

$$\begin{aligned}
S = & \sum_{\mu=1}^m \left\{ \left( 1 - \sum_{k=1}^m a_{2\mu}^{(2k)} \right) z_{2\mu-1} \left[ Q^{(2\mu)} + \sum_{\nu=1}^m \left( P_{2\nu}^{(2\mu)} z_{2\nu} + a_{2\nu}^{(2\mu)} z_{\nu 2}^2 \right) \right] \right\} + \\
& + \sum_{\mu=1}^m \left[ 1 + \left( 1 - \sum_{k=1}^m a_{2\mu}^{(2k)} \right) z_{2\mu-1} \right] R^{(2\mu)} + \sum_{k=1}^m \sum_{\mu=1}^m U_{2\mu}^{(2k)} Z_{2k} + \\
& + \sum_{\mu=1}^m \left( 1 - \sum_{k=1}^m a_{2\mu}^{(2k)} \right) z_{2\mu} Z_{2\mu-1} + \sum_{k=1}^m \sum_{s=1}^n \frac{\partial W^{(2k)}}{\partial x_s} X_s + \\
& + \sum_{k=1}^m \sum_{\mu=1}^m \sum_{s=1}^n z_{2\mu} \frac{\partial U_{2\mu}^{(2k)}}{\partial x_s} X_s + \sum_{k=1}^m \sum_{\mu=1}^m \sum_{s=1}^n x_s \frac{\partial \psi_s^{(2k)}}{\partial z_{2\mu-1}} Z_{2\mu-1} + \\
& + \sum_{k=1}^m \sum_{s=1}^n \psi_s^{(2k)} R_s + \sum_{k=1}^m \sum_{\mu=1}^m \sum_{s=1}^n x_s z_{2\mu} \left[ \frac{\partial \psi_s^{(2k)}}{\partial z_{2\mu-1}} - \left( \frac{\partial \psi_s^{(2k)}}{\partial z_{2\mu-1}} \right)_0 \right]
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Из равенств (2.7) и (2.8) следует, что функция  $V$  удовлетворяет [теореме Н. Г. Четаева [4] о неустойчивости. Следовательно, при указанных выше условиях, решение (2.2), а с ним и решение (1.4), неустойчиво.

Поступила 24 IX 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л я п у н о в А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Изд. ЛГУ, 1963.
2. К а м е н к о в Г. В. Об устойчивости движения. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1939, № 9.
3. А б а н ь ш и н А. М. К устойчивости установившегося движения в случае  $k$  нулевых корней определяющего уравнения. Вестн. Ленингр. ун-та, 1960, № 13, серия мат., механ. и астрон., вып. 3.
4. Ч е т а е в Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, М., 1953.

### РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ СФЕРЫ НЕРАВНОМЕРНЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Н. Е. Храмов (Москва)

