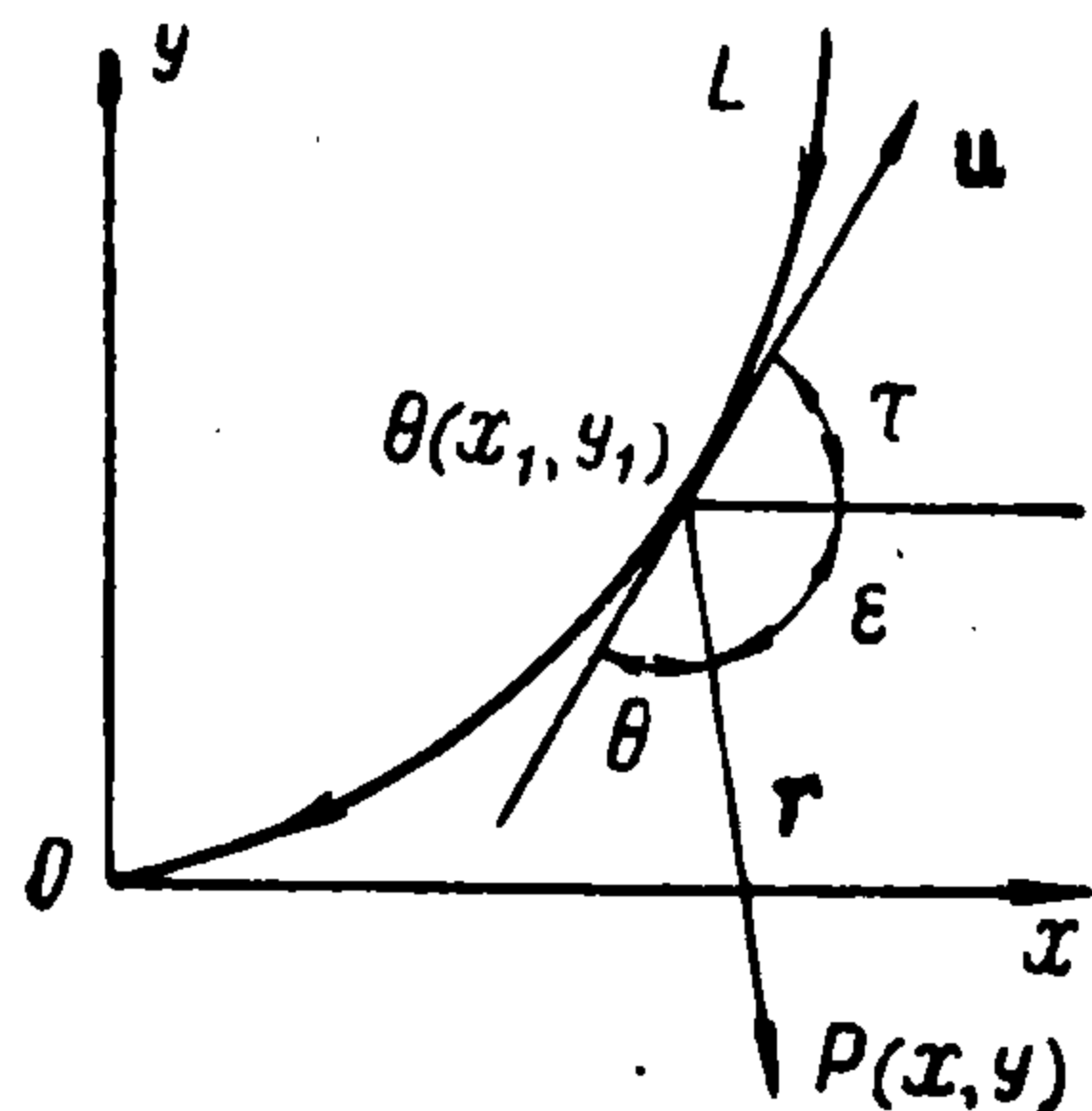
Возвышение поверхности $\zeta(x, y)$ в точке $P(x, y)$ определится путем интегрирования возвышений, вызванных точечным импульсом давления, движущимся

вдоль L . В работе [4] дано приближенное выражение для указанного возвышения, создаваемого точечным импульсом давления на поверхности вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины

$$\zeta_1 = -\frac{mgt^3}{8\sqrt{2}\pi\rho r^4} \exp\left(-\frac{\nu g^2 t^5}{8r^4}\right) \sin\frac{gt^2}{4r} \quad (1.4)$$

справедливое для больших значений параметров $\omega_1 = (g/\nu^2)^{1/3}r$, $\omega_2 = gt^2/(4r)$. Так как для воды $\lambda = (g/\nu^2)^{1/3}$ является большой величиной, то формула (1.4) справедлива и для небольших, но отличных от нуля значений r (при $\nu = 0$ из (1.4) получаем известное выражение для идеальной жидкости) [2, 3]. В формуле (1.4) t — время, прошедшее с момента приложения импульса, r — расстояние от точки приложения импульса до данной точки поверхности жидкости.

¹ Когда настоящая работа была закончена, появилась работа Л. В. Черкесова [1]; однако результаты этой работы предназначены лишь для прямолинейного курса корабля.



Фиг. 1

Интегральный эффект при движении точечного импульса представится так

$$\zeta(x, y) = -\frac{mg}{8\sqrt{2}\pi\rho} \int_0^\infty \frac{t^3}{r^4} \exp \frac{-\nu g^2 t^5}{8r^4} \sin \frac{gt^2}{4r} dt = \text{Im} \int_0^\infty \psi(t) e^{i\varphi(t)} dt \quad (1.5)$$

$$\psi(t) = -\frac{mg}{8\sqrt{2}\pi\rho} \frac{t^3}{r^4} \exp \frac{-\nu g^2 t^5}{8r^4}, \quad \varphi = \frac{gt^2}{4r} \quad (1.6)$$

§ 2. Применим к вычислению интеграла (1.5) метод стационарной фазы. (В качестве большого параметра здесь можно взять безразмерную величину $gR / (4c^2)$, где R — расстояние от корабля до рассматриваемой точки поверхности жидкости.)

