Введем подвижную относительно тела систему координат $\xi'\eta'\zeta$, повернутую вокруг оси ζ на угол φ относительно системы $\xi\eta\zeta$, где

$$\varphi = \frac{C-A}{A}\int_0^t \omega_3\,dt - Arg\,(\omega_2{}^\circ - i\omega_1{}^\circ) \tag{4.9}$$

В системе $\xi'\eta'\zeta$ движение вектора $-\gamma^\circ$ описывается мало изменяющейся при достаточно больших значениях $t>0$ комплексной переменной $u^\circ(\tau)$. Следовательно, система $\xi'\eta'\zeta$ вращается вокруг вектора γ° с угловой скоростью, которая оказывается близкой к $CA^{-1}\omega_3$.

Окончательно при больших значениях $t>0$ соблюдается следующий характер движения. Существует неподвижный вектор γ°, составляющий непрерывно уменьшающийся угол

$$A\,|\,\omega_1{}^\circ + i\omega_2{}^\circ\,|\,m^{-1}t^{-1} + O\,(t^{-2})$$

с осью ζ. Тело вращается с угловой скоростью $(A-C)\,A^{-1}\,mt + O\,(1)$ вокруг оси ζ. Ось ζ вращается с угловой скоростью $CA^{-1}\,mt + O\,(1)$ вокруг вектора γ°.

Автор благодарит А. И. Лурье за постановку задачи и консультации.

Поступила 14 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, М., 1961.
2. Хованский А. Н. Приложение цепных дробей и обобщений к вопросам приближенного анализа. Гостехиздат, М., 1956.
3. Данилов В. Л., Иванова А. И., Исакова Е. К., Люстерник Л. А., Салехов Г. С., Хованский А. Н., Цлаф Л. Я., Янпольский А. Р. Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные дроби. Физматгиз, М., 1961.

О ДВИЖЕНИИ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО КОМПАСА ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ ЕГО ТОЧКИ ОПОРЫ

Л. Я. Ройтенберг (Москва)

Изучается движение гироскопического компаса при случайных перемещениях его точки опоры, что имеет место в условиях качки корабля, вибраций основания прибора и в других случаях. В указанных условиях ускорение точки опоры гироскопического компаса представляет собой случайную векторную функцию времени, и движение гирокомпаса будет описываться системой линейных неоднородных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами и случайными правыми частями, т. е. в этих условиях гироскопический компас представляет собой систему со случайным параметрическим возбуждением под воздействием случайных внешних сил.

1. При нахождении уравнений движения гироскопического компаса для рассматриваемого случая будем исходить из полученных А. Ю. Ишлинским [1] общих уравнений движения гирокомпаса, которые можно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered}
2B\cos(\varepsilon-\delta)\,[-(V/R)(\sin\alpha_1\sin\gamma-\cos\alpha_1\sin\beta\cos\gamma)-(\alpha_1{}^{\cdot}+\Omega)\cos\beta\cos\gamma-\\
-\beta^{\cdot}\sin\gamma] = \operatorname{lm} W_1{}^\circ\sin\alpha_1\cos\beta-\operatorname{lm} W_2{}^\circ\cos\alpha_1\cos\beta-l(mW_3{}^\circ+P)\sin\beta-M_x^*\\
2B\cos(\varepsilon-\delta)\,[(V/R)(\sin\alpha_1\cos\gamma+\cos\alpha_1\sin\beta\sin\gamma)-(\alpha^{\cdot}+\Omega)\cos\beta\sin\gamma+\\
+\beta^{\cdot}\cos\gamma] = M_y{}^* \qquad (1.1)\\
[2B\cos(\varepsilon-\delta)]^{\cdot} = \operatorname{lm} W_1{}^\circ(\cos\alpha_1\cos\gamma-\sin\alpha_1\sin\beta\sin\gamma)+\\
+\operatorname{lm} W_2{}^\circ(\sin\alpha_1\cos\gamma+\cos\alpha_1\sin\beta\sin\gamma)-l(mW_3{}^\circ+P)\cos\beta\sin\gamma+M_z{}^*\\
2B\sin(\varepsilon-\delta)\,[(V/R)\cos\alpha_1\cos\beta+(\alpha_1{}^{\cdot}+\Omega)\sin\beta+\gamma^{\cdot}] = \varkappa\sin\delta\cos\delta-M_{y_1}{}^*
\end{gathered}$$

Здесь точка означает дифференцирование по времени.