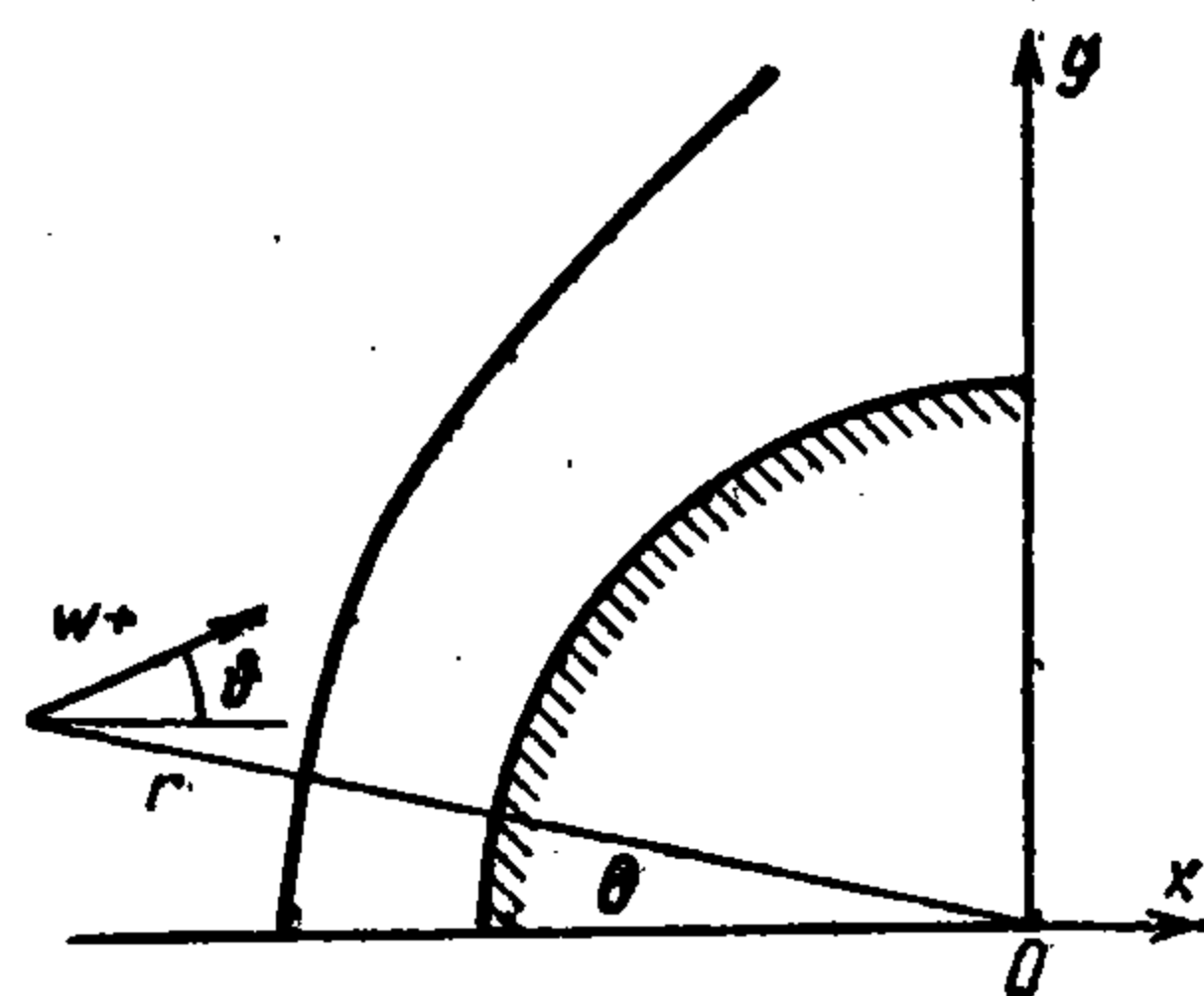
Приводятся результаты расчета обтекания сферы неравномерным потоком газа методом Дородницына — Белоцерковского [1-3].

1. Пусть на сферу набегают неравномерный сверхзвуковой поток (фиг. 1), симметричный относительно оси  $x$  и заданный в виде

$$w_+ = f_1(\theta, r), \quad \vartheta = f_2(\theta, r) \quad (x = -r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta) \tag{1.1}$$

Здесь  $w_+$  — значение модуля скорости в поле неравномерного потока,  $\vartheta$  — угол наклона скорости к оси симметрии,  $f_1, f_2$  — непрерывные функции сферических координат  $\theta$  и  $r$ . Требуется определить форму и положение ударной волны и смешанное течение в области влияния.

