Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

О ПРИМЕНЕНИИ ОБЩИХ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В. Ц. Гурович, К. П. Станюкович

(Москва)

Уравнения, описывающие движение сплошной проводящей среды в заданных электромагнитном и гравитационном полях, наиболее просто получаются варьированием соответствующих лагранжианов.

Вариационный принцип приводит в результате к скалярному уравнению второго порядка; это дает значительные преимущества для анализа движения среды по сравнению с анализом обычных уравнений сохранения импульса, массы и энергии.

Лагранжиан электромагнитного поля хорошо известен и имеет вид [1]

$$L_e = -F_{ik}F^{ik} / 16\pi, \qquad F_{ik} = \partial A_k / \partial x^i - \partial A_i / \partial x^k \tag{0.1}$$

Здесь F_{ik} и A_i — тензор и четырехпотенциал электромагнитного поля.

Для лагранжиана сплошной среды в случае изэнтропического квазипотенциального течения имеем [2]

$$L_m = p = (w - E) / v = [c \sqrt{-g^{ik}S_iS_k} - E] / v \tag{0.2}$$

Здесь S — действие для материи, E — массовая плотность энергии, v — удельный объем, p — давление, w — теплосодержание, g_{ik} — компоненты метрического тензора; далее

$$S_i = \partial S / \partial x^i, \qquad cS_i = wu_i \tag{0.3}$$

где c — скорость света, u_i — четырехскорость.

При установленном виде лагранжиана для сплошной среды уравнение движения будем искать так же, как и для поля

$$\frac{\partial}{\partial S}(\sqrt{-g}L_m) - \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial(\sqrt{-g}L_m)}{\partial S_k} = 0 \tag{0.4}$$

где g — детерминант метрического тензора g_{ik}. В случае наличия электромагнитного поля после вычисления производных надо заменить cS_i на $wu_i + (e / m) A_i$, где (e / m) — среднее отношение заряда к массе частиц.

Если электромагнитное поле отсутствует, то, подставляя в (0.4) выражение (0.2), получим уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\sqrt{-g}S^k}{vw} = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\sqrt{-g}u^k}{v} = 0 \tag{0.5}$$

Так как $v \sim (w - \alpha c^2)^{-1/(k-1)}$ при $pv^k = \text{const}$, то (0.2) можно записать в виде

$$L_m = p = \text{const}\left[-\alpha c + \sqrt{-g^{ik}S_iS_k}\right]^{\frac{k}{k-1}} \tag{0.6}$$

При этом из (0.4) получается аналогично более сложное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x^n}\left[\frac{\sqrt{-g}S^n}{\sqrt{-S_lS^l}}\left(\sqrt{-S_lS^l} - \alpha c\right)^{\frac{1}{k-1}}\right] = 0 \tag{0.7}$$

Удобней, однако, вместо (0.7) пользоваться звуковым уравнением. Для получения последнего запишем (0.5) в виде

$$\frac{S^n}{vw}\frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^n}+\frac{\partial (S^n / vw)}{\partial x^n}=0 \tag{0.8}$$

Так как

$$\frac{d \ln w}{d \ln v}=-\frac{\omega^2}{c^2} \tag{0.9}$$

где ω — релятивистская скорость звука, то из (0.8) найдем

$$2\frac{\omega^2}{c^2}(S_n S^n)\left(S_l{}^l+S^l\frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^l}\right)+\left(1-\frac{\omega^2}{c^2}\right)S^l\left(\frac{\partial S_n}{\partial x^l}S^n+\frac{\partial S^n}{\partial x^l}S_n\right)=0 \tag{0.10}$$

Уравнение (0.10) будет исходным при рассмотрении различных примеров движения релятивистской среды в специальной теории относительности (§ 1) и сферически симметричного движения в шварцшильдовском гравитационном поле (§ 2). Его исследование проводится методом характеристик.

Уравнением (0.10) удобно пользоваться и в отсутствие гравитационного поля, если вычисления проводятся в любой криволинейной системе координат.