Уравнения (1.1) описывают движение гироскопического компаса относительно системы координат $\xi_0\eta_0\zeta$, ориентированной так, что одна из горизонтальных осей (ось ξ_0) направлена по горизонтальной составляющей V абсолютной скорости корабля. Ось ζ направлена вверх по радиусу земного шара. Координатные оси ξ_0, η_0 повернуты относительно географических осей ξ, η (направленных, соответственно, на восток и север) на угол σ, определяемый из соотношений

$$\sin\sigma = \frac{v_N}{V}, \qquad \cos\sigma = \frac{RU\cos\varphi + v_E}{V}, \qquad V = \sqrt{(RU\cos\varphi + v_E)^2 + v_N^2} \tag{1.2}$$

Здесь R — расстояние от точки опоры гирокомпаса до центра земного шара, U — угловая скорость суточного вращения земного шара, φ — широта места наблюдения, v_E и v_N — восточная и северная составляющие относительной скорости корабля.

Через α_1, β и γ обозначены углы Эйлера, определяющие положение гиросферы относительно координатного трехгранника $\xi_0\eta_0\zeta$, причем через α_1 обозначен угол поворота гиросферы вокруг оси ζ, через β — угол поворота вокруг отрицательного направления оси x^* (линии узлов), а через γ — угол поворота вокруг жестко связанной с гиросферой оси z. Угол α поворота гирокомпаса в азимуте, отсчитываемый от направления на север, таким образом, будет

$$\alpha = \alpha_1 + \sigma \tag{1.3}$$

Ось z направлена по биссектрисе угла, образованного осями роторов гироскопов, а через x и y обозначены жестко связанные с гиросферой оси, из которых ось x расположена в экваториальной плоскости гиросферы (т. е. в плоскости, образованной осями роторов гироскопов), а ось y направлена вверх по нормали к экваториальной плоскости.

Через $\varepsilon - \delta$ обозначен угол, который составляет ось ротора одного из установленных в гиросфере гироскопов с осью z гиросферы. Ось ротора второго гироскопа расположена симметрично. Оси кожухов гироскопов связаны между собой антипараллелограммом. В положении равновесия, когда роторы гироскопов не вращаются, угол между осями роторов равен 2ε, так что δ представляет собой угол прецессии гироскопов относительно гиросферы.

Через W_1°, W_2°, W_3° обозначены составляющие ускорения точки опоры гирокомпаса по осям ξ_0, η_0, ζ соответственно, при определении которых следует иметь в виду, что в рассматриваемой задаче $v_\zeta = R^\cdot \not\equiv 0$.

Проекция мгновенной угловой скорости координатного трехгранника $\xi_0\eta_0\zeta$ на ось ζ обозначена через Ω, причем

$$\Omega = U\sin\varphi + \frac{v_E}{R}\operatorname{tg}\varphi + \sigma^\cdot \tag{1.4}$$

Через B обозначен собственный кинетический момент каждого из обоих установленных в гиросфере гироскопов. Входящий в четвертое уравнение (1.1) коэффициент $\varkappa$ определяет жесткость пружин, связывающих кожухи гироскопов с гиросферой. Величины m и P представляют собой, соответственно, массу гиросферы вместе со всеми установленными внутри нее элементами и действующую на нее силу тяготения, а l — расстояние от центра тяжести гиросферы, расположенного на оси y, до ее геометрического центра, т. е. до точки опоры гирокомпаса.

Через M_x^*, M_y^* и M_z^* обозначены моменты всех остальных, неучтенных в уравнениях (1.1) внешних сил относительно жестко связанных с гиросферой осей x, y, z соответственно, а $M_{y_1}^*$ представляет собой момент этих сил относительно оси кожуха гироскопа, вокруг которой отсчитывается угол δ прецессии гироскопов.

