

## КАПИЛЛЯРНЫЕ ВОЛНЫ В КАНАЛЕ С ПОЛИГОНАЛЬНЫМ ДНОМ

О. М. Киселев (Казань)

Капиллярные волны малой амплитуды на поверхности жидкости постоянной глубины хорошо изучены [1]. Ниже предлагается приближенный метод для исследования капиллярных волн, возникающих при движении жидкости в канале, дно которого имеет полигональную форму.

§ 1. Рассмотрим установившееся потенциальное течение идеальной невесомой несжимаемой жидкости с полигональной твердой границей  $ABCD$  и свободной поверхностью  $KL$  в плоскости  $z = x + iy$  (фиг. 1). Углы наклона участков  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  к оси  $x$  заданы. Жидкость течет от  $A$  к  $D$ ; на бесконечности вверх по течению скорость невозмущенного движения  $V_0$ , глубина потока  $H$ .

Пусть  $R$  — радиус кривизны свободной поверхности (считается положительным, если направлен от жидкости),  $T$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\rho$  — плотность жидкости,  $p$  — давление в жидкости и  $p_0$  — давление в атмосфере.

Как известно, на свободной поверхности

$$\frac{T}{R} = p_0 - p, \text{ или } TV \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\rho}{2} (V^2 - V_0^2) \quad (1.1)$$

Здесь  $V$  — модуль скорости,  $\theta$  — угол наклона скорости к оси  $x$ . Пусть  $w = \varphi + i\psi$  — комплексный потенциал течения.

В плоскости  $w$  области течения соответствует полоса шириной  $\psi_0 = V_0 H$ .

Отобразим область  $w$  на область  $\zeta = \xi + i\eta$  при помощи линейной подстановки

$$\zeta = \frac{\pi}{2V_0 H} w \quad (1.2)$$

В плоскости  $\zeta$  получим полосу шириной  $1/2 \pi$ ; прямой  $\eta = 1/2 \pi$  соответствует свободная поверхность, а прямой  $\eta = 0$  — твердая граница потока.

Решение задачи можно записать в виде

$$z = \frac{2H}{\pi} \int \exp [f(\zeta)] d\zeta \quad \left( f = \ln \frac{V_0 dz}{dw} = r + i\theta \right) \quad (1.3)$$

Здесь  $f(\zeta)$  — функция Жуковского.

Будем считать образы точек  $B, C$  в плоскости  $\zeta$  заданными. Тогда на прямой  $\eta = 0$  известна мнимая часть функции  $f(\zeta)$ . На прямой  $\eta = 1/2 \pi$  должно выполняться условие (1.1), которое легко привести к виду