Условие стационарности фазы $d\varphi / dt = 0$ приводит к соотношению

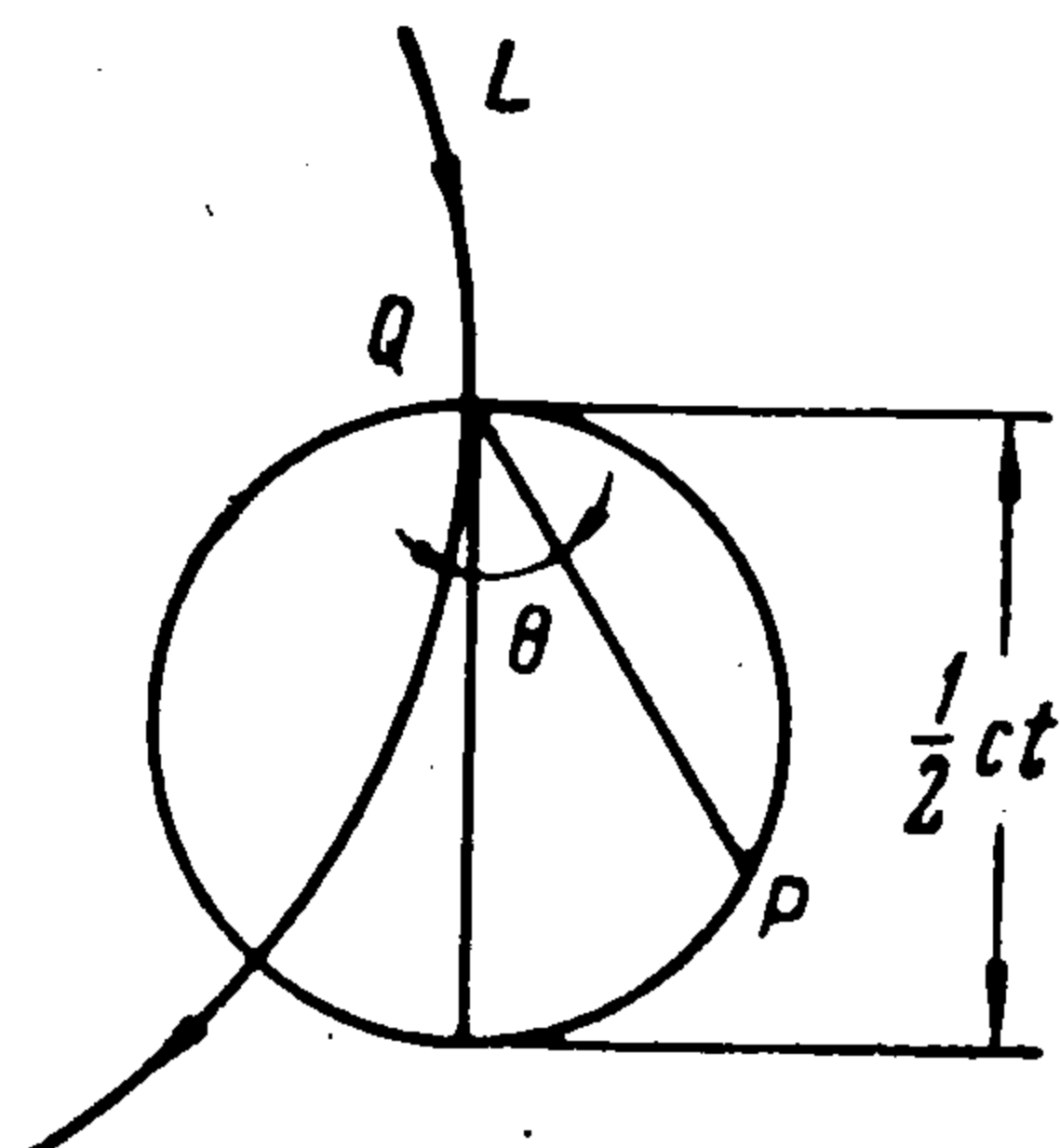
$$\frac{dr}{dt} = \frac{2r}{t} \quad (2.1)$$

Из условия (1.3) находим

$$r dr / dt = -[(x - x_1) dx_1 / dt + (y - y_1) dy_1 / dt] = cr \cos \theta \quad (2.2)$$

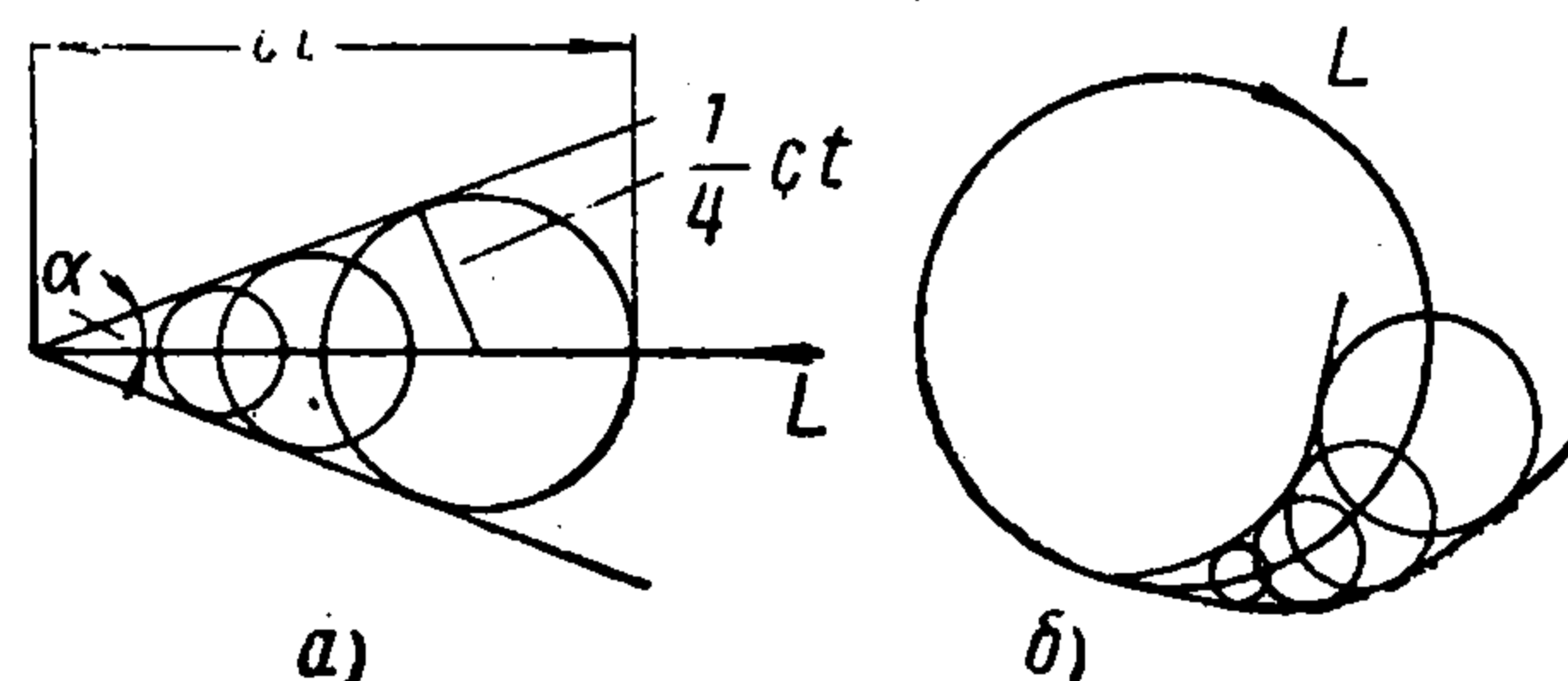
Пользуясь выражениями (2.1) и (2.2), получаем условие стационарности фазы