Преобразуем теперь систему уравнений (1.1). Для этого умножим первое уравнение (1.1) на $\cos\gamma$, а второе уравнение (1.1) на $\sin\gamma$ и сложим вновь полученные уравнения. Затем умножим первое уравнение (1.1) на $-\sin\gamma$, а второе уравнение (1.1) на $\cos\gamma$ и также сложим полученные уравнения. Заменяя полученными при этом преобразовании двумя уравнениями первое и второе уравнения системы (1.1), придем к эквивалентной (1.1) системе уравнений

$$2B\cos(\varepsilon-\delta)\,[(V/R)\cos\alpha_1\sin\beta-(\alpha_1^{\boldsymbol\cdot}+\Omega)\cos\beta]=\mathrm{lm}\,W_1^\circ\sin\alpha_1\cos\beta\cos\gamma-$$
$$-\,\mathrm{lm}\,W_2^\circ\cos\alpha_1\cos\beta\cos\gamma-l\,(mW_3^\circ+P)\sin\beta\cos\gamma-M_{x*}^*$$

$$2B\cos(\varepsilon-\delta)\,((V/R)\sin\alpha_1+\beta^{\boldsymbol\cdot})=-\,\mathrm{lm}\,W_1^\circ\sin\alpha_1\cos\beta\sin\gamma+$$
$$+\,\mathrm{lm}\,W_2^\circ\cos\alpha_1\cos\beta\sin\gamma+l\,(mW_3^\circ+P)\sin\beta\sin\gamma+M_{y*}^*$$

$$[2B\cos(\varepsilon-\delta)]^{\boldsymbol\cdot}=\mathrm{lm}\,W_1^\circ(\cos\alpha_1\cos\gamma-\sin\alpha_1\sin\beta\sin\gamma)+\mathrm{lm}\,W_2^\circ(\sin\alpha_1\cos\gamma+$$
$$+\cos\alpha_1\sin\beta\sin\gamma)-l\,(mW_3^\circ+P)\cos\beta\sin\gamma+M_z^*$$

$$2B\sin(\varepsilon-\delta)\,[(V/R)\cos\alpha_1\cos\beta+(\alpha_1^{\boldsymbol\cdot}+\Omega)\sin\beta+\dot\gamma]=\varkappa\sin\delta\cos\delta-M_{y_1}^* \qquad (1.5)$$

где

$$M_{x*}^*=M_x^*\cos\gamma-M_y^*\sin\gamma,\qquad M_{y*}^*=M_x^*\sin\gamma+M_y^*\cos\gamma \qquad (1.6)$$

Так как оси x и y повернуты относительно осей x^* и y^* на угол γ, отсчитываемый от оси x^* против часовой стрелки, то из (1.6) следует, что M_{x*}^* и M_{y*}^* представляют собой моменты указанных выше внешних сил относительно осей x^* и y^*.

Переходя к исследованию уравнений (1.5) и имея в виду, что $RU\cos\varphi$ во много раз больше v_E и v_N, заменим соотношения (1.2) и (1.4) следующими приближенными соотношениями:

$$V\approx RU\cos\varphi,\qquad \sigma\approx 0,\qquad \varphi\approx\text{const},\qquad \Omega\approx U\sin\varphi \qquad (1.7)$$

На неподвижном относительно земли основании составляющие ускорения точки опоры гирокомпаса по осям ξ, η, ζ имеют вид

$$W_1^\circ=0,\qquad W_2^\circ=V\Omega=RU^2\sin\varphi\cos\varphi,\qquad W_3^\circ=-\frac{V^2}{R}=-RU^2\cos^2\varphi \qquad (1.8)$$

Поэтому можно принять, что в условиях случайных перемещений точки опоры гирокомпаса

$$W_1^\circ=W_1,\qquad W_2^\circ=RU^2\sin\varphi\cos\varphi+W_2,\quad W_3^\circ=-RU^2\cos^2\varphi+W_3 \qquad (1.9)$$

Здесь W_1, W_2, W_3 — случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями.

У обычных гирокомпасов жесткость пружины $\varkappa$ в несколько раз больше, чем у гирогоризонткомпасов. Поэтому у гирокомпасов (даже при $v_\zeta\equiv 0$) имеют место баллистические девиации. Для их уменьшения параметры гироскопического компаса выбираются так, чтобы выполнялось условие

$$2B\cos(\varepsilon-\delta^*)=\mathrm{lm}\,RU\cos\varphi \qquad (1.10)$$

где δ^* — значение, принимаемое углом δ в положении стационарного движения гирокомпаса, установленного на неподвижном относительно земли основании.