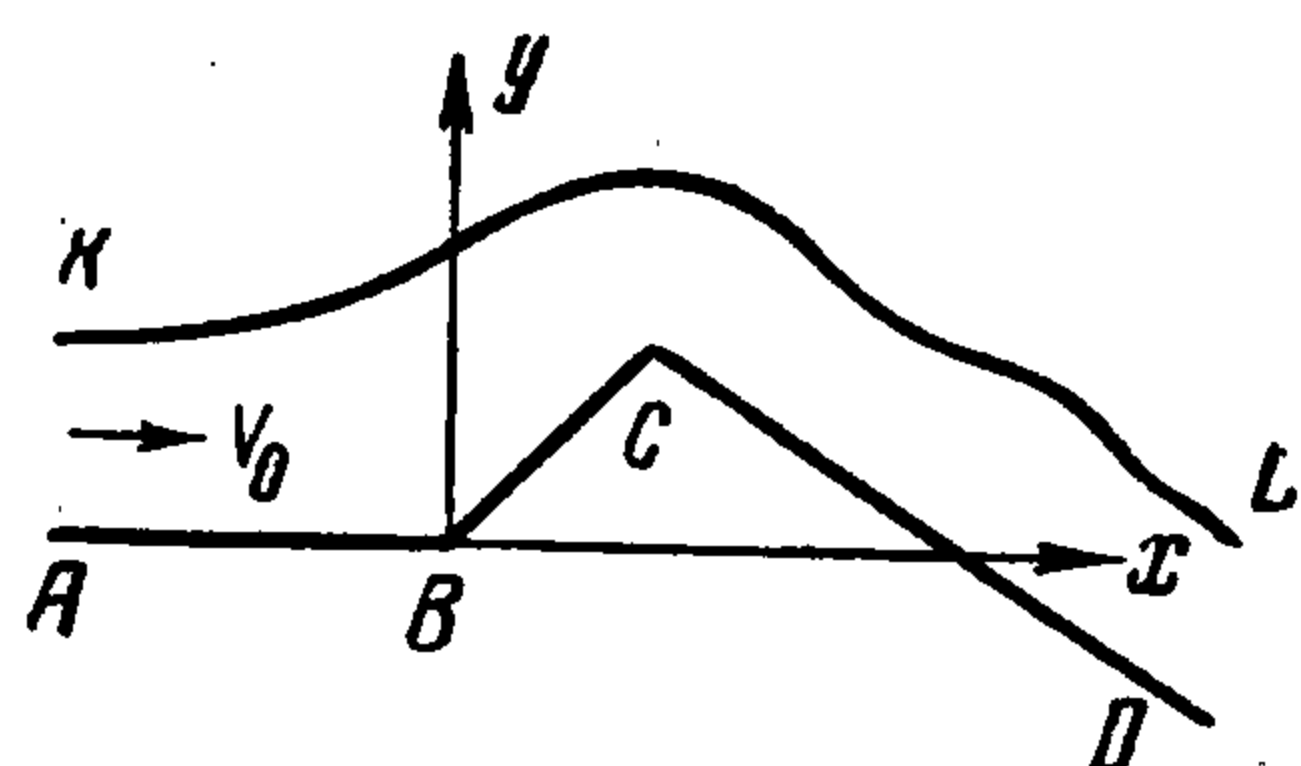
$$\alpha \frac{\pi}{2} \frac{d\theta}{d\xi} = - \operatorname{sh} r \quad \left( \alpha = \frac{T}{\rho V_0^2 H} \right) \quad (1.4)$$

Безразмерный параметр  $\alpha$  характеризует степень влияния капиллярности. При  $\alpha = 0$  капиллярные силы отсутствуют и на свободной поверхности  $r = 0$ . Для случая малых значений  $\alpha$ , который нас будет интересовать в дальнейшем, на свободной поверхности величина  $r$  мала и в равенстве (1.4) можно приближенно положить  $\operatorname{sh} r = r$ . Погрешность такой замены при малых  $r$  имеет порядок  $1/6 r^3$ .

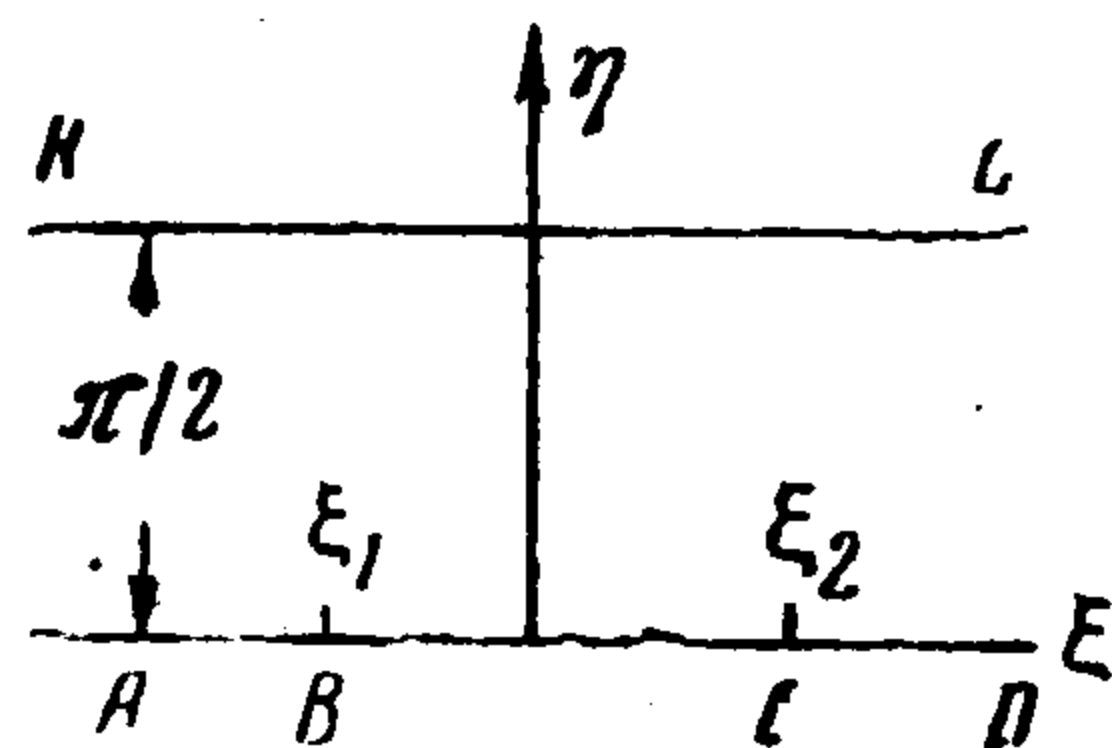
Таким образом, приходим к следующей задаче. Требуется определить функцию  $f(\zeta)$ , аналитическую в области  $-\infty \leq \xi \leq \infty, 0 \leq \eta \leq 1/2 \pi$ , если на прямой  $\eta = 0$  известны значения ее мнимой части  $\theta_0(\xi)$ , а на прямой  $\eta = 1/2 \pi$  вещественная и мнимая части функции связаны соотношением