$$r = 1/2 ct \cos \theta \quad (2.3)$$



Фиг. 2

Условие (2.3) дает те точки Q_i , которые участвуют в создании (в границах рас-



Фиг. 3

сматриваемого приближения) возмущения в точке P . Влияние других точек погашается в результате взаимной интерференции. Указанные точки Q_i , определенные таким путем, называются точками влияния.

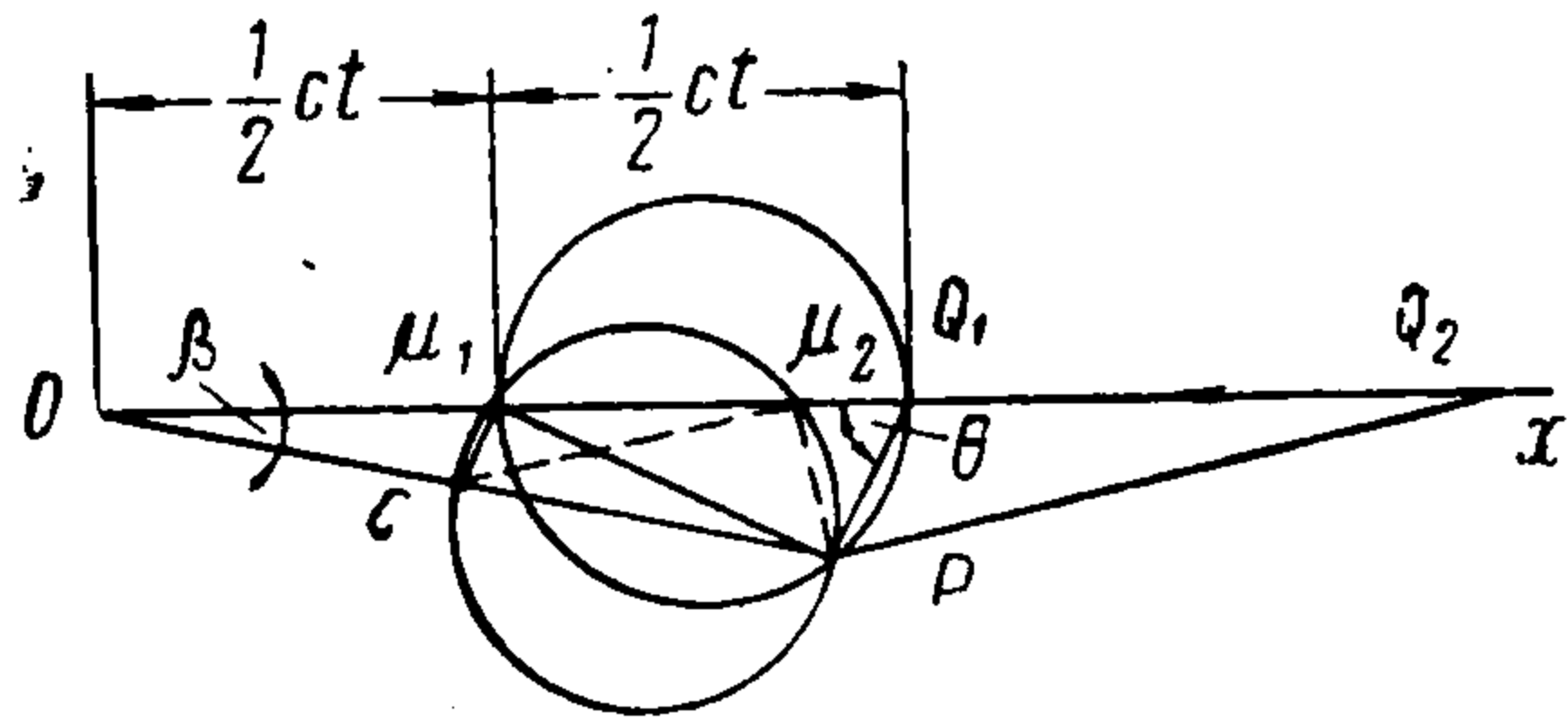
Соотношение (2.3) будет уравнением окружности в полярных координатах с полюсом в точке Q , лежащей на курсе корабля L . Таким образом, для всех точек этой окружности, диаметр которой будет касательным к кривой курса корабля в точке Q , лежащей на конце этого диаметра (фиг. 2), точка Q является точкой влияния. Возмущение, создаваемое кораблем, действует не на всю поверхность жидкости, а только на точки, лежащие на окружностях влияния всех точек Q на курсе корабля. Поверхностные волны, создаваемые движущимся кораблем, ограничиваются областью, покрытой окружностями влияния, т. е. областью, ограниченной огибающей этого однопараметрического семейства кривых. Приходим к известным из теории корабельных волн на поверхности идеальной жидкости результатам.