При выполнении условия (1.10) положение равновесия гирокомпаса на неподвижном относительно земли основании, в случае, когда $M_x^*=M_y^*=M_z^*=M_{y_1}^*=0$, будет соответственно (1.4), (1.5) и (1.8) следующим:

$$\alpha_1=\beta=\gamma=0,\qquad \delta=\delta^* \qquad (1.11)$$

где δ^* удовлетворяет вытекающему из четвертого уравнения (1.5) соотношению

$$2B\sin(\varepsilon-\delta^*)\,U\cos\varphi=\varkappa\sin\delta^*\cos\delta^* \qquad (1.12)$$

Обозначая теперь

$$\delta_1 = \delta - \delta^* \tag{1.13}$$

и ограничиваясь изучением малых колебаний системы относительно положения равновесия, будем считать углы α_1, β, γ и δ_1 малыми. При этом, сохраняя лишь члены первого порядка малости, будем иметь следующие соотношения:

$$\begin{gathered} 2B\cos(\varepsilon-\delta) = \Xi_1 + \Xi_2\delta_1, \\ 2B\sin(\varepsilon-\delta) = \Xi_2 - \Xi_1\delta_1, \qquad [2B\cos(\varepsilon-\delta)]^{\cdot} = \Xi_2\delta_1^{\cdot} \\ \varkappa\sin\delta\cos\delta = \varkappa\sin\delta^*\cos\delta^* + (\varkappa\cos 2\delta^*)\,\delta_1 \end{gathered} \tag{1.14}$$

где

$$\Xi_1 = 2B\cos(\varepsilon-\delta^*), \quad \Xi_2 = 2B\sin(\varepsilon-\delta^*) \tag{1.15}$$

Принимая далее, что

$$P - mRU^2\cos^2\varphi \approx P \tag{1.16}$$

обозначая

$$\nu^2 = \frac{g}{R}, \qquad \mu^2 = \frac{lP\,(\mathrm{lm}\,RU^2\cos^2\varphi + \varkappa\cos 2\delta^*)}{\Xi_2^2} \tag{1.17}$$

(заметим [2], что у обычных гирокомпасов $\mu \approx 5\nu$) и, вводя новые переменные

$$x_1 = U\cos\varphi\,\alpha_1, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \gamma, \quad x_4 = (\Xi_2/\Xi_1)\,U\cos\varphi\delta_1 \tag{1.18}$$

получим в соответствии с (1.5) следующие дифференциальные уравнения, описывающие движение гирокомпаса при случайных перемещениях его точки опоры:

$$\begin{gathered} \frac{dx_1}{dt} + \frac{1}{RU\cos\varphi}W_1x_1 - \left(\nu^2 + \frac{1}{R}W_3\right)x_2 + \Omega x_4 = \frac{1}{R}W_2 + y_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} + x_1 - \left(\Omega + \frac{1}{RU\cos\varphi}W_2\right)x_3 = y_2(t), \qquad \frac{dx_3}{dt} + \Omega x_2 - \frac{\mu^2}{\nu^2}x_4 = y_3(t) \\ \frac{dx_4}{dt} - \left(\Omega + \frac{1}{RU\cos\varphi}W_2\right)x_1 + \left(\nu^2 + \frac{1}{R}W_3\right)x_3 = \frac{1}{R}W_1 + y_4(t) \end{gathered} \tag{1.19}$$

где

$$\begin{gathered} y_1(t) = \frac{1}{\mathrm{lm}\,R}M_{x_*}^*, \qquad y_2(t) = \frac{1}{\mathrm{lm}\,RU\cos\varphi}M_{y_*}^* \\ y_3(t) = -\frac{1}{\Xi_2}M_{y_1}^*, \qquad y_4 = \frac{1}{\mathrm{lm}\,R}M_z^* \end{gathered} \tag{1.20}$$

Система (1.19) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами и случайными правыми частями.