Отнесем скорость  $w$  к критической скорости  $a_*$ , плотность  $\rho$  — к плотности торможения в невозмущенном потоке  $\rho_0$ , давление  $P$  — к  $\rho_0 a_*^2$ , линейные размеры — к радиусу сферы. Тогда, вводя интеграл Бернулли и функцию тока  $\psi$ , систему уравнений газовой динамики в составляющих сферических координат можно представить [2] в следующем виде



Фиг. 1

$$\frac{\partial}{\partial r} [r^2 (P + \rho u^2) \sin \theta] + \frac{\partial}{\partial \theta} [r (\rho uv) \sin \theta] = r (2P + \rho v^2) \sin \theta \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau u \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \tau v \sin \theta) = 0, \quad \frac{d\psi}{d\theta} = r \rho \left( v \frac{dr}{d\theta} - r u \right) \sin \theta, \quad \varphi = \varphi(\psi)$$

$$P = \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} w^2 \right) \rho, \quad \rho = \left( \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \right)^{1/(\kappa-1)} \varphi^{1/(1-\kappa)}, \quad \tau = \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} w^2 \right)^{1/(\kappa-1)}$$

Здесь  $\varphi = P/\rho^\kappa$  — энтропийная функция;  $u, v$  — составляющие скорости вдоль  $r$  и  $\theta$ . Неизвестными функциями являются  $u, v, \varphi, \psi$ . Обозначив через  $\varepsilon$  расстояние вдоль луча  $\theta = \text{const}$  от сферы до ударной волны, будем иметь для него

$$d\varepsilon/d\theta = -(1 + \varepsilon) \text{ctg}(\theta + \sigma) \quad (1.3)$$

Граничные условия запишутся в следующем виде:

на теле  $r = 1$

$$u = 0, \quad \psi = 0, \quad \varphi = \varphi(0) = \text{const}$$

$$\left( \varphi(0) = \frac{2}{\kappa + 1} \frac{1}{w_+^{2\kappa}} \left\{ w_+^2 - \frac{(\kappa^2 - 1)}{4\kappa} \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} w_+^2 \right) \right\} \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} w_+^2 \right)^{-1} \right)$$

на ударной волне  $r = 1 + \varepsilon(\theta)$

$$u = w_y \sin \theta - w_x \cos \theta, \quad w_x = w_+ \cos(\sigma - \vartheta) \cos \sigma + \frac{\sin \sigma}{w_+ \sin(\sigma - \vartheta)} \beta$$

$$v = w_x \sin \theta + w_y \cos \theta, \quad w_y = w_+ \cos(\sigma - \vartheta) \sin \sigma - \frac{\cos \sigma}{w_+ \sin(\sigma - \vartheta)} \beta$$

$$P = \left[ \frac{2w_+^2 \sin^2(\sigma - \vartheta)}{\kappa + 1} - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} w_+^2 \right) \right] \gamma, \quad \rho = w_+^2 \sin^2(\sigma - \vartheta) \frac{\gamma}{\beta} \quad (1.4)$$

$$\beta = \left[ 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} w_+^2 \cos(\sigma - \vartheta) \right], \quad \gamma = \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} w_+^2 \right)^{1/(\kappa-1)}$$

Здесь  $\sigma$  — угол наклона ударной волны к оси симметрии,  $w_x, w_y$  — составляющие скорости  $w$  вдоль  $x$  и  $y$ .

2. Рассмотрим в качестве примера обтекание сферы потоком от пространственного источника. Течение от пространственного источника существует вне сферы радиуса  $r_*$ , на которой скорость достигает критического значения, тогда как вне ее для сверхзвукового источника скорость возрастает в бесконечности до  $M = \infty$ . Поместим источник на расстоянии  $C$  от начала координат в отрицательном направлении оси  $x$  (фиг. 1). Неравномерный поток непосредственно перед ударной волной представим как

$$\vartheta = \text{arc tg} \frac{(1 + \varepsilon) \sin \theta}{C - (1 + \varepsilon) \cos \theta}$$

$$w_+ = \frac{1}{d} \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{1/(\kappa-1)} \frac{\sin^2 \vartheta}{1/2 w_+ \sin^2 \theta} \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} w_+^2 \right)^{-1/(\kappa-1)} \quad (2.1)$$

Здесь  $d$  — отношение радиуса обтекаемой сферы к  $r_*$ .