а) Очертания области возмущения для любого курса корабля, движущегося с постоянной скоростью, находятся, как и в случае идеальной жидкости, путем построения огибающей окружностей влияния для точек, лежащих на курсе корабля. На фиг. 3 представлены случаи, когда корабль движется с постоянной скоростью c по прямому пути, описывая циркуляцию. В случае прямого курса огибающей является пара прямых линий и возмущение ограничивается сектором с углом раствора 2α , где

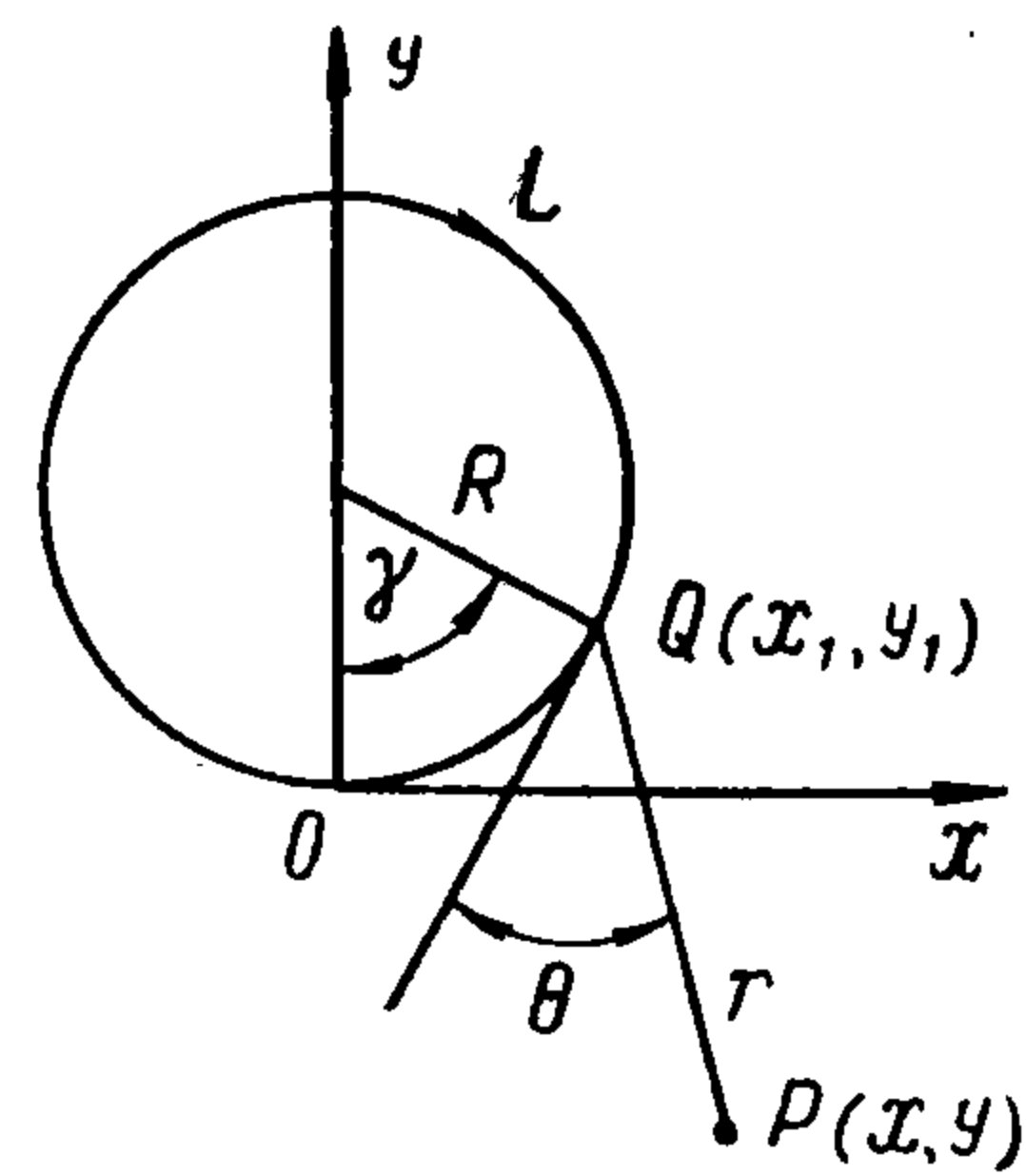
$$\alpha = \arcsin 1/3 = 19^\circ 28' \quad (2.4)$$

Строго говоря, возмущение, создаваемое кораблем, не будет равно нулю вне указанной области, но оно будет величиной другого порядка малости, чем возмущение внутри этой области.

б) Точки влияния Q_i , соответствующие заданной точке P , в случае прямого курса корабля при постоянной скорости c отыскиваются известным образом (фиг. 4): точка P соединяется прямой с точкой O ; отрезок OP делится пополам в точке C ; на CP как на диаметре строится окружность и находятся точки пересечения M_1 и M_2 этой окружности



Фиг. 4



Фиг. 5

с осью Ox . Откладывая затем отрезки $M_1Q_1 = OM_1$ и $M_2Q_2 = OM_2$, получим искомые положения Q_1 и Q_2 точек влияния. Точек пересечения M_1 и M_2 может оказаться две, одна или ни одной — в зависимости от положения точки P .