$$r_1 = -\alpha \frac{\pi}{2} \frac{d\theta_1}{d\xi} \quad (1.5)$$

(индексом 0 будем отмечать функции  $r, \theta$  при  $\eta = 0$ , индексом 1 — при  $\eta = 1/2 \pi$ ),



Фиг. 1



Фиг. 2

§ 2. Записывая выражение функции  $f(\xi)$  через  $\theta_0(\xi)$ ,  $r_1(\xi)$ , а затем через  $\theta_0(\xi)$ ,  $\theta_1(\xi)$  [2], и вычитая из первого выражения второе, можно получить формулу

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0 \frac{d\xi'}{1 + e^{\xi' - \xi}} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \theta_1 \frac{d\xi'}{1 + e^{2(\xi' - \xi)}} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r_1}{\operatorname{ch}(\xi' - \xi)} d\xi' \quad (2.1)$$

(подробный вывод (2.1) приведен в [3]). Подставляя в (2.1) вместо  $r_1$  его выражение через  $\theta_1$  из (1.5), приходим к интегродифференциальному уравнению для  $\theta_1$

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0 \frac{d\xi'}{1 + e^{\xi' - \xi}} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \theta_1 \frac{d\xi'}{1 + e^{2(\xi' - \xi)}} + \alpha \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta_1}{d\xi} \operatorname{sch}(\xi' - \xi) d\xi' \quad (2.2)$$

Пусть  $\zeta = \xi_1, \xi_2$  — образы точек  $B, C$  в плоскости  $\zeta$ , а  $\theta_{00}, \theta_{01}, \theta_{02}$  — значения  $\theta_0$  на участках  $AB, BC$  и  $CD$  соответственно.

Применяя к (2.2) двустороннее преобразование Лапласа [4], получим

$$\theta_1(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^2 (\theta_{0k} - \theta_{0k-1}) J_k, \quad J_k = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Q_k(p) dp \quad (2.3)$$

$$Q_k(p) = \frac{\exp[p(\xi - \xi_k)]}{p^{1/2} \alpha \pi p \sin^{1/2} \pi p + \cos^{1/2} \pi p}$$

Здесь интегрирование ведется в плоскости вспомогательного комплексного переменного  $p = \sigma + i\tau$  вдоль любой прямой, параллельной мнимой оси и лежащей в полосе  $0 < \sigma < 1$ .

Пользуясь леммой Жордана, можно доказать, что при  $\xi - \xi_k > 0$  интеграл  $J_k$  равен сумме вычетов подынтегральной функции во всех полюсах, расположенных слева от прямой интегрирования, а при  $\xi - \xi_k < 0$  интеграл  $J_k$  равен сумме вычетов, взятых с обратным знаком во всех полюсах справа от прямой интегрирования.