2. В случае, когда, помимо явно указанных в уравнениях (1.1) сил, к гирокомпасу не приложены другие внешние силы, нужно в уравнениях (1.1) положить

$$M_x^* = M_y^* = M_z^* = M_{y_1}^* = 0 \tag{2.1}$$

Отсюда следует

$$y_i(t) \equiv 0 \qquad (i = 1, \ldots, 4)$$

Полагая условие (2.1) выполненным и обозначая через λ содержащийся в уравнениях (1.19) малый параметр $\lambda = R_0/R$, где R_0 — некоторый нормирующий коэффициент, удовлетворяющий, например, условию $|W_i|_{\max}/R_0 = 1$ *сек*$^{-2}$, можно привести уравнения (1.19) к следующему виду:

$$\begin{gathered} \frac{dx_1}{dt} - \nu^2x_2 + \Omega x_4 + \lambda\left(\frac{1}{R_0U\cos\varphi}W_1x_1 - \frac{1}{R_0}W_3x_2\right) = \lambda\frac{1}{R_0}W_2 \\ \frac{dx_2}{dt} + x_1 - \Omega x_3 - \lambda\frac{1}{R_0U\cos\varphi}W_2x_3 = 0, \qquad \frac{dx_3}{dt} + \Omega x_2 - \frac{\mu^2}{\nu^2}x_4 = 0 \\ \frac{dx_4}{dt} - \Omega x_1 + \nu^2x_3 - \lambda\left(\frac{1}{R_0U\cos\varphi}W_2x_1 - \frac{1}{R_0}W_3x_3\right) = \lambda\frac{1}{R_0}W_1 \end{gathered} \tag{2.2}$$

Запишем систему (2.2) в матричной форме

$$\frac{dx}{dt} + ax = -\lambda y(t)\, x + \lambda z(t) \tag{2.3}$$

Здесь

$$x = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Vmatrix}, \qquad a = \begin{Vmatrix} 0 & -\nu^2 & 0 & \Omega \\ 1 & 0 & -\Omega & 0 \\ 0 & \Omega & 0 & -\dfrac{\mu^2}{\nu^2} \\ -\Omega & 0 & \nu^2 & 0 \end{Vmatrix} \tag{2.4}$$

$$y(t) = \begin{Vmatrix} s_1W_1 & -s_2W_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s_1W_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s_1W_2 & 0 & s_2W_3 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad z(t) = \begin{Vmatrix} s_2W_2 \\ 0 \\ 0 \\ s_2W_1 \end{Vmatrix}$$

а

$$s_1 = \frac{1}{R_0 U \cos\varphi}, \qquad s_2 = \frac{1}{R_0} \tag{2.5}$$

От уравнения (2.3) можно обычным способом перейти к матричному интегральному уравнению

$$x(t) = N(t)\, x(0) + \lambda \int_0^t N(t-\tau_1)\, z(\tau_1)\, d\tau_1 - \lambda \int_0^t N(t-\tau_1)\, y(\tau_1)\, x(\tau_1)\, d\tau_1 \tag{2.6}$$

где $N(t) = \| N_{jk}(t) \|$ $(j, k = 1, \ldots, 4)$ — матричная функция веса для однородного матричного дифференциального уравнения

$$dx/dt + ax = 0 \tag{2.7}$$

Соответствующее дифференциальному уравнению (2.7) характеристическое уравнение

$$\rho^4 + (\nu^2 + \mu^2 + 2\Omega^2)\rho^2 + \nu^2\mu^2 - (\nu^2 + \mu^2)\Omega^2 + \Omega^4 = 0$$

имеет две пары чисто мнимых корней

$$\rho_1, \rho_2 = \pm i\omega_1, \qquad \rho_3, \rho_4 = \pm i\omega_2$$

Функции $N_{jk}(t)$ в уравнении (2.6) можно представить так [2]:

$$\begin{aligned} N_{jk}(t) &= -\frac{1}{e_1} T_{jk}^{(1)} \cos\omega_1 t + \frac{1}{e_2} T_{jk}^{(2)} \cos\omega_2 t \quad \text{при } j + k = 2m \\ N_{jk}(t) &= \frac{1}{e_1} T_{jk}^{(1)} \sin\omega_1 t - \frac{1}{e_2} T_{jk}^{(2)} \sin\omega_2 t \quad \text{при } j + k = 2m + 1 \end{aligned} \tag{2.8}$$

где m — целое положительное число.