§ 3. Аналитическое изучение кривых постоянной фазы проводится так же, как и для идеальной жидкости. Удобно выразить условие (2.3) стационарности фазы, введя величину a , имеющую размерность длины

$$a = 2c^2 \varphi/g = 1/2c^2t^2/r \quad (3.1)$$

Из (2.3) и (3.1) находим условия стационарности фазы

$$ct = a \cos \theta, \quad r = 1/2a \cos^2 \theta \quad (3.2)$$

Определим кривые постоянной фазы для случаев кругового и прямого курсов корабля в предположении постоянной скорости. Первый случай для идеальной жидкости рассматривал Л. Н. Сретенский [4]. Случай прямолинейного курса можно рассматривать как предельный для кругового курса. В случае кругового курса (фиг. 5) для положения корабля $Q(x_1, y_1)$ в предшествующий момент времени имеем

$$x_1 = R \sin \gamma, \quad y_1 = R(1 - \cos \gamma), \quad \gamma = ct/R \quad (3.3)$$

Здесь R — радиус кругового курса корабля, t — время, нужное кораблю, чтобы пройти от Q до O , c — постоянная скорость корабля. Координаты точки P , в которой ищется возмущение, создаваемое кораблем, даются выражениями

$$x = x_1 - r \cos(\gamma + \theta), \quad y = y_1 - r \sin(\gamma + \theta) \quad (3.4)$$

Заменяя в последних уравнениях x_1 и y_1 через их выражения (3.3) и воспользовавшись соотношением для r из (3.2), получаем

$$x = R \sin \gamma - 1/2a \cos^2 \theta \cos(\gamma + \theta), \quad y = R(1 - \cos \gamma) - 1/2a \cos^2 \theta \sin(\gamma + \theta) \quad (3.5)$$

Найдем геометрическое место точек, для которых фаза φ , т. е. величина a в формуле (3.1), постоянна. Удобно ввести безразмерный параметр

$$\kappa = a/R \quad (3.6)$$

Воспользовавшись первым соотношением из (3.2), найдем

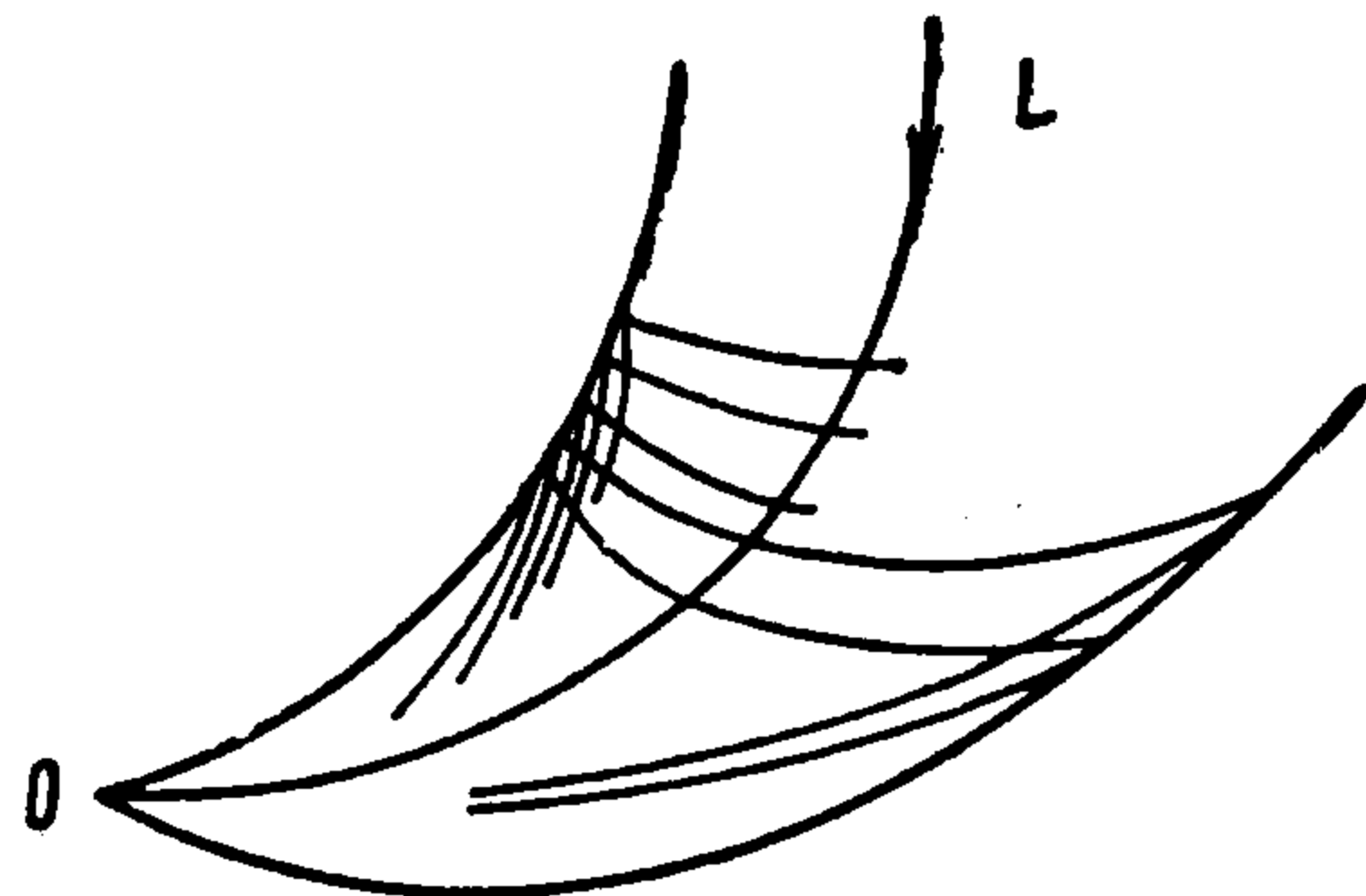
$$\gamma = \frac{ct}{R} = \frac{a}{R} \cos \theta = \kappa \cos \theta \quad (3.7)$$