§ **1.** Рассмотрим в качестве примеров использования уравнения (0.10) одноразмерные нестационарные волны (волны Римана) и двумерное плоское стационарное течение газа.

Воспользуемся для указанных задач галилеевой метрикой

$$ds^2=c^2dt^2-(dx^\alpha)^2, \quad -g_{00}=g_{11}=g_{22}=g_{33}=1 \qquad (\alpha=1,2,3) \tag{1.1}$$

Для выбранной метрики $\partial \ln \sqrt{-g} / \partial x^l=0$ и из (0.10) имеем

$$2\frac{\omega^2}{c^2}S_l{}^l(S_k S^k)+\left(1-\frac{\omega^2}{c^2}\right)S^l\left[\frac{\partial S_k}{\partial x^l}S^k+\frac{\partial S^k}{\partial x^l}S_k\right]=0 \tag{1.2}$$

В случае одномерного неустановившегося течения $l, k=0, 1$, причем для выбранной метрики $S_1=S^1$, а $S_0=-S^\circ$. При этом после элементарных преобразований из (1.2) найдем

$$\frac{\omega^2}{c^2}(S_{11}-S_{00})(S_1{}^2-S_0{}^2)+\left(1-\frac{\omega^2}{c^2}\right)(S_0{}^2S_{00}-2S_0S_1S_{01}+S_1{}^2S_{11})=0$$

Так как

$$S_{11}=\partial S_1 / \partial x, \qquad S_{00}=\partial S_0 / \partial \tau, \qquad \tau=ct$$

то из последнего уравнения найдем (1.3)

$$\frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}-\frac{\partial S_0}{\partial \tau}\right)(S_1{}^2-S_0{}^2)+\left(1-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\left(S_0{}^2\frac{\partial S_0}{\partial \tau}-2S_0S_1\frac{\partial S_1}{\partial \tau}+S_1{}^2\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)=0$$

Пользуясь известным приемом обращения переменных, можно от (1.3) перейти к линейному уравнению. Разделим для этого (1.3) на якобиан $\partial(S_0, S_1) / \partial(\tau, x)$, предполагая его вначале отличным от нуля.

При этом получим (1.4)

$$\frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\partial \tau}{\partial S_0}-\frac{\partial x}{\partial S_1}\right)(S_1{}^2-S_0{}^2)+\left(1-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\left(S_0{}^2\frac{\partial x}{\partial S_1}+2S_0S_1\frac{\partial \tau}{\partial S_1}+S_1{}^2\frac{\partial \tau}{\partial S_0}\right)=0$$

Действие S представляет собой квазипотенциал [2], поэтому $\partial S_0 / \partial x = \partial S_1 / \partial \tau$. Это равенство можно записать в форме равенства якобианов, которое после деления на $\partial (S_0, S_1) / \partial (\tau, x)$ дает

$$-\frac{\partial \tau}{\partial S_1} = \frac{\partial x}{\partial S_0} \tag{1.5}$$

Целесообразно для дальнейшего ввести такую функцию Ψ, чтобы

$$\tau = \partial \Psi / \partial S_0 = \Psi_0, \qquad x = \partial \Psi / \partial S_1 = \Psi_1 \tag{1.6}$$

Тогда (1.4) примет вид (1.7)

$$\frac{\omega^2}{c^2}(\Psi_{00} - \Psi_{11})(S_1^2 - S_0^2) + \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)(S_0^2 \Psi_{11} + S_1^2 \Psi_{00} + 2 S_0 S_1 \Psi_{01}) = 0$$

В случае равенства нулю якобиана $\partial (S_0, S_1) / \partial (\tau, x)$ обращение переменных в уравнении (1.3) невозможно. Однако сам факт равенства нулю якобиана означает, что $S_0 = f(S_1)$. При этом

$$\frac{\partial (S_1, S_0)}{\partial (x, \tau)} = \frac{\partial S_1}{\partial x}\frac{\partial S_0}{\partial \tau} - \frac{\partial S_1}{\partial \tau}\frac{\partial S_0}{\partial x} = 0$$