Подынтегральная функция  $Q_k(p)$  не имеет полюсов вне координатных осей  $\sigma = 0, \tau = 0$ ; точка  $p = 0$  будет полюсом первого порядка; при  $\tau = 0, \sigma \neq 0$  функция  $Q_k(p)$  имеет полюсы первого порядка в точках  $\sigma_n > 0$  и  $\sigma_{-n} < 0$ , а при  $\sigma = 0, \tau \neq 0$  — в  $\pm$  точках  $i\tau_0$ , которые определяются соответственно из условий

$$-\alpha \pi \sigma_n / 2 = \operatorname{ctg}(\pi \sigma_n / 2), \quad \sigma_n = -\sigma_{-n}, \quad 2n - 1 \leq \sigma_n \leq 2n$$

$$\alpha \pi \tau_0 / 2 = \operatorname{cth}(\pi \tau_0 / 2) \quad (2.4)$$

Учитывая (2.4), вычеты функции  $Q_k(p)$  можно записать в следующей форме:

$$\operatorname{res}_{p=\sigma_n} Q_k(p) = -\frac{2}{\pi} \frac{\exp[\sigma_n(\xi - \xi_k)] \sin(\pi \sigma_n / 2)}{\sigma_n [1 - \alpha \sin^2(\pi \sigma_n / 2)]}$$

$$\operatorname{res}_{p=-\sigma_n} Q_k(p) = -\frac{2}{\pi} \frac{\exp[-\sigma_n(\xi - \xi_k)] \sin(\pi \sigma_n / 2)}{\sigma_n [1 - \alpha \sin^2(\pi \sigma_n / 2)]}$$

$$\operatorname{res}_{p=i\tau_0} Q_k(p) = -\frac{2}{\pi} \frac{\exp[i\tau_0(\xi - \xi_k)] \operatorname{sh}(\pi \tau_0 / 2)}{\tau_0 [1 + \alpha \operatorname{sh}^2(\pi \tau_0 / 2)]}$$

$$\operatorname{res}_{p=-i\tau_0} Q_k(p) = -\frac{2}{\pi} \frac{\exp[-i\tau_0(\xi - \xi_k)] \operatorname{sh}(\pi \tau_0 / 2)}{\tau_0 [1 + \alpha \operatorname{sh}^2(\pi \tau_0 / 2)]}$$

$$\operatorname{res}_{p=0} Q_k(p) = 1$$

Таким образом, получим, что при  $\xi - \xi_k \leq 0$

$$J_k = J_k^- = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[\sigma_n(\xi - \xi_k)] \sin(\pi \sigma_n / 2)}{\sigma_n [1 - \alpha \sin^2(\pi \sigma_n / 2)]} \quad (2.5)$$