Здесь $e_s = \omega_s(\omega_2^2 - \omega_1^2)$ $(s = 1, 2)$, а функции $T_{jk}^{(s)}$ $(s = 1, 2)$ таковы:

$$\begin{aligned}
T_{11}^{(s)} &= \omega_s^3 - (\mu^2 + \Omega^2)\omega_s, & T_{12}^{(s)} &= -\nu^2\omega_s^2 - \Omega^2\nu^2 + \mu^2\nu^2 \\
T_{21}^{(s)} &= \omega_s^2 + \Omega^2\mu^2/\nu^2 - \mu^2, & T_{22}^{(s)} &= \omega_s^3 - (\mu^2 + \Omega^2)\omega_s \\
T_{31}^{(s)} &= -(\Omega + \Omega\mu^2/\nu^2)\omega_s, & T_{32}^{(s)} &= \Omega\omega_s^2 + \Omega\mu^2 - \Omega^3 \\
T_{41}^{(s)} &= -\Omega\omega_s^2 - \Omega\nu^2 + \Omega^3, & T_{42}^{(s)} &= -2\Omega\nu^2\omega_s \\
T_{13}^{(s)} &= -2\Omega\nu^2\omega_s, & T_{14}^{(s)} &= \Omega\omega_s^2 + \Omega\mu^2 - \Omega^3 \\
T_{23}^{(s)} &= -\Omega\omega_s^2 - \Omega\nu^2 + \Omega^3, & T_{24}^{(s)} &= -(\Omega + \Omega\mu^2/\nu^2)\omega_s \\
T_{33}^{(s)} &= \omega_s^3 - (\nu^2 + \Omega^2)\omega_s, & T_{34}^{(s)} &= -\omega_s^2\mu^2/\nu^2 - \Omega^2 + \mu^2 \\
T_{43}^{(s)} &= \nu^2\omega_s^2 + \Omega^2\nu^2 - \nu^4, & T_{44}^{(s)} &= \omega_s^3 - (\nu^2 + \Omega^2)\omega_s
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Решение матричного интегрального уравнения (2.6) можно найти методом последовательных подстановок [3].

Обозначая

$$F(t) = N(t)\, x(0) + \lambda \int_0^t N(t-\tau_1)\, z(\tau_1)\, d\tau_1 \tag{2.10}$$

можно привести уравнение (2.6) к виду

$$x(t) = F(t) - \lambda \int_0^t N(t-\tau_1)\, y(\tau_1)\, x(\tau_1)\, d\tau_1 \tag{2.11}$$

Из (2.11) следует, что

$$x(\tau_1) = F(\tau_1) - F \int_0^{\tau_1} N(\tau_1-\tau_2)\, y(\tau_2)\, x(\tau_2)\, d\tau_2 \tag{2.12}$$

Подставляя в (2.11) вместо $x(\tau_1)$ его выражение (2.12), получим

$$x(t) = F(t) - \lambda \int_0^t N(t-\tau_1)\, y(\tau_1) \left[F(\tau_1) - \lambda \int_0^{\tau_1} N(\tau_1-\tau_2)\, y(\tau_2)\, x(\tau_2)\, d\tau_2\right] d\tau_1 \tag{2.13}$$

Заменяя $x(\tau_2)$ в (2.13) выражением, аналогичным (2.12), и повторяя описанный процесс, можно представить решение интегрального уравнения (2.6) в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда [3], который в рассматриваемой задаче будет степенным рядом по малому параметру λ

$$x(t) = F(t) + \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \tag{2.14}$$

где

$$V_n(t) = (-1)^n \lambda^n \int_0^t \int_0^{\tau_1} \ldots \int_0^{\tau_{n-1}} N(t-\tau_1)\, N(\tau_1-\tau_2) \ldots$$

$$\ldots N(\tau_{n-1}-\tau_n)\, y(\tau_1) \ldots y(\tau_n)\, F(\tau_n)\, d\tau_1 \ldots d\tau_n \tag{2.15}$$

Ограничиваясь членами не выше второго порядка малости, можно представить решение (2.14) в следующем виде:

$$x(t) = \left(N(t) - \lambda \int_0^t N(t-\tau_1)\, y(\tau_1) N(\tau_1) d\tau_1 + \lambda^2 \int_0^t \int_0^{\tau_1} \Psi(t, \tau_1, \tau_2)\, d\tau_2\, d\tau_1\right) x(0) +$$

$$+ \lambda \int_0^t N(t-\tau_1)\, z(\tau_1)\, d\tau_1 - \lambda^2 \int_0^t \int_0^{\tau_1} Q(t, \tau_1, \tau_2)\, d\tau_2\, d\tau_1 \tag{2.16}$$

