ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГАЗОДИНАМИКИ КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

В. А. Рыков

(Москва)

Рассматривается система уравнений магнитной газодинамики, описывающая плоские нестационарные течения в магнитном поле, перпендикулярном плоскости течения. Для отношения $\gamma = c_p / c_v = 2$ указывается преобразование, зависящее от одной произвольной функции времени, которое переводит систему уравнений магнитной газодинамики в такую же систему, но с некоторой внешней силой в уравнениях движения.

Каждому решению новой системы уравнений ставится в соответствие решение исходной системы уравнений.

В качестве примера рассматривается точное решение, описывающее сжатие плазменного цилиндра конечной проводимости.

§ 1. Уравнения магнитной газодинамики идеальной сжимаемой жидкости с конечной проводимостью в поперечном магнитном поле $\mathbf{H}$ (0, 0, H) имеют вид [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H^2}{8\pi}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{H^2}{8\pi}\right)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u\frac{\partial H}{\partial x} + v\frac{\partial H}{\partial y} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \nu_m \Delta H \qquad \left(\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\right) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + 2p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\nu_m}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right]$$

Здесь t — время, p — давление, ρ — плотность, x, y — прямоугольные декартовы координаты, u, v — компоненты вектора скорости, H — напряженность магнитного поля, σ — проводимость.

Введем новые переменные и новые функции при помощи соотношений

$$\xi = f(t)\, x, \quad \eta = f(t)\, y, \quad \tau = \int_{t_0}^{t} f^2(t)\, dt, \quad \rho_1 = \frac{\rho}{f^2}, \quad H_1 = \frac{H}{f^2}$$

$$p_1 = \frac{p}{f^4}, \qquad u_1 = \frac{u}{f} + \frac{f'}{f^2}x, \qquad v_1 = \frac{v}{f} + \frac{f'}{f^2}y \tag{1.2}$$

Для операций дифференцирования имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} = f\frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = f\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = f^2\frac{\partial}{\partial \tau} + xf'\frac{\partial}{\partial \xi} + yf'\frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} = f^2\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + u_1\frac{\partial}{\partial \xi} + v_1\frac{\partial}{\partial \eta}\right) \tag{1.3}$$

Если воспользоваться этими соотношениями, то систему уравнений (1.1) для новых искомых функций в новых переменных можно записать так:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \tau} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(p_1 + \frac{H_1{}^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{f}\frac{d^2 f}{d\tau^2}\xi$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau} + u_1\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(p_1 + \frac{H_1{}^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{f}\frac{d^2 f}{d\tau^2}\eta$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + u_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + v_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} + \rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right) = 0$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial \tau} + u_1 \frac{\partial H_1}{\partial \xi} + v_1 \frac{\partial H_1}{\partial \eta} + H_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right) = \nu_m \Delta H_1 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial \tau} + u_1 \frac{\partial p_1}{\partial \xi} + v_1 \frac{\partial p_1}{\partial \eta} + 2p_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right) = \frac{\nu_m}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial H_1}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_1}{\partial \eta} \right)^2 \right]$$

Система уравнений магнитной газодинамики (1.1) перешла в такую же систему уравнений, но с некоторой объемной внешней силой в уравнениях движения.

Система уравнений (1.1) описывает движение проводящего газа в тех областях, где движение непрерывно. Если в области движения существует поверхность разрыва, то решения уравнений (1.1) по обе стороны поверхности должны сопрягаться при помощи определенных соотношений. При конечной проводимости напряженность магнитного поля должна быть всюду непрерывной $[\mathbf{H}] = 0$; при переходе через поверхность должна быть непрерывна касательная составляющая напряженности электрического поля, $[\mathbf{E}_\tau] = 0$ (квадратные скобки обозначают, что берется разность значений с обеих сторон поверхности разрыва).

Пусть $F(t, x, y) = 0$ — уравнение поверхности сильного разрыва. На этой поверхности должны выполняться условия динамической совместности

$$\left[\rho \left(\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right] = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} \right) [\mathbf{V}] = -[p] \left(\frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{j} \right) \tag{1.5}$$

$$\rho \left(\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} \right) \left[\frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} + \frac{p}{\rho} \right] = -\left[p \left(u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right]$$

Условие $[\mathbf{E}_\tau] = 0$ можно записать так:

$$\left[H \left(\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right] = \left[\nu_m \left(\frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} \right) \right] \tag{1.6}$$

При преобразовании (1.2) поверхность сильного разрыва $F(t, x, y) = 0$ в новых переменных τ, ξ, η запишется как $F_1(\tau, \xi, \eta) = 0$, где F_1 таково, что

$$F_1 \left(\int\limits_{t_0}^{t} f^2 \, dt, \ fx, \ fy \right) = F(t, x, y)$$

Пользуясь соотношениями (1.2) и (1.3), легко показать, что условия (1.5) и (1.6) остаются инвариантными при преобразовании (1.2). Результат можно получить, переписав (1.5) и (1.6), заменяя t, x, y на τ, ξ, η и ρ, u, v, $\mathbf{V}$, p, H, F на ρ_1, u_1, v_1, $\mathbf{V}_1$, p_1, H_1, F_1.