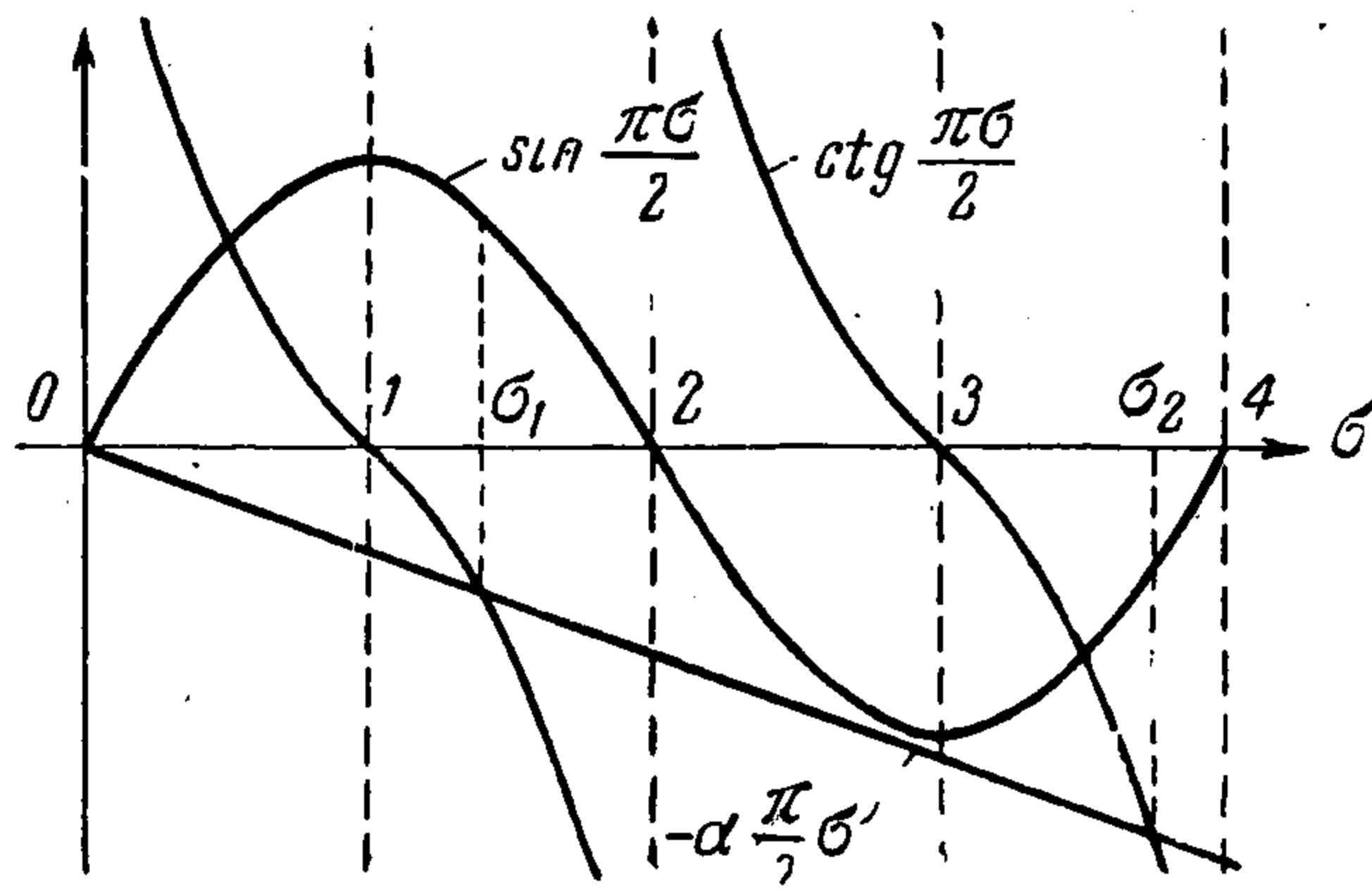
$$\frac{dJ_k^-}{d\xi} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[\sigma_n(\xi - \xi_k)] \sin(\pi \sigma_n / 2)}{1 - \alpha \sin^2(\pi \sigma_n / 2)} \quad (2.6)$$

а при  $\xi - \xi_k \geq 0$

$$J_k = J_k^+ = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-\sigma_n (\xi - \xi_k)] \sin(\pi \sigma_n / 2)}{\sigma_n [1 - \alpha \sin^2(\pi \sigma_n / 2)]} - \frac{4 \cos[\tau_0 (\xi - \xi_k)] \operatorname{sh}(\pi \tau_0 / 2)}{\pi \tau_0 [1 + \alpha \operatorname{sh}^2(\pi \tau_0 / 2)]} \quad (2.7)$$

$$\frac{dJ_k^+}{d\xi} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-\sigma_n (\xi - \xi_k)] \sin(\pi \sigma_n / 2)}{1 - \alpha \sin^2(\pi \sigma_n / 2)} + \frac{4 \sin[\tau_0 (\xi - \xi_k)] \operatorname{sh}(\pi \tau_0 / 2)}{\pi [1 + \alpha \operatorname{sh}^2(\pi \tau_0 / 2)]} \quad (2.8)$$

Из фиг. 3 видно, что при  $n$ , растущем от 1 до бесконечности, величина  $\sin(\pi \sigma_n / 2)$  чередует свой знак и монотонно убывает по модулю.



Фиг. 3

Поэтому ряды, входящие в выражения (2.5) — (2.8), являются знакопеременными с монотонно убывающими по абсолютной величине членами.