Система (1.2), (1.3) решается методом интегральных соотношений. Область интегрирования разбивается на равноотстоящие по  $r$  полосы. Подынтегральные функции представляются интерполяционными полиномами по  $r$  с узлами интерполяций на границах полос. Аппроксимирующая система для  $n$ -го приближения схематично записывается так же как в [2],

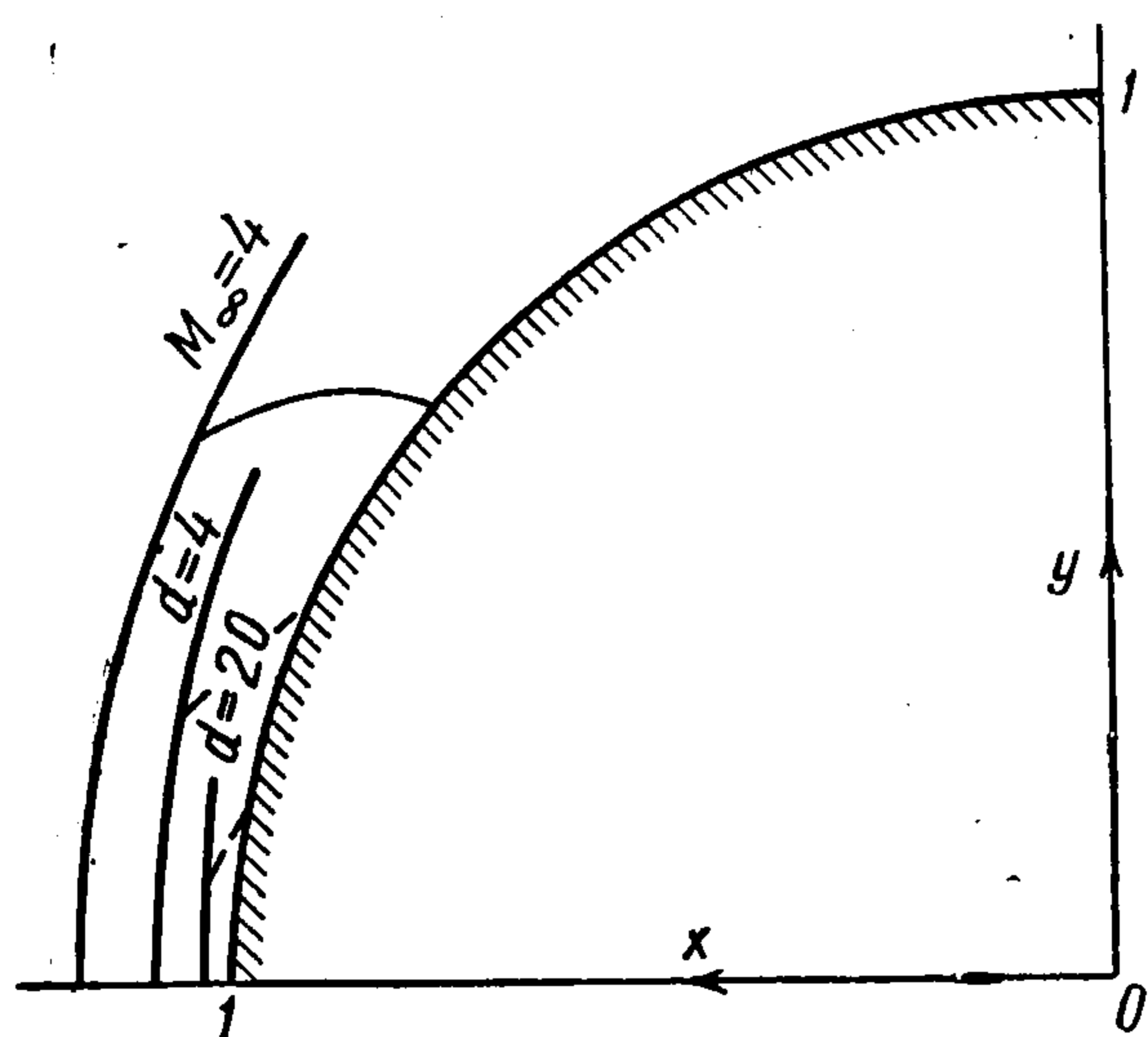
$$\frac{d\varepsilon}{d\theta} = -(1 + \varepsilon) \text{ctg}(\sigma + \theta), \quad \frac{d\sigma}{d\theta} = F, \quad \frac{du_i}{d\theta} = \Phi_i, \quad \frac{dv_0}{d\theta} = \frac{F_0}{1 - v_0^2}$$