которое в силу равенства $\partial S_0 / \partial x = \partial S_1 / \partial \tau$ примет вид

$$\frac{dS_0}{dS_1}\frac{\partial S_1}{\partial x} - \frac{\partial S_1}{\partial \tau} = 0 \tag{1.8}$$

Решение последнего уравнения есть

$$x + \tau dS_0 / dS_1 = F(S_1) \tag{1.9}$$

где $F(S_1)$ — произвольная функция S_1, определяемая из граничных условий. Чтобы определить вид функции $S_0 = f(S_1)$, воспользуемся равенствами

$$\frac{\partial S_0}{\partial x} = \frac{dS_0}{dS_1}\frac{\partial S_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial S_0}{\partial \tau} = \frac{dS_0}{dS_1}\frac{\partial S_1}{\partial \tau}$$

при помощи которых из (1.3) найдем

$$\frac{\partial S_1}{\partial x}\left[\frac{\omega^2}{c^2}(S_1^2 - S_0^2) + \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)S_1^2\right] + \frac{\partial S_1}{\partial \tau}\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)S_0^2 \frac{dS_0}{dS_1} - \right.$$
$$\left. - \frac{\omega^2}{c^2}\frac{dS_0}{dS_1}(S_1^2 - S_0^2) - 2 S_0 S_1 \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\right] = 0$$

Отсюда с учетом (1.8) получим уравнение для определения S_0 как функции S_1

$$\left(\frac{dS_0}{dS_1}\right)^2\left(S_1^2 - S_0^2 \frac{c^2}{\omega^2}\right) + 2\left(\frac{c^2}{\omega^2} - 1\right) S_1 S_0 \frac{dS_0}{dS_1} + \left(S_0^2 - \frac{c^2}{\omega^2} S_1^2\right) = 0 \tag{1.10}$$

Прежде чем решать (1.10), рассмотрим уравнение плоского стационарного течения релятивистского газа. Последнее по форме будет совпадать с уравнениями для одномерного неустановившегося потока. Записывая эти уравнения совместно, будем искать общее решение рассматриваемых задач.

В случае стационарного течения функцию действия, как известно, можно записать в виде

$$S = -w_0 t + S(x^\alpha) \tag{1.11}$$

Здесь $a_{1,2}$ — компоненты обычной скорости

$$cS_0 = -w_0 = -w / \theta, \qquad S_1 = w_0 a_1 / c^2, \qquad S_2 = w_0 a_2 / c^2$$

$$\theta = \sqrt{1 - a^2 / c^2} \tag{1.12}$$

Подставив (1.11) в (1.2) и учитывая, что (см. (1.12))

$$S_0{}^\circ = -S_{00} = 0, \qquad S_1 = S^1, S_2 = S^2, \qquad S_0 S^\circ = -S_0{}^2 = -w_0{}^2 / c^2$$

найдем уравнение для плоского стационарного течения

$$\frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial y}\right)\left(S_1{}^2 + S_2{}^2 - \frac{w_0{}^2}{c^2}\right) +$$
$$+ \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\left(\frac{\partial S_1}{\partial x} S_1{}^2 + \frac{\partial S_2}{\partial y} S_2{}^2 + 2S_1 S_2 \frac{\partial S_2}{\partial x}\right) = 0 \tag{1.13}$$

Здесь использовалось равенство

$$\partial S_2 / \partial x = \partial S_1 / \partial y \tag{1.14}$$

Обращая в (1.13) переменные и вводя, в силу (1.14), функцию Ψ так, что $x = \partial\Psi / \partial S_1 = \Psi_1$, $y = \partial\Psi / \partial S_2 = \Psi_2$, получим

$$\frac{\omega^2}{c^2}(\Psi_{22} + \Psi_{11})\left(S_1{}^2 + S_2{}^2 - \frac{w_0{}^2}{c^2}\right) +$$
$$+ \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)(S_1{}^2\Psi_{22} + S_2{}^2\Psi_{11} - 2S_1 S_2 \Psi_{12}) = 0 \tag{1.15}$$