Кроме того,

$$\left. \frac{dJ_k^-}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_k} = \left. \frac{dJ_k^+}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_k}$$

$$J_k^- \Big|_{\xi=\xi_k} = J_k^+ \Big|_{\xi=\xi_k}$$

причем последнее равенство следует из рассмотрения вычетов функции  $Q_k(p)$  при  $\xi = \xi_k$ .

Из (2.3) получаем выражения для  $\theta_1(\xi)$

$$\theta_1 = (\theta_{01} - \theta_{00}) J_1^- + (\theta_{02} - \theta_{01}) J_2^- \quad \text{при } -\infty \leq \xi \leq \xi_1$$

$$\theta_1 = (\theta_{01} - \theta_{00}) J_1^+ + (\theta_{02} - \theta_{01}) J_2^- \quad \text{при } \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$$

$$\theta_1 = (\theta_{01} - \theta_{00}) J_1^+ + (\theta_{02} - \theta_{01}) J_2^+ \quad \text{при } \xi_2 \leq \xi \leq \infty$$

Аналогичные выражения получаются из (1.5) для  $r_1(\xi)$

$$r_1 = \alpha \frac{\pi}{2} \left[ (\theta_{00} - \theta_{01}) \frac{dJ_1^-}{d\xi} + (\theta_{01} - \theta_{02}) \frac{dJ_2^-}{d\xi} \right] \quad \text{при } -\infty \leq \xi \leq \xi_1$$

$$r_1 = \alpha \frac{\pi}{2} \left[ (\theta_{00} - \theta_{01}) \frac{dJ_1^+}{d\xi} + (\theta_{01} - \theta_{02}) \frac{dJ_2^-}{d\xi} \right] \quad \text{при } \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$$

$$r_1 = \alpha \frac{\pi}{2} \left[ (\theta_{00} - \theta_{01}) \frac{dJ_1^+}{d\xi} + (\theta_{01} - \theta_{02}) \frac{dJ_2^+}{d\xi} \right] \quad \text{при } \xi_2 \leq \xi \leq \infty$$

Очевидно, что  $r_1 \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow 0$ , и, следовательно, полученные формулы применимы при малых значениях  $\alpha$ . Если в (2.5), (2.7) положить  $\alpha = 0$ , то, учитывая, что при этом  $\sigma_n = 2n - 1$ , будем иметь

$$J_k^- = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \exp[(2n-1)(\xi - \xi_k)] = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc tg} [\exp(\xi - \xi_k)]$$

$$J_k^+ = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \exp[(1-2n)(\xi - \xi_k)] = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc tg} [\exp(\xi - \xi_k)]$$

Отсюда

$$\theta_1 = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^2 (\theta_{0k} - \theta_{0k-1}) \operatorname{arc tg} [\exp(\xi - \xi_k)] \quad (-\infty \leq \xi \leq \infty)$$

Легко убедиться, что эта формула дает решение задачи при условии  $r_1 = 0$ .

§ 3. Рассмотрим течение жидкости через вертикальный уступ, полагая  $\theta_{00} = \theta_{02} = 0$ ,  $\theta_{01} = -1/2 \pi$ ,  $\xi_1 = -\beta$ ,  $\xi_2 = \beta$ . Тогда будем, в частности, иметь

$$r_1 = \alpha \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-\sigma_n(\xi + \beta)] - \exp[-\sigma_n(\xi - \beta)]}{1 - \alpha \sin^2(\pi\sigma_n/2)} \sin(\pi\sigma_n/2) + \\ + \frac{2\alpha\pi \operatorname{sh}(\pi\tau_0/2)}{1 + \alpha \operatorname{sh}^2(\pi\tau_0/2)} \sin \beta\tau_0 \cos \xi\tau_0 \quad \text{при } \beta \leq \xi \leq \infty$$

Для больших значений  $\xi$  (далеко от уступа вниз по течению) (3.1)

$$r_1 = \frac{2\alpha\pi \operatorname{sh}(\pi\tau_0/2)}{1 + \alpha \operatorname{sh}^2(\pi\tau_0/2)} \sin \beta\tau_0 \cos \xi\tau_0, \quad \theta_1 = -\frac{4 \operatorname{sh}(\pi\tau_0/2)}{\tau_0 [1 + \alpha \operatorname{sh}^2(\pi\tau_0/2)]} \sin \beta\tau_0 \sin \xi\tau_0$$