Остаются также инвариантными условие непротекания сквозь твердую стенку и условие на контактном разрыве.

Из сказанного выше следует, что каждому решению системы уравнений (1.4), описывающему некоторое движение в поле действия внешних объемных сил, можно поставить в соответствие некоторое решение системы уравнений (1.1).

Если определять f из условия $d^2 f / d\tau^2 = 0$, получим инвариантность не только граничных условий, но и системы уравнений магнитной газодинамики. Инвариантные преобразования уравнений газодинамики рассмотрены в [2, 3].

Необходимо еще заметить, что в области течения могут присутствовать только диэлектрические тела и тела, обладающие бесконечной проводимостью. При конечной проводимости магнитное поле внутри тела описывается уравнением, которое не инвариантно при преобразовании (1.2), поэтому такие тела исключаются из рассмотрения.

§ 2. В качестве простейшего примера, дающего решение системы уравнений (1.4), рассмотрим равновесие проводящего кругового цилиндра, ограниченного диэлектрической стенкой и находящегося в магнитном поле. Магнитные силовые линии параллельны оси цилиндра. Так как равновесие осесимметрично, то перейдем в системе уравнений (1.4) к полярным координатам и будем считать все величины не зависящими от угла.

Полагая компоненты скорости равными нулю, получим систему уравнений равновесия [1]

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(p_1+\frac{H_1^2}{8\pi}\right)=\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\rho_1\zeta,\qquad \frac{\partial\rho_1}{\partial\tau}=0$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial\tau}=\frac{\nu_m}{\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta\frac{\partial H_1}{\partial\zeta}\right),\qquad \frac{\partial p_1}{\partial\tau}=\frac{\nu_m}{4\pi}\left(\frac{\partial H_1}{\partial\zeta}\right)^2\qquad (\zeta^2=\xi^2+\eta^2)\tag{2.1}$$

Система уравнений (2.1), вообще говоря, будет переопределенной, но все же можно найти частные решения, которые будут удовлетворять всем уравнениям. Решение H_1 ищем в виде

$$H_1=e^{a\tau}h(\zeta).$$

Подставляя в третье уравнение системы (2.1), получим

$$\frac{d^2h}{d\zeta^2}+\frac{1}{\zeta}\frac{dh}{d\zeta}-\varkappa^2h=0\qquad\left(\varkappa^2=\frac{a}{\nu_m},\ a>0\right)\tag{2.2}$$

Решением этого уравнения, ограниченным в начале координат, будет функция Бесселя мнимого аргумента $I_0(\varkappa\zeta)$. Тогда

$$H_1=c_1I_0(\varkappa\zeta)e^{a\tau}\tag{2.3}$$

Здесь c_1 произвольная постоянная.

Величины p_1 и ρ_1 легко определяются из оставшихся уравнений и имеют вид

$$p_1=p_0+\frac{e^{2a\tau}}{8\pi}c_1^2I_1^2(\varkappa\zeta),\qquad \rho_1=\frac{2c_1^2\varkappa}{B\zeta}I_1(\varkappa\zeta)\left[\frac{3}{2}I_0(\varkappa\zeta)+\frac{1}{2}I_2(\varkappa\zeta)\right]\tag{2.4}$$

где B — положительная произвольная постоянная. При этом $f(\tau)$ должно удовлетворять уравнению

$$d^2f/d\tau^2-Be^{2a\tau}f=0$$

Одно из решений этого уравнения возьмем в виде

$$f(\tau)=c_3I_0(\beta e^{a\tau})\qquad(\beta=\sqrt{B}/a)\tag{2.5}$$

Полученное решение описывает следующее «равновесное» состояние фиктивной среды. Внутри цилиндра некоторого радиуса ζ_0 покоится проводящий газ, плотность которого распределена по закону (2.4). Проводящий газ ограничен твердыми диэлектрическими стенками. В момент времени $\tau=-\infty$ давление во всем цилиндре постоянно и равно p_0, напряженность магнитного поля равна нулю, объемная внешняя сила отсутствует. Затем в области $\zeta\geqslant\zeta_0$ появляется магнитное поле и возрастает по закону $H_1=c_1I_0(\varkappa\zeta_0)e^{a\tau}$. Внутри области $\zeta\leqslant\zeta_0$ магнитное поле определяется формулой (2.3). Одновременно с магнитным полем начинает действовать и объемная сила, которая уравновешивается градиентами магнитного и гидродинамического давлений. Гидродинамическое давление p_1, определяемое формулой (2.4), непрерывно возрастает из-за нагрева газа путем джоулевой диссипации.