В случае, если якобиан $\partial(S_1, S_2) / \partial(x, y) = 0$ обращение переменных в (1.13) невозможно. Тогда, аналогично рассмотренному ранее случаю, имеем

$$x + y\, dS_2 / dS_1 = F(S_1) \tag{1.16}$$

а функция $S_2 = f(S_1)$ находится из уравнения

$$\left(\frac{dS_2}{dS_1}\right)^2\left(S_1{}^2 + \frac{c^2}{\omega^2} S_2{}^2 - \frac{w_0{}^2}{c^2}\right) + 2S_1 S_2\left(\frac{c^2}{\omega^2} - 1\right)\frac{dS_2}{dS_1} +$$
$$+ \left(S_2{}^2 + \frac{c^2}{\omega^2} S_1{}^2 - \frac{w_0{}^2}{c^2}\right) = 0 \tag{1.17}$$

Теперь уравнения для одномерного неустановившегося (1.7) и двумерного стационарного течений (1.15) можно записать в виде одного уравнения

$$\frac{\omega^2}{c^2}(\Psi_{\beta\beta} \pm \Psi_{11})\left(S_1{}^2 \pm S_\beta{}^2 - \frac{\beta}{2}\frac{w_0{}^2}{c^2}\right) +$$
$$+ \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)(S_1{}^2\Psi_{\beta\beta} + S_\beta{}^2\Psi_{11} \mp 2S_1 S_\beta \Psi_{1\beta}) = 0 \tag{1.18}$$

Верхние знаки в (1.18) соответствуют плоскому стационарному течению, когда $\beta = 2$, $x_\beta = y$, $S_\beta = S_2$, нижние — одномерному неустановившемуся течению, когда $\beta = 0$, $x_0 = \tau$, $S_\beta = S_0$.

Введем далее обозначение (см. (1.12))

$$S_1^2 + S_2^2 = w_0^2 (a_1^2 + a_2^2) / c^4 = w_0^2 a^2 / c^4 = c^2 z^2 \qquad (1.19)$$

где $z = w_0 |a| / c^3$.

Для (1.18) целесообразно теперь ввести следующие подстановки

$$\begin{aligned} &S_1 = cz\sin\varphi, && \frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1}{a_2} = \operatorname{tg}\varphi \quad (\beta = 2) \\ &S_2 = cz\cos\varphi, && \\ &S_0 = -cz\operatorname{ch}\varphi, && -\frac{S_1}{S_0} = \frac{a}{c} = \operatorname{th}\varphi, \quad \frac{w^2}{c^2} = S_1^2 - S_0^2 = c^2 z^2 \quad (\beta = 0) \\ &S_1 = cz\operatorname{sh}\varphi, && \end{aligned} \qquad (1.20)$$

Уравнение (1.18) в новых переменных (1.20) примет вид

$$\frac{\omega^2}{c^2} z^2 \Psi_{zz} + z\Psi_z \pm \Psi_{\varphi\varphi} = \frac{\beta}{2} \frac{\omega^2}{z^2 c^2} \left(\frac{w_0}{c^2}\right)^2 (\Psi_{zz} z^2 + \Psi_z z \pm \Psi_{\varphi\varphi}) \qquad (1.21)$$

причем

$$x = \Psi_z \sin\varphi + \Psi_\varphi \cos\varphi / z, \qquad y = \Psi_z \cos\varphi - \Psi_\varphi \sin\varphi / z \quad (\beta = 2)$$

$$x = -\Psi_z \operatorname{sh}\varphi + \Psi_\varphi \operatorname{ch}\varphi / z, \qquad \tau = -\Psi_z \operatorname{ch}\varphi + \Psi_\varphi \operatorname{sh}\varphi / z \quad (\beta = 0)$$

Введением подстановки $\xi = \ln z$ уравнение (1.21) значительно упрощается

$$\frac{\omega^2}{c^2} \Psi_{\xi\xi} + \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \Psi_\xi \pm \Psi_{\varphi\varphi} = \frac{\beta}{2z^2} \frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{w_0}{c^2}\right)^2 (\Psi_{\xi\xi} \pm \Psi_{\varphi\varphi}) \qquad (1.22)$$

Уравнение (1.22) можно решить методом характеристик.

