ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ, КОГДА ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ ЧЕТНОЕ ЧИСЛО НУЛЕВЫХ КОРНЕЙ

М. С. Сагитов, А. Н. Филатов (Ташкент)

1. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{s,\, n+2m}x_{n+2m} + X_s(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2m}) \quad \begin{pmatrix} s = 1, \ldots, n + 2m \\ 2m < n \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

в предположении, что определяющее уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \lambda\, p_{12} & \ldots\, p_{1,\, n+2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ p_{n+2m,\, 1}\; p_2 \ldots & p_{n+2m,\, n+2m} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{1.2}$$

имеет четное число $2m$ ($m \geqslant 1$) нулевых корней, которым соответствуют m групп решений уравнений первого приближения

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{s,\, n+2m}x_{s,\, n+2m} \qquad (s = 1, \ldots, n + 2m) \tag{1.3}$$

Все остальные (т. е. не нулевые) корни уравнения (1.2) будем предполагать имеющими отрицательные вещественные части, а $\overline{X}_s$ ($\overline{X}_s(0, 0, \ldots, 0) \equiv 0$) будем считать голоморфными функциями величин $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2m}$, разложения которых по степеням этих величин начинаются членами не ниже второго порядка.

Ставится задача об определении условий, при выполнении которых решение

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n+2m} = 0 \tag{1.4}$$

уравнений (1.1) является устойчивым или неустойчивым по Ляпунову. Случай, когда уравнение (1.2) имеет два нулевых корня ($m = 1$), подробно исследован А. М. Ляпуновым [1] и Г. В. Каменковым [2].

Г. В. Каменков исследовал также случай [2], когда определяющее уравнение имеет: p нулевых корней, которым соответствует p групп решений, $2q$ чисто мнимых корней, а также r корней с отрицательными вещественными частями (сумма $p + 2q + r$ равна порядку системы). Отметим еще, что в статье [3] рассматривался случай, когда определяющее уравнение имеет k нулевых корней, которым соответствует $k - 1$ группа решений, где k — порядок системы.

Ниже, следуя идеям работы [1], рассматривается случай, когда определяющее уравнение (1.2) имеет любое четное число нулевых корней ($m > 1$). При этом на функции X_s накладываются некоторые ограничения, о которых будет сказано дальше.

2. При сделанных выше предположениях систему (1.1) путем линейного преобразования с постоянными коэффициентами можно привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{dz_{2k-1}}{dt} &= z_{2k} + Z_{2k-1}(z_1, \ldots, z_{2m};\ x_1, \ldots x_n) \\ \frac{dz_{2k}}{dt} &= Z_{2k}(z_1, \ldots, z_{2m};\ x_1, \ldots, x_n) \qquad \begin{pmatrix} k = 1, \ldots, m \\ s = 1, \ldots, n \end{pmatrix} \\ \frac{dx_s}{dt} &= p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s(z_1, \ldots, z_{2m};\ x_1, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Без ограничения общности можно всегда предполагать [1], что $Z_{2k-1} \equiv 0$ и $X_s \equiv 0$, когда $z_2 = z_4 = \ldots = z_{2m} = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

---

[1] Этого можно добиться путем замены

$$z_{2k} = \bar{z}_{2k} + \psi_{2k}(z_1, z_3, \ldots, z_{2m-1}), \qquad x_s = \bar{x}_s + \varphi_s(z_1, z_3, \ldots, z_{2m-1})$$

где ψ_{2k} и φ_s удовлетворяют уравнениям ($k = 1, \ldots, m$; $s = 1, \ldots, n$)

$$\psi_{2k} + Z_{2k-1}(z_1, z_3, \ldots, z_{2m-1};\ \psi_2, \psi_4, \ldots, \psi_{2m};\ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0$$

$$p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s(z_1, z_3, \ldots, z_{2m-1};\ \psi_2, \psi_4, \ldots, \psi_{2m};\ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0$$

Очевидно, решению (1.4) системы (1.1) будет соответствовать решение

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_{2m} = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \tag{2.2}$$