$$\frac{dv_i}{d\theta} = F_i \left( w_i^2 - \frac{\kappa + 1 - 2u_i^2}{\kappa - 1} \right)^{-1}, \quad \frac{d\psi_i}{d\theta} = r_i \rho_i \left( v_i \frac{dr_i}{d\theta} - r_i u_i \right) \sin \theta$$

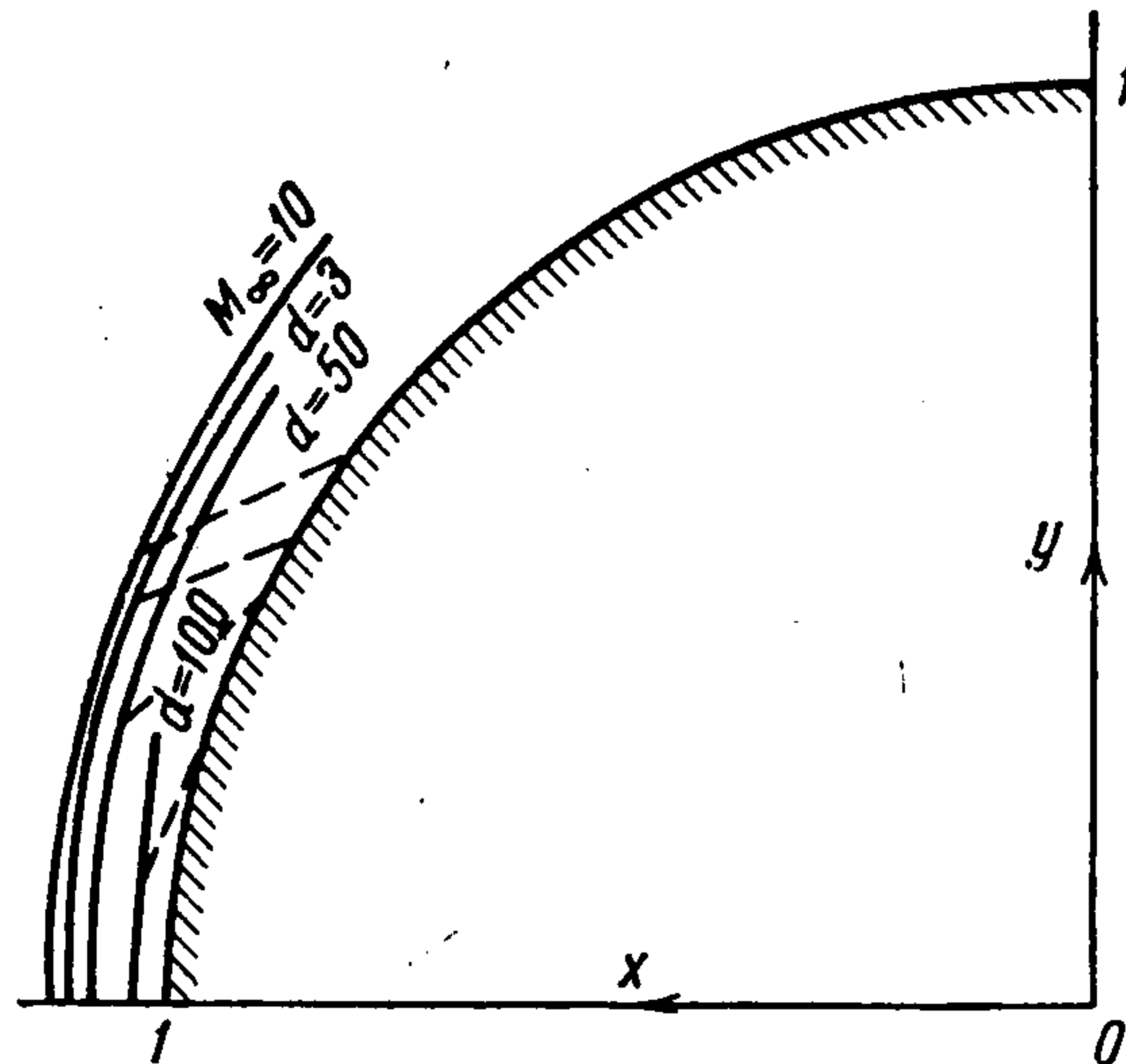
$$\varphi_i = \varphi_1(\psi_i) \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (2.2)$$