Перейдем теперь к отысканию особых решений совместного уравнения двух рассматриваемых задач. Объединяя (1.10) и (1.17), получим

$$\left(\frac{dS_\beta}{dS_1}\right)^2 \left[S_1^2 \pm \left(\frac{c^2}{\omega^2} S_\beta^2 - \frac{\beta}{2} \frac{\omega_0^2}{c^2}\right)\right] + 2S_1 S_\beta \left(\frac{c^2}{\omega^2} - 1\right) \frac{dS_\beta}{dS_1} +$$

$$+ \left[S_\beta^2 \pm \left(\frac{c^2}{\omega^2} S_1^2 - \frac{\beta}{2} \frac{w_0^2}{c^2}\right)\right] = 0 \qquad (1.23)$$

Находя корни квадратного относительно dS_β / dS_1 уравнения (1.23), в случае $\beta = 0$ и $cS_0 = -w / \theta$, $cS_1 = wa / c\theta$ найдем

$$-\frac{dS_0}{dS_1} = \frac{a / c \pm \omega / c}{1 \pm a\omega / c^2} \qquad (1.24)$$

Подставив полученный результат в (1.9), имеем

$$x = \frac{a / c \pm \omega / c}{1 \pm a\omega / c^2} + F(a) \qquad (1.25)$$

последнее есть, как известно, уравнение Римановских релятивистских волн.

При $\beta = 2$ из (1.23), согласно (1.12),

$$\frac{dS_2}{dS_1} = \frac{da_y}{da_x} = \left\{-\frac{a_x a_y}{c^2}\left(\frac{c^2}{\omega^2} - 1\right) \pm \left[\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)\left(\frac{a^2}{\omega^2} - 1\right)\right]^{1/2}\right\} \left(\frac{a_x^2}{c^2} + \frac{a_y^2}{\omega^2} - 1\right)^{-1} \qquad (1.26)$$

Здесь предполагается $|a| > \omega$.

Так как $\omega = \omega(w) = \omega(\theta w_0) = \omega(a)$, то из (1.26) можно определить a_y как функцию a_x. Подставив найденную функцию $da_y / da_x = B(a_x)$ в (1.16), находим решение для обобщенного течения Прандтля — Майера

$$x + yB(a_x) = F(a_x) \tag{1.27}$$

Покажем в заключение этого параграфа, как из уравнения (1.21) осуществляется переход к обычному (нерелятивистскому) уравнению для течения газа.

В случае $\beta = 0$ из (1.21) имеем

$$\frac{\omega^2}{c^2} z^2 \Psi_{zz} + z\Psi_z = \Psi_{\varphi\varphi} \tag{1.28}$$

В случае нерелятивистского течения газа

$$\begin{gathered} z = w / c^2 = 1 + i / c^2, \qquad \varphi = \operatorname{Ar\,th} a / c \\ dz = di / c^2, \qquad d\varphi \approx d(a / c) \quad (a \ll c) \end{gathered} \tag{1.29}$$

С учетом (1.29) уравнение (1.28) напишем в виде

$$\omega^2 c^2 (1 + 2i / c^2) \Psi_{ii} + (1 + i / c^2) c^2 \Psi_i = c^2 \Psi_{aa}$$

Отсюда при $c \to \infty$ имеем известное уравнение Римана

$$\omega^2 \Psi_{ii} + \Psi_i = \Psi_{aa} \tag{1.30}$$

особое решение которого есть

$$x = (a \pm \omega) t + F(a), \qquad da \pm \omega\, d \ln v = 0 \tag{1.31}$$

В случае $\beta = 2$ из (1.21) имеем

$$\frac{\omega^2}{c^2} \Psi_{zz} z^2 + \Psi_z z + \Psi_{\varphi\varphi} = \frac{\omega^2}{z^2 c^2} \left(\frac{w_0}{c^2}\right)^2 (\Psi_{zz} z^2 + \Psi_z z + \Psi_{\varphi\varphi}) \tag{1.32}$$

При $a \ll c$, так как $w_0 / c^2 \approx 1$, из (1.19) следует, что $z \approx a / c$.