где

$$\Psi(t, \tau_1, \tau_2) = N(t-\tau_1)\, y(\tau_1)\, N(\tau_1-\tau_2)\, y(\tau_2)\, N(\tau_2)$$

$$Q(t, \tau_1, \tau_2) = N(t-\tau_1)\, y(\tau_1)\, N(\tau_1-\tau_2)\, z(\tau_2) \tag{2.17}$$

При нулевых начальных условиях $x_k(0) = 0$ $(k = 1, \ldots, 4)$ элементы матрицы (2.16) будут иметь следующий вид:

$$x_j(t) = \lambda s_2 \int_0^t [N_{j1}(t-\tau_1)\, W_2(\tau_1) + N_{j4}(t-\tau_1)\, W_1(\tau_1)]\, d\tau_1 -$$

$$- \lambda^2 \int_0^t \int_0^{\tau_1} Q_j(t, \tau_1, \tau_2)\, d\tau_2\, d\tau_1 \quad (j = 1, \ldots, 4) \tag{2.18}$$

где

$$Q_j(t, \tau_1, \tau_2) = s_1 s_2 N_{j1}(t-\tau_1) N_{14}(\tau_1-\tau_2) W_1(\tau_1) W_1(\tau_2) -$$
$$- s_1 s_2 [N_{j4}(t-\tau_1) N_{11}(\tau_1-\tau_2) + N_{j2}(t-\tau_1) N_{31}(\tau_1-\tau_2)] W_2(\tau_1) W_2(\tau_2) +$$
$$+ s_1 s_2 N_{j1}(t-\tau_1) N_{11}(\tau_1-\tau_2) W_1(\tau_1) W_2(\tau_2) -$$
$$- s_1 s_2 [N_{j4}(t-\tau_1) N_{14}(\tau_1-\tau_2) + N_{j2}(t-\tau_1) N_{34}(\tau_1-\tau_2)] W_2(\tau_1) W_1(\tau_2) -$$
$$- s_2^2 [N_{j1}(t-\tau_1) N_{24}(\tau_1-\tau_2) - N_{j4}(t-\tau_1) N_{34}(\tau_1-\tau_2)] W_3(\tau_1) W_1(\tau_2) -$$
$$- s_2^2 [N_{j1}(t-\tau_1) N_{21}(\tau_1-\tau_2) - N_{j4}(t-\tau_1) N_{31}(\tau_1-\tau_2)] W_3(\tau_1) W_2(\tau_2)$$
$$(j = 1, \ldots, 4) \qquad (2.19)$$

Так как математические ожидания случайных процессов $W_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ равны нулю, то можно представить математические ожидания случайных процессов $x_j(t)$, определяющих собой положение гироскопического компаса, в следующем виде:

$$M[x_j(t)] = -\lambda^2 \int_0^t \int_0^{\tau_1} M[Q_j(t, \tau_1, \tau_2)]\, d\tau_2\, d\tau_1 \qquad (j = 1, \ldots, 4) \qquad (2.20)$$

$$M[Q_j(t, \tau_1, \tau_2)] = s_1 s_2 N_{j1}(t-\tau_1) N_{14}(\tau_1-\tau_2) K_{11}(\tau_1-\tau_2) -$$
$$- s_1 s_2 [N_{j4}(t-\tau_1) N_{11}(\tau_1-\tau_2) + N_{j2}(t-\tau_1) N_{31}(\tau_1-\tau_2)] K_{22}(\tau_1-\tau_2) +$$
$$+ s_1 s_2 N_{j1}(t-\tau_1) N_{11}(\tau_1-\tau_2) K_{12}(\tau_1-\tau_2) - s_1 s_2 [N_{j4}(t-\tau_1) N_{14}(\tau_1-\tau_2) +$$
$$+ N_{j2}(t-\tau_1) N_{34}(\tau_1-\tau_2)] K_{12}(\tau_2-\tau_1) -$$
$$- s_2^2 [N_{j1}(t-\tau_1) N_{24}(\tau_1-\tau_2) - N_{j4}(t-\tau_1) N_{34}(\tau_1-\tau_2)] K_{13}(\tau_2-\tau_1) -$$
$$- s_2^2 [N_{j1}(t-\tau_1) N_{21}(\tau_1-\tau_2) - N_{j4}(t-\tau_1) N_{31}(\tau_1-\tau_2)] K_{23}(\tau_2-\tau_1)$$
$$(j = 1, \ldots, 4) \qquad (2.21)$$