Тогда соотношения (3.5) можно представить в безразмерной форме

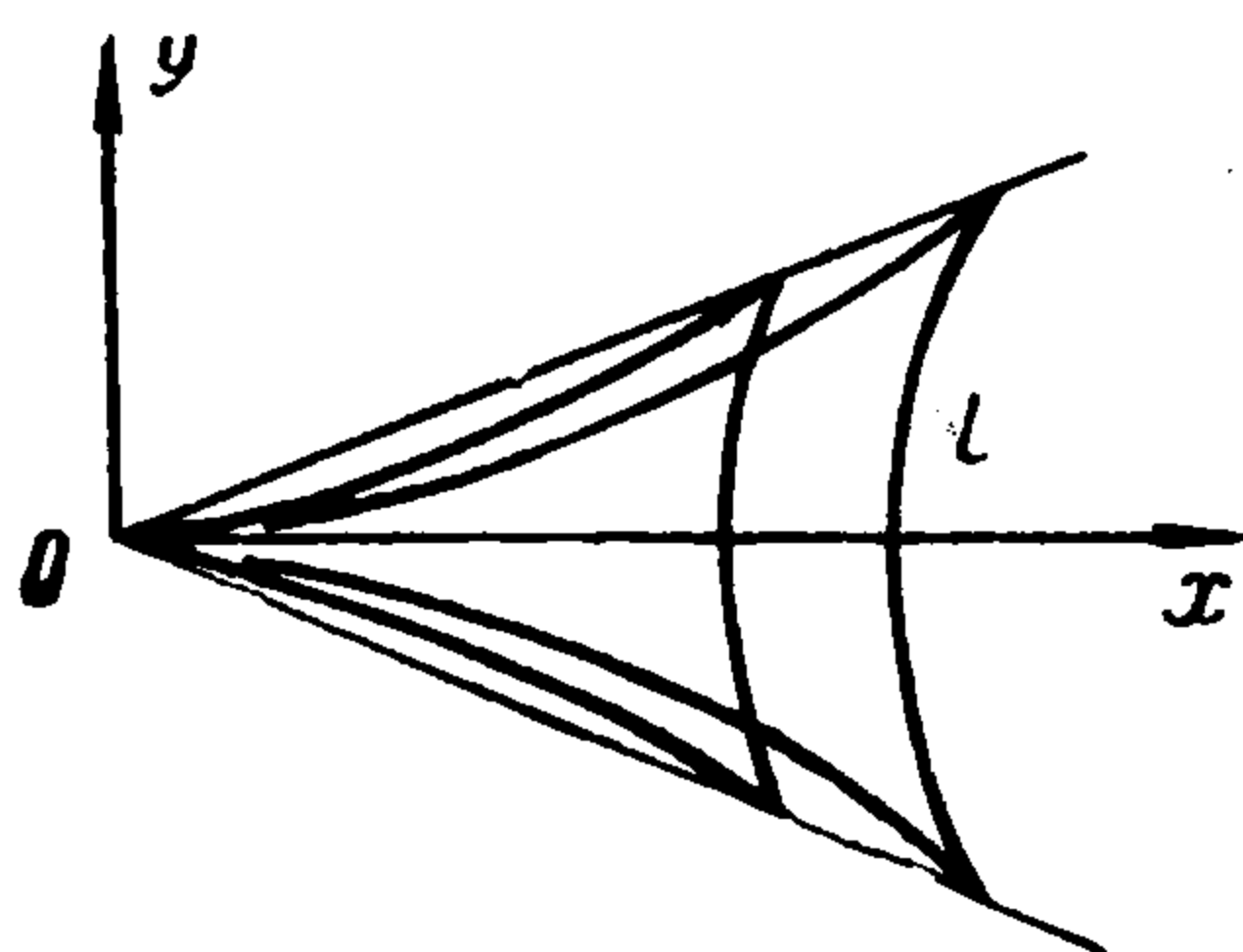
$$\begin{aligned} x/R &= \sin(\kappa \cos \theta) - 1/2\kappa \cos^2 \theta \cos(\theta + \kappa \cos \theta) \\ y/R &= 1 - \cos(\kappa \cos \theta) - 1/2\kappa \cos^2 \theta \sin(\theta + \kappa \cos \theta) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Эти уравнения дают представление кривых постоянной фазы через параметр θ . Каждое значение κ дает одну такую кривую, так как задание κ (для фиксированного

значения радиуса циркуляции R) эквивалентно заданию значения фазы φ . На фиг. 6 представлено несколько кривых постоянной фазы, а также указаны очертания области возмущения, вычисленные на основании уравнений (3.8). Получаем две системы волн, которые называются системой расходящихся и системой поперечных волн (фиг. 6).



Фиг. 6



Фиг. 7

Полагая в уравнениях (3.8) значение $R \rightarrow \infty$ и $\kappa \rightarrow 0$ при условии, что $R\kappa = a$ в силу (3.6), приходим к уравнениям кривых постоянной фазы для случая прямого курса корабля

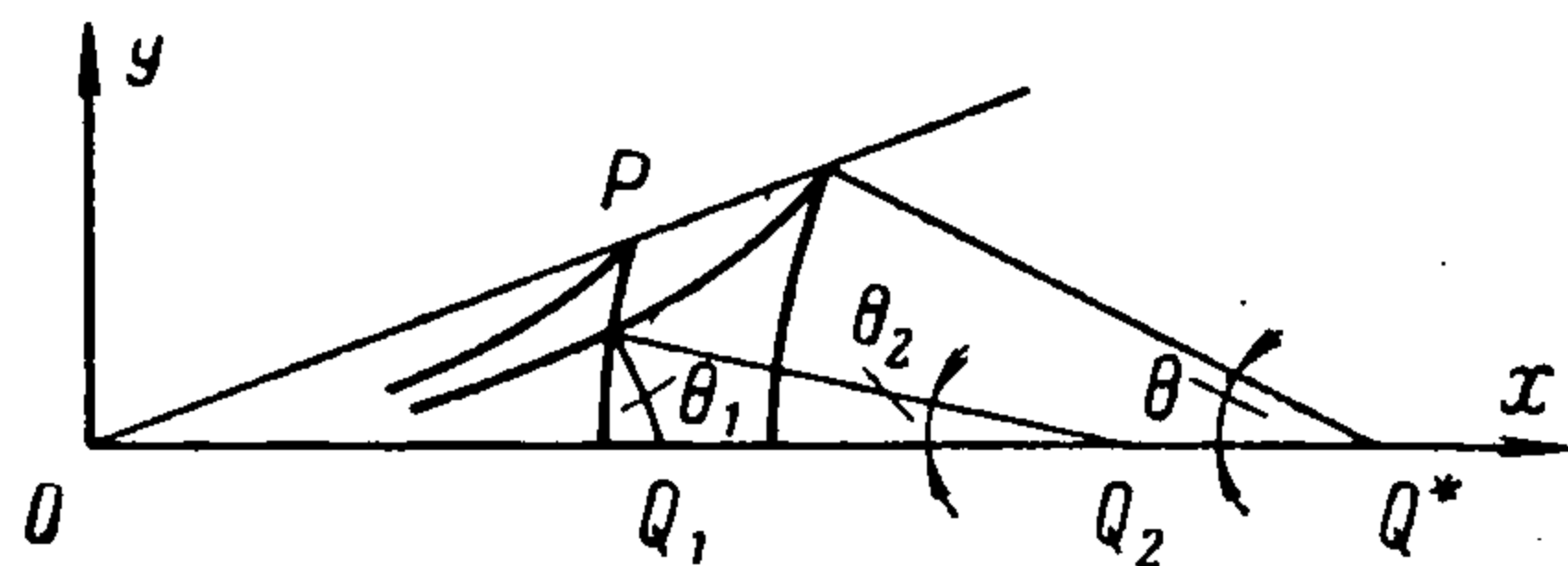
$$x = \frac{1}{2} a (2 - \cos^2 \theta) \cos \theta = \frac{1}{2} a (1 + \sin^2 \theta) \cos \theta, \quad y = \frac{1}{2} a \cos^2 \theta \sin \theta \quad (3.9)$$