Используя указанные предельные значения для w_0 и z, получим из (1.32) известное уравнение, описывающее стационарное течение газа

$$(\Psi_a a + \Psi_{\varphi\varphi})(1 - \omega^2 / a^2) = \omega^2 \Psi_{aa} \tag{1.33}$$

При $a \ll c$ из (1.26) имеем

$$da_y / da_x = (- a_x a_y \pm \omega \sqrt{a^2 - \omega^2}) / (a_y^2 - \omega^2) \tag{1.34}$$

Подставляя (1.34) в (1.27) и полагая $F(a_x) = 0$, получим решение Прандтля — Майера

$$x / y = - da_y / da_x = (a_x a_y \mp \omega \sqrt{a^2 - \omega^2}) / (a_y^2 - \omega^2) \tag{1.35}$$

§ 2. Пространственно-временной интервал в шварцшильдовском гравитационном поле может быть записан в виде

$$ds = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r_0/r} - r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) \tag{2.1}$$

т. е. компоненты метрического тензора равны [1]

$$g_{00} = -(1 - r_0 / r), \qquad g_{22} = r^2$$
$$g_{11} = (1 - r_0 / r)^{-1}, \qquad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta \tag{2.2}$$

Для получения уравнения движения снова воспользуемся уравнением (0.10), в котором следует учесть, что

$$S_l{}^l = \frac{\partial}{\partial x^l} (g^{il} S_i)$$

тогда будем иметь

$$\frac{\omega^2}{c^2}\left[S_1{}^2\left(1-\frac{r_0}{r}\right)-\frac{S_0{}^2}{1-r_0/r}\right]\left[S_{11}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)-\frac{S_{00}}{1-r_0/r}+\frac{2S_1}{r}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\right]+$$
$$+\left(1-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\left\{S_{11}S_1\left(1-\frac{r_0}{r}\right)^2-2S_0S_1S_{10}+\frac{S_0{}^2S_{00}}{(1-r_0/r)^2}+\frac{S_1(1-r_0/r)r_0}{2r^2}\times\right.$$
$$\left.\times\left[S_1{}^2+\frac{S_0{}^2}{(1-r_0/r)^2}\right]\right\}=0 \tag{2.3}$$

$$S_{11} = \frac{\partial}{\partial r} S_1, \qquad S_{00} = \frac{\partial}{\partial x^0} S_0, \qquad cS_1 = wu_1, \qquad cS_0 = wu_0$$

Здесь w — релятивистское теплосодержание, u_i — четырехскорость. Величина r_0 — есть гравитационный радиус массы, создающей гравитационное поле. Для упрощения уравнения (2.3) введем новую независимую переменную

$$d\xi = dr / (1 - r_0 / r) \tag{2.4}$$

Тогда

$$\left(1-\frac{r_0}{r}\right)S_1 = S_\xi, \qquad \left(1-\frac{r_0}{r}\right)^2 S_{11} = S_{\xi\xi} - \frac{r_0}{r^2} S_\xi$$

После элементарных преобразований (2.3) примет вид

$$\frac{\omega^2}{c^2}(S_\xi{}^2 - S_0{}^2)(S_{\xi\xi} - S_{00}) + \left(1-\frac{\omega^2}{c^2}\right)(S_{\xi\xi}S_\xi{}^2 - 2S_0S_\xi S_{0\xi} + S_{00}S_0{}^2) +$$
$$+\frac{2S_\xi}{r}(S_\xi{}^2 - S_0{}^2)\left[\frac{\omega^2}{c^2} - \left(1+3\frac{\omega^2}{c^2}\right)\frac{r_0}{4r}\right] = 0 \tag{2.5}$$

Это уравнение может быть легко исследовано при помощи характеристик, которые имеют вид

$$\xi^{\cdot 2}\left(\frac{\omega^2}{c^2}B^2 - A^2\right) - 2\xi^{\cdot}AB\left(1-\frac{\omega^2}{c^2}\right) - \left(B^2 - A^2\frac{\omega^2}{c^2}\right) = 0 \tag{2.6}$$