системы (2.1). Ограничимся исследованием на устойчивость решения (2.2) в предположении, что функции Z_{2k} и X_s имеют структуру

$$Z_{2k} = \sum_{\mu=1}^{m} a_{2\mu}^{(2k)} z_{2\mu}^2 + \sum_{\mu=1}^{m} P_{2\mu}^{(2k)}(x_1, \ldots, x_n)\, z_{2\mu} + Q^{(2k)}(x_1, \ldots, x_n) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} x_s \varphi_s^{(2k)}(z_1, z_3, \ldots, z_{2m-1}) + R^{(2k)}(z_1, \ldots, z_{2m};\ x_1, \ldots, x_n)$$

$$X_s = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_{si}(z_1, z_3, \ldots, z_{2m-1}) + R_s(z_1, \ldots, z_{2m};\ x_1, \ldots, x_n)$$

$$(k = 1, \ldots, m; \quad s = 1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

где $a_{2\mu}^{(2k)}$ — постоянные, $P_{2\mu}^{(2k)}$ — линейные формы переменных $x_1, \ldots, x_n$; $\varphi_s^{(2k)}$, φ_{si} — голоморфные функции, уничтожающиеся при $z_1 = z_3 = \ldots = z_{2m-1} = 0$; $Q^{(2k)}$ — квадратичные формы величин $x_1, \ldots, x_n$; $R^{(2k)}$, R_s — голоморфные функции переменных $z_1, \ldots, z_{2m}$; $x_1, \ldots, x_n$, не содержащие членов ниже третьего измерения относительно этих переменных.

Введем в рассмотрение функции $\psi_s^{(2\mu)}(z_1, z_3, \ldots, z_{2m-1})$, определяемые из уравнений

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{si} + \varphi_{si})\psi_s^{(2\mu)} + \Big[1 + \Big(1 - \sum_{\nu=1}^{m} a_{2\mu}^{(2\nu)}\Big) z_{2\mu-1}\Big]\varphi_i^{(2\mu)} = 0 \tag{2.4}$$

$$(i = 1, \ldots, n; \quad \mu = 1, \ldots, m)$$

Ясно, что при каждом фиксированном μ система уравнений (2.4) позволяет однозначно определить функции $\psi_s^{(2\mu)}$ $(s = 1, \ldots, n)$, уничтожающиеся при значениях $z_1 = z_3 = \ldots = z_{2m-1} = 0$.

Составим теперь функцию Ляпунова V вида

$$V = \sum_{\mu=1}^{m} \Big[1 + \Big(1 - \sum_{k=1}^{m} a_{2\mu}^{(2k)}\Big) z_{2\mu-1}\Big] z_{2\mu} +$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} U_{2\mu}^{(2k)} z_{2\mu} + \sum_{k=1}^{m} W^{(2k)} + \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} x_s \psi_s^{(2k)} \tag{2.5}$$

Здесь $U_{2\mu}^{(2k)}$ и $W^{(2k)}$ соответственно линейные и квадратичные формы, определяемые уравнениями[1]

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) \frac{\partial U_{2\mu}^{(2k)}}{\partial x_s} + P_{2\mu}^{(2k)} = -\sum_{s=1}^{n} x_s \left(\frac{\partial \psi_s^{(2k)}}{\partial z_{2\mu-1}}\right)_0 \tag{2.6}$$

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n) \frac{\partial W^{(2k)}}{\partial x_s} + Q^{(2k)} = \sum_{s=1}^{n} x_s^2$$

Вычисляя полную производную по t от функции V в силу уравнений (2.1) и учитывая при этом равенства (2.3), (2.4) и (2.6), найдем

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{\mu=1}^{m} z_{2\mu}^2 + m \sum_{s=1}^{n} x_s^2 + S \tag{2.7}$$

[1] Индекс нуль в последнем слагаемом первого уравнения (2.6) показывает, что производная вычисляется в точке $z_1 = z_3 = \ldots = z_{2m-1} = 0$.