Теперь посмотрим, какое решение системы уравнений (1.1) соответствует полученному решению системы уравнений (1.4).

[1] Равновесие имеет место для введенной фиктивной среды с параметрами u_1, H_1, $p_1\ldots$, тогда как реальная среда находится в движении, которое определится далее.

Для того чтобы перейти от полученного решения к решению системы уравнений (1.1), воспользуемся соотношениями (1.2), записанными для рассматриваемого случая

$$\zeta = fr, \quad \tau = \int_{t_0}^{t} f^2\, dt, \quad \rho = f^2\rho_1, \quad H = f^2 H_1, \quad p = f^4 p_1$$

$$w = -\frac{f'}{f} r \qquad (w^2 = u^2 + v^2)$$

Выражение f через τ дается формулой (2.5). Решение запишется так:

$$w = -a\beta c_3^2 e^{a\tau} I_0(\beta e^{a\tau}) I_1(\beta e^{a\tau}) r, \qquad H = c_1 c_3^2 e^{a\tau} I_0^2(\beta e^{a\tau}) I_0[\varkappa c_3 I_0(\beta e^{a\tau}) r]$$

$$p = c_3^4 I_0^4(\beta e^{a\tau}) \left\{p_0 + \frac{c_1^2}{8\pi} e^{2a\tau} I_1^2 [\varkappa c_3 I_0(\beta e^{a\tau}) r]\right\}$$

$$\rho = \frac{c_3 c_1^2 \varkappa}{a^2\beta^2 r} I_0(\beta e^{a\tau}) I_1[\varkappa c_3 I_0(\beta e^{a\tau}) r] \{3 I_0 [\varkappa c_3 r I_0(\beta e^{a\tau})] + I_2[\varkappa c_3 I_0(\beta e^{a\tau}) r]\} \quad (2.6)$$

Переменная τ связана со временем t уравнением $d\tau / dt = f^2$. Интегрируя его, получим

$$t = \frac{1}{ac_3^2}\left[\frac{K_0(\beta)}{I_0(\beta)} - \frac{K_0(\beta e^{a\tau})}{I_0(\beta e^{a\tau})}\right] \qquad (\beta = \sqrt{B} / a) \quad (2.7)$$

Для определенности произвольная постоянная выбрана так, чтобы моменту времени $t = 0$ отвечало $\tau = 0$. Значению параметра $\tau = -\infty$ соответствует момент времени $t = -\infty$. Значению $\tau = +\infty$ соответствует момент времени

$$t = \frac{1}{ac_3^2} \frac{K_0(\beta)}{I_0(\beta)}$$

Решение системы уравнений (1.1), даваемое формулами (2.6) и (2.7), описывает следующее магнитогазодинамическое движение.

В момент времени $t = -\infty$ проводящий газ покоится внутри кругового цилиндра радиуса $r_0 = c_3\zeta_0$. Плотность газа распределена по закону, который можно получить, если в последнем выражении (2.6) положить $\tau = -\infty$. Давление по всему сечению постоянно и магнитное поле отсутствует. Затем в области $r \geqslant r_0$ появляется магнитное поле, возрастающее по закону, определяемому вторым выражением (2.6), в котором следует положить $r = f\zeta_0$. Магнитное поле, проникая внутрь проводящего газа, приводит его в движение

Распределение скоростей дается первой формулой равенств (2.6), которая описывает сжатие плазменного цилиндра. Закон движения диэлектрической стенки определяется равенством

$$r_c = c_3 I_0(\beta e^{a\tau}) \zeta_0 \qquad (c_3 > 0)$$

В момент времени

$$t = \frac{1}{ac_3^2} \frac{K_0(\beta)}{I_0(\beta)}$$

весь газ слетается в начало координат.

Поступила 13 VII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика, Физматгиз, 1962.
2. Никольский А. А. Инвариантные преобразования уравнений движения идеального газа для специальных случаев. Инж. ж., 1963, т. 3, № 1.
3. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Изд-во АН СССР, Сиб. отд., Новосибирск, 1962.