Здесь  $F, F_0, F_i, \Phi_i$  — определенные голоморфные в области интегрирования функции. Система (2.2) численно интегрируется от оси симметрии  $\theta = 0$ , где  $v_i = v_0 = 0$ ,  $\psi_i = 0$ ,  $\sigma = 1/2 \pi$ , а неизвестные параметры  $u_i$  и значение  $\varepsilon$  определяются из требования регулярности решения в особых точках. Для каждого шага интегрирования системы считаются параметры неравномерного потока по (2.1) и входящие в правые части (2.2) производные  $d\theta/d\theta$  и  $dw_+/d\theta$ .

3. Приведем некоторые результаты численного расчета, проведенного по первому приближению в области дозвукового и смешанного течения.



Фиг. 2



Фиг. 3

Обозначим через  $M_0$  число Маха на оси симметрии непосредственно перед ударной волной. На фиг. 2, 3 построены ударные волны и положение звуковых точек на сфере и ударной волне для  $M_0 = 4, 10$ .

Для  $M_0 = 4$  при  $d = 4, 20$  имеем  $c = 2.28, 1.27$ ; для  $M_0 = 10$  при  $d = 3, 50, 100$  имеем  $c = 11.47, 3.15, 1.39$  соответственно.

Для сравнения построены ударные волны, полученные из расчета обтекания сферы равномерным потоком при  $M_\infty = 4, 10$ . Уже небольшая неравномерность по углу вызывает сильный сдвиг звуковой точки в сторону меньших  $\theta$  и уменьшение толщины ударного слоя. Во всех приведенных случаях звуковые линии расположены ниже луча  $\theta = \text{const}$ , проходящего через звуковую точку на сфере.

На фиг. 4 показано распределение давления  $P = P(\theta) / P(0)$  вдоль сферы для  $M_0 = 4$  при различных  $d$ .

Пунктиром нанесена кривая давления для равномерного потока [при  $M_\infty = 4$ ].

Автор благодарит научного сотрудника И. И. Куклину за проведение расчетов.

Поступила 4 IV 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Д о р о д н и ц ы н А. А. Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэродинамики. Тр. Всес. матем. съезда, 1956, т. 3, М., Изд-во АН СССР, 1958.
2. Б е л о ц е р к о в с к и й О. М. О расчете обтекания осесимметричных тел с отходящей ударной волной на электронной счетной машине. ПММ, 1960, т. 24, вып. 3.
3. Б е л о ц е р к о в с к и й О. М. Симметричное обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком совершенного и реального газа. Ж. вычис. матем. и математ. физ., 1962, т. 2, № 6.