$$
\begin{aligned}
S = {} & \sum_{\mu=1}^{m}\left\{\left(1-\sum_{k=1}^{m} a_{2\mu}^{(2k)}\right) z_{2\mu-1}\left[Q^{(2\mu)}+\sum_{\nu=1}^{m}\left(P_{2\nu}^{(2\mu)} z_{2\nu}+a_{2\nu}^{(2\mu)} z_{\nu 2}^{2}\right)\right]\right\}+ \\
& +\sum_{\mu=1}^{m}\left[1+\left(1-\sum_{k=1}^{m} a_{2\mu}^{(2k)}\right) z_{2\mu-1}\right] R^{(2\mu)}+\sum_{k=1}^{m} \sum_{\mu=1}^{m} U_{2\mu}^{(2k)} Z_{2k}+ \\
& +\sum_{\mu=1}^{m}\left(1-\sum_{k=1}^{m} a_{2\mu}^{(2k)}\right) z_{2\mu} Z_{2\mu-1}+\sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W^{(2k)}}{\partial x_s} X_s+ \\
& +\sum_{k=1}^{m} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} z_{2\mu} \frac{\partial U_{2\mu}^{(2k)}}{\partial x_s} X_s+\sum_{k=1}^{m} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} x_s \frac{\partial \psi_s^{(2k)}}{\partial z_{2\mu-1}} Z_{2\mu-1}+ \\
& +\sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \psi_s^{(2k)} R_s+\sum_{k=1}^{m} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} x_s z_{2\mu}\left[\frac{\partial \psi_s^{(2k)}}{\partial z_{2\mu-1}}-\left(\frac{\partial \psi_s^{(2k)}}{\partial z_{2\mu-1}}\right)_0\right]
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Из равенств (2.7) и (2.8) следует, что функция V удовлетворяет теореме Н. Г. Четаева [4] о неустойчивости. Следовательно, при указанных выше условиях, решение (2.2), а с ним и решение (1.4), неустойчиво.

Поступила 24 IX 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Изд. ЛГУ, 1963.
2. Каменков Г. В. Об устойчивости движения. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1939, № 9.
3. Абаньшин А. М. К устойчивости установившегося движения в случае k нулевых корней определяющего уравнения. Вестн. Ленингр. ун-та, 1960, № 13, серия мат., механ. и астрон., вып. 3.
4. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, М., 1953.

РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ СФЕРЫ НЕРАВНОМЕРНЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

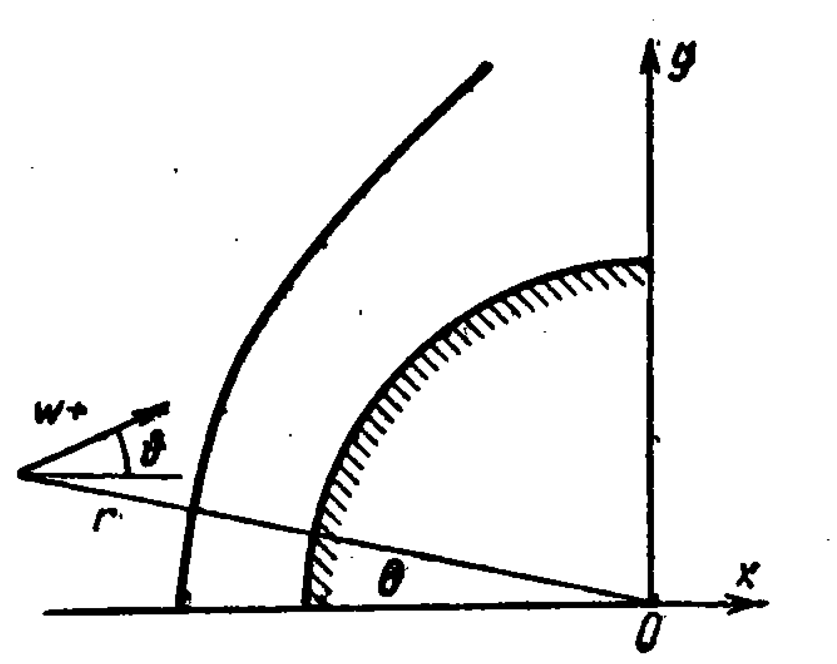
Н. Е. Храмов (Москва)

Приводятся результаты расчета обтекания сферы неравномерным потоком газа методом Дородницына — Белоцерковского [1-3].

1. Пусть на сферу набегает неравномерный сверхзвуковой поток (фиг. 1), симметричный относительно оси x и заданный в виде

$$
w_{+}=f_1(\theta, r), \qquad \vartheta=f_2(\theta, r) \qquad (x=-r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta) \tag{1.1}
$$

Здесь w_{+} — значение модуля скорости в поле неравномерного потока, ϑ — угол наклона скорости к оси симметрии, f_1, f_2 — непрерывные функции сферических координат θ и r. Требуется определить форму и положение ударной волны и смешанное течение в области влияния.



Фиг. 1

Отнесем скорость w к критической скорости a_*, плотность ρ — к плотности торможения в невозмущенном потоке ρ_0, давление P — к $\rho_0 a_*^2$, линейные размеры — к радиусу сферы. Тогда, вводя интеграл Бернулли и функцию тока ψ, систему уравнений газовой динамики в составляющих сферических координат можно представить [2] в следующем виде