При  $0 \leq \alpha \leq 0.25$  с большой точностью можно принять  $1/2 \alpha\pi\tau_0 = \operatorname{cth}(\pi\tau_0/2) = 1$ . Следовательно,

$$\frac{2\alpha\pi \operatorname{sh}(\pi\tau_0/2)}{1 + \alpha \operatorname{sh}^2(\pi\tau_0/2)} = \frac{4 \operatorname{sh}(\pi\tau_0/2)}{\tau_0 [1 + \alpha \operatorname{sh}^2(\pi\tau_0/2)]} = \frac{2\alpha\pi \operatorname{sh}(1/\alpha)}{1 + \alpha \operatorname{sh}^2(1/\alpha)} \equiv k(\alpha)$$

и формулы (3.1) приводятся к виду

$$r_1 = k(\alpha) \sin \frac{2\beta}{\pi\alpha} \cos \frac{2\xi}{\pi\alpha}, \quad \theta_1 = -k(\alpha) \sin \frac{2\beta}{\pi\alpha} \sin \frac{2\xi}{\pi\alpha}$$

Приводим значения  $k$  для некоторых значений  $\alpha$ .

|            |         |         |         |         |         |         |   |
|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---|
| $\alpha =$ | $1/4$   | $1/5$   | $1/6$   | $1/7$   | $1/8$   | $1/9$   | 0 |
| $k =$      | 0.22909 | 0.08460 | 0.03114 | 0.01146 | 0.00422 | 0.00155 | 0 |

Из (1.3) имеем параметрические уравнения свободной поверхности вдали от уступа

$$x = \alpha H \int \exp(h \cos u) \cos(h \sin u) du \\ y = -\alpha H \int \exp(h \cos u) \sin(h \sin u) du \quad \left( h = k(\alpha) \sin \frac{2\beta}{\pi\alpha}, \quad u = \xi\tau_0 \right)$$

Учитывая, что  $h$  мало, удобно вычислять полученные интегралы, разлагая подынтегральные функции в ряды по степеням  $h$ . С точностью до  $h^2$  будем иметь

$$x = \alpha H (u + h \sin u + 1/4 h^2 \sin 2u), \quad y = \alpha H (h \cos u + 1/2 h^2 \cos 2u)$$

Отсюда следует, что длина волны  $\lambda$  и амплитуда  $\delta$  равны

$$\lambda = 2\pi\alpha H, \quad \delta = H\alpha k(\alpha) \left| \sin \frac{2\beta}{\pi\alpha} \right|$$

Таким образом, длина волны не зависит от высоты уступа, а величина  $\delta$  при монотонном изменении высоты уступа колеблется в пределах  $0 \leq \delta \leq H\alpha k(\alpha)$  (связь между высотой уступа и величиной  $\beta$  можно установить приближенно, решая задачу при условии  $r_1 = 0$ ). Совершенно аналогично можно исследовать обтекание жидкостью угла, полагая  $\xi_1 = \xi_2$ . При этом получим

$$\lambda = 2\pi\alpha H, \quad \delta = H \frac{|\theta_{00} - \theta_{01}|}{\pi} \alpha k(\alpha)$$

Вообще, для любого течения исследуемого типа выражение для длины волны  $\lambda$  остается неизменным.

Поступила 11 VIII 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л а м б Г. Гидродинамика. М.— Л., 1947.
2. W o o d s L. C. Compressible subsonic flow in two-dimensional channels with mixed boundary conditions. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, vol. 7, No. 3 (русск. перев.: Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., Изд. иностр. лит., 1956, № 1).
3. К и с е л е в О. М. Течение тяжелой жидкости через полигональное препятствие. Тр. Семинара по обратным краевым задачам, Казань, 1964, вып. 1.
4. V a n d e r P o l B., B r e m m e r H. Operational calculus based on the two-sided Laplace integral. Cambridge, 1950 (русск. перев.: В а н д е р П о л ь Б., Б р е м м е р Х. Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. Изд. иностр. лит., 1952).