На фиг. 7 показаны результаты вычислений, проведенных на основании формул (3.9). Сравнение с фотографиями волн при движении корабля, приведенными в книге [2], показывает хорошее согласие.

Из уравнений (3.9) находим

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a}{2} (3 \sin^2 \theta - 1) \sin \theta, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{a}{2} (3 \sin^2 \theta - 1) \cos \theta \quad (3.10)$$

Отсюда следует, что $dy/dx = -1/\operatorname{tg} \theta$, а это означает (фиг. 8), что линии постоянной фазы ортогональны к прямым, проведенным к точкам влияния. Значениям $\theta = \theta^*$, для которых $3 \sin^2 \theta - 1 = 0$, соответствуют особые точки кривых на границе области возмущения. Для этих граничных точек точки влияния Q_1 и Q_2 совпадают. Очевидно, что эти точки являются угловыми (точками возврата первого рода). Очевидно также, что система расходящихся волн получается (при $y < 0$), когда θ меняется в интервале $\theta^* \leq \theta \leq \pi/2$, в то время как поперечные волны соответствуют значениям θ в интервале $0 \leq \theta \leq \theta^*$. При $y > 0$ угол θ принимает соответственно отрицательные значения.



Фиг. 8

Кроме того, легко заметить, что всякой точке на курсе корабля ($\theta = 0$) соответствует только одна точка влияния типа Q_2 и она не совпадает с точкой P , так как расходящиеся волны встречаются с курсом корабля только в точке O ($x = 0, y = 0$). Поэтому метод стационарной фазы применим и при вычислении амплитуд волн для точек, лежащих на курсе корабля.

Из формул (3.9) при $\theta = 0$ находим

$$OB = \frac{1}{2} a = c^2 \varphi / g = c^2 \delta / g \quad (\varphi = \delta = \text{const}) \quad (3.11)$$

Поэтому длина поперечных волн будет

$$\lambda = 2\pi c^2 / g \quad (3.12)$$

а скорость их распространения $(g\lambda / 2\pi)^{1/2} = c$, т. е. совпадает со скоростью корабля.

§ 4. Рассмотрим амплитуду поверхностных волн, даваемую нашим приближением. С этой целью вычислим φ , $d^2\varphi/dt^2$ и $d^3\varphi/dt^3$ для значений t , удовлетворяющих условию стационарности фазы $d\varphi/dt = 0$. Из выражения (2.1) с учетом (2.2) легко находим

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{g}{2r} \left(1 - \frac{t^2}{2r} \frac{d^2r}{dt^2} \right) \quad (4.1)$$

Значение $d^3\varphi/dt^3$ в точках, где $d^2\varphi/dt^2 = 0$, дается равенством

$$\frac{d^3\varphi}{dt^3} = - \frac{gt^2}{4r^2} \frac{d^3r}{dt^3} \quad (4.2)$$

Выразим наши результаты через параметр θ вместо переменного t . По формуле (2.4) имеем $dr/dt = c \cos \theta$, следовательно,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -c \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \quad (4.3)$$

Здесь c — постоянная скорость корабля. Для вычисления $d\theta/dt$ введем углы ε и τ , указанные на фиг. 1. Тогда

$$\theta = \pi - (\varepsilon + \tau), \quad \frac{d\theta}{dt} = \left(-\frac{d\varepsilon}{ds} - \frac{d\tau}{ds} \right) \frac{ds}{dt} = -c \left(\frac{d\varepsilon}{ds} + \frac{d\tau}{ds} \right) \quad (4.4)$$

где s — длина дуги кривой L . Далее имеем $d\tau/ds = 1/R$, где R — радиус кривизны кривой L

$$\varepsilon = \arctg \frac{y - y_1}{x - x_1}, \quad \frac{d\varepsilon}{ds} = -\frac{1}{r^2} \left[(x - x_1) \frac{dy_1}{dt} - (y - y_1) \frac{dx_1}{dt} \right] = \frac{\sin \theta}{r} \quad (4.5)$$

Воспользовавшись формулами (4.3) — (4.5), (3.2), находим

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{g}{2r} \left(1 - 2 \operatorname{tg}^2 \theta - \frac{a}{R} \sin \theta \right) = \frac{g}{2r} \frac{1 - 3 \sin^2 \theta - (a/R) \sin \theta (1 - \sin^2 \theta)}{\cos^2 \theta} \quad (4.6)$$

где a определяется формулой (3.1).

Из соотношения (4.6) можно заключить, что единственными курсами, при которых волновой след позади корабля перемещается без изменения как твердое тело, являются только прямой и круговой курсы, для которых $R = \text{const}$.