а условие на характеристике

$$A^{\cdot}\xi^{\cdot}\left(\frac{\omega^2}{c^2}B^2 - A^2\right) + D\xi^{\cdot} = B^{\cdot}\left(B^2 - A^2\frac{\omega^2}{c^2}\right) \tag{2.7}$$

Здесь

$$A = S_0, \qquad B = S_\xi, \qquad D = \frac{2B}{r}(B^2 - A^2)\left[\left(1+3\frac{\omega^2}{c^2}\right)\frac{r_0}{4r} - \frac{\omega^2}{c^2}\right]$$

и точка означает полную производную по времени $x^0 = ct$.

Преобразуем (2.6) и (2.7) к виду, сходному с аналогичными выражениями для характеристик и условий на них в специальной теории относительности.

Для этого A и B запишем в виде

$$\begin{gathered} A = S_0 = g_{00}u^\circ w / c = -w^* / c\theta \\ B = S_\xi = (1 - r_0 / r) S_1 = (1 - r_0 / r) g_{11}wu^1 / c = w^*a / c^2\theta \end{gathered} \tag{2.8}$$

Здесь

$$\theta = \sqrt{1 - a^2 / c^2}, \qquad w^* = \sqrt{1 - r_0 / r}\, w, \qquad a = \sqrt{v_1 v^1} \tag{2.9}$$

а v^1 — обычная скорость, измеренная в собственном времени [1]. Используя соотношения (2.8), из уравнения характеристик (2.6) найдем

$$\frac{d\xi}{dx^\circ} = \frac{a / c \pm \omega / c}{1 \pm \omega a / c^2} \tag{2.10}$$

Из полученного соотношения виден основной эффект приближения к шварцшильдовской сфере. Действительно, при движении газа к центру ($a \to -a$) из (2.10) найдем

$$\xi - \xi' = (r - r') + r_0 \ln\left(\frac{r - r_0}{r' - r_0}\right) = -\int\limits_{x_0'}^{x_0} \frac{a / c \pm \omega / c}{1 \pm \omega a / c^2}\, dx^\circ$$

где r' — значение координаты в момент времени $x_0' = ct'$.

Ввиду конечности подынтегрального выражения имеем, что

$$t \approx -\frac{r_0}{c} \ln\left|\frac{r}{r_0} - 1\right| \to \infty \qquad \text{при } r \to r_0$$

Последнее означает, что любое возмущение, распространяющееся по характеристикам, достигает шварцшильдовской сферы за бесконечное для внешнего наблюдателя время.

Условие на характеристиках (2.7) с использованием (2.8) — (2.10) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\ln w^* - \frac{2a}{(1 \pm \omega a/c^2)\, r}\left[\left(1 + 3\frac{\omega^2}{c^2}\right)\frac{r_0}{4r} - \frac{\omega^2}{c^2}\right] \pm \frac{1}{\theta^2}\frac{\omega}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{a}{c}\right) = 0 \tag{2.11}$$

Эти условия имеют место вдоль характеристик (2.10).

Таким образом, решение уравнений, описывающих движения газа, методом характеристик в шварцшильдовском поле, не представляет труда.

В (2.10) и (2.11) произведем предельный переход к уравнению движения нерелятивистского газа в поле тяжести. Для этого заметим, что

$$\frac{d \ln w^*}{dt} = \frac{d \ln w}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d \ln (1 - r_0 / r)}{dt}, \qquad \frac{d \ln w}{a \ln v} = -\frac{\omega^2}{c^2}$$

Тогда уравнение характеристик (2.10) принимает вид $r^\cdot = a \pm \omega$, а условие на характеристиках [3]

$$da \pm (2a\omega\, dt / r - \omega\, d \ln v) - g\, dt = 0, \qquad g = -kM / r^2$$

Здесь v — удельный объем, ω — скорость звука, g — ускорение силы тяжести.

Поступила 6 V 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Физматгиз, 1960.
2. Станюкович К. П. Лагранжиан сплошной среды в римановом пространстве. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 2.
3. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. Гостехиздат, 1955.