Определим, наконец, амплитуду $\zeta(x, y)$ волн, пользуясь методом стационарной фазы. Вклад точки t_0 стационарной фазы в интеграл (1.5) дается выражением [2]

$$\zeta(x, y) \sim \operatorname{Im} \left\{ \psi(r, \theta) \left(\frac{2\pi}{|\varphi''(r, \theta)|} \right)^{1/2} \exp \left[i \left(\varphi(r, \theta) \pm \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\} \quad (\varphi''(r, \theta) \neq 0) \quad (4.7)$$

где r и θ — полярные координаты, определяющие положение точки стационарной фазы на курсе L относительно точки (x, y) (фиг. 1). Знак у члена $\pm 1/4\pi$ в показателе степени берется одинаковым со знаком $\varphi'' = d^2\varphi/dt^2$.

Ограничимся рассмотрением амплитуд лишь для прямого курса корабля. Из (4.6) имеем

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{g}{2r} \frac{1 - 3 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \quad (4.8)$$

Как было показано раньше, для каждой точки в возмущенной области имеются два значения θ , определяющих точки влияния, назовем их θ_1 и θ_2 . Одно принадлежит к системе поперечных волн ($0 \leq \theta_1 < \theta^* = \arcsin 1/\sqrt{3}$), другое — к системе расходящихся волн ($\theta^* < \theta_2 \leq 1/2\pi$). В первом случае производная $d^2\varphi/dt^2$ положительна, во втором — отрицательна. На границе области возмущения, где $\varphi'' = 0$, формула (4.7) неприменима. Этот случай разберем отдельно.

Для точек внутри области возмущения ($0 \leq \theta_1 < \theta^*$, $\theta^* < \theta_2 \leq 1/2\pi$) получим:

$$\zeta(x, y) \sim \text{Im} \left\{ \psi(r_1, \theta_1) \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\varphi''(r_1, \theta_1)|}} \exp \left[i \left(\varphi(r_1, \theta_1) + \frac{\pi}{4} \right) \right] + \right. \\ \left. + \psi(r_2, \theta_2) \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\varphi''(r_2, \theta_2)|}} \exp \left[i \left(\chi(r_2, \theta_2) - \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\} \quad (4.9)$$

Учитывая формулы (2.3), (3.1), (3.2) и (1.6), формулу (4.9) можем переписать в виде

$$\zeta(x, y) \sim - \frac{2m \sqrt{g}}{\rho c^3 \sqrt{\pi}} \left\{ \exp \left(- \frac{2\nu g^2 a_1 \sec^3 \theta_1}{c^5} \right) \frac{\sec^3 \theta_1}{a_1^{1/2} \sqrt{|1 - 3 \sin^2 \theta_1|}} \sin \left(\frac{g a_1}{2c^2} + \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\ \left. + \exp \left(- \frac{2\nu g^2 a_2 \sec^3 \theta_2}{c^5} \right) \frac{\sec^3 \theta_2}{a_2^{1/2} \sqrt{|1 - 3 \sin^2 \theta_2|}} \sin \left(\frac{g a_2}{2c^2} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \quad (4.10)$$

Таким образом, две системы волн имеют относительную разность фаз $\pi/2$ во всякой точке, где $a_1 = a_2$ (на границе области возмущения). Поэтому, если на фиг. 6 и 7 вычертить системы расходящихся и поперечных волн с учетом этой разности фаз на границах, то согласие теоретических результатов с фотографиями волн при движении корабля будет еще лучше.

Амплитуды волн затухают как $a_i^{-1/2} \exp(-2\nu g^2 c^{-5} a_i \sec^3 \theta_i)$. В отличие от идеальной жидкости, амплитуды расходящихся волн в начале координат O не обращаются в бесконечность. При $\nu = 0$ из (4.10) получаем формулу для идеальной жидкости.

Из формулы (4.10) следует, что амплитуды обеих систем волн становятся бесконечно большими для $\theta = \theta^*$, т. е. для точек на границе возмущенной области. Но асимптотическая формула (4.7) в таких точках не применима, так как там $\varphi'' = 0$.

Для определения амплитуды волн вдоль границы области ($\theta = \theta^*$) воспользуемся формулой [2]

$$\zeta(x, y) \sim \text{Im} \left\{ \frac{\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}} \psi(\theta^*) \left(\frac{6}{|\varphi'''(\theta^*)|} \right)^{1/3} e^{i\varphi(\theta^*)} \right\} \quad (4.11)$$

Заменив в (4.3) производную $d\theta/dt$ через $(1/r)c \sin \theta$ и продифференцировав результат по t , найдем

$$\frac{d^3 r}{dt^3} = - \frac{c^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{r^2}$$

Из формулы (4.2), учитывая, что $r = 1/2 c \cos \theta = 1/2 a \cos^2 \theta$, получим при $\theta = \theta^*$

$$\frac{d^3 \varphi}{dt^3} = \frac{4gc \sin^2 \theta^*}{a^2 \cos^5 \theta^*} = \frac{3gc \sqrt{6}}{a^2} \quad (4.12)$$

Подставляя полученные выражения в формулу (4.11), получим окончательно

$$\zeta(x, y) \sim - \frac{9mg^{2/3} \Gamma(1/3)}{2\pi\rho 3^{2/3} c^{10/3} a^{1/3}} \exp \left(\frac{-\nu g^2 3 \sqrt{6} a}{2c^5} \right) \sin \frac{ga}{2c^2} \quad (4.13)$$

Амплитуды волн затухают теперь как $a^{-1/3} \exp[-1/2 \nu g^2 c^{-5} 3 \sqrt{6} a]$. При $\nu = 0$ формула (4.13) переходит в соответствующую формулу для идеальной жидкости.

Поступила 3 IX 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Черкесов Л. В. Корабельные волны в вязкой жидкости. Докл. АН СССР 1963, т. 153, № 6.
2. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. Изд. иностр. лит., 1959.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. I. Физматгиз, М., 1963.
4. Никитин А. К., Подрезов С. А. К пространственной задаче о волнах на поверхности вязкой жидкости бесконечной глубины. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
5. Сретенский Л. Н. О волнах, поднимаемых кораблем при движении по круговому пути. Изв. АН СССР, ОТН, 1946, № 1.