Здесь через $K_{ij}(\tau_1 - \tau_2)$ обозначены корреляционные функции случайных процессов $W_k(t)$ $(k = 1, 2, 3)$

$$K_{ij}(\tau_1 - \tau_2) = M[W_i(\tau_1) W_j(\tau_2)] \qquad (i, j = 1, 2, 3) \qquad (2.22)$$

Предполагаем, что процессы $W_k(t)$ стационарны и стационарно связаны. Поэтому корреляционные функции зависят от разности аргументов.

Дисперсии случайных процессов $x_j(t)$, в соответствии с (2.18), будут, с точностью до членов второго порядка малости, иметь следующий вид: (2.23)

$$D_j(t) = \lambda^2 s_2^2 \int_0^t \int_0^t \{N_{j4}(t-\tau_1) N_{j4}(t-\tau_2) K_{11}(\tau_1-\tau_2) + N_{j1}(t-\tau_1) N_{j1}(t-\tau_2) \times$$
$$\times K_{22}(\tau_1-\tau_2) + 2N_{j4}(t-\tau_1) N_{j1}(t-\tau_2) K_{12}(\tau_1-\tau_2)\}\, d\tau_2\, d\tau_1 \qquad (j = 1, \ldots, 4)$$

3. В качестве примера рассмотрим движение гироскопического компаса в условиях, когда $W_j(t)$ $(j = 1, 2, 3)$ являются стационарными процессами типа белого шума с нулевыми математическими ожиданиями

$$M[W_j(t)] = 0 \qquad (j = 1, 2, 3) \qquad (3.1)$$

и корреляционными функциями следующего вида:

$$K_{11}(t-\tau) = G_1 \delta(t-\tau), \qquad K_{12}(t-\tau) = 0 \qquad (3.2)$$
$$K_{22}(t-\tau) = G_2 \delta(t-\tau), \qquad K_{13}(t-\tau) = L\delta(t-\tau)$$
$$K_{33}(t-\tau) = G_3 \delta(t-\tau), \qquad K_{23}(t-\tau) = 0$$

что может иметь место при вибрациях основания прибора. Здесь $\delta(t-\tau)$ — дельта-функция. Заметим, что задача о движении гирокомпаса в условиях качки, определяемых, например, приведенными в работе А. А. Свешникова [4] соотношениями, потребовала бы учета в случайных процессах $W_j(t)$ нелинейных членов второго порядка относительно углов качки корабля и их производных. Эти нелинейные члены, как показано в работе [4], уже сами по себе повлияли бы на величину математических ожиданий углов, определяющих положение гироскопического компаса.

Определим математические ожидания $M[x_j(t)]$ согласно (2.20). Так как

$$\int_0^{\tau_1} N_{jk}(\tau_1-\tau_2)\,\delta(\tau_1-\tau_2)\,d\tau_2 = \frac{1}{2}N_{jk}(0)$$

а матричная функция веса $N(t)$ удовлетворяет условию $N(0)=E$, где E — единичная матрица, то, учитывая (3.2), можно представить выражения (2.20) так:

$$M[x_j(t)] = \frac{1}{2}\lambda^2 s_1 s_2 G_2 \int_0^t N_{j4}(t-\tau_1)\,d\tau_1 \qquad (j=1,\ldots,4) \tag{3.3}$$

Заменяя λ, s_1 и s_2 в (3.3) их значениями, получим

$$M[x_j(t)] = \frac{G_2}{2R^2U\cos\varphi}\int_0^t N_{j4}(\xi)\,d\xi \tag{3.4}$$

Интегрируя (3.4), можно представить математические ожидания углов, определяющих положение гироскопического компаса, в следующем виде:

$$M[x_j(t)] = \frac{G_2}{2R^2U\cos\varphi}\Lambda_{j4}(t) \qquad (j=1,\ldots,4) \tag{3.5}$$

$$\Lambda_{j4}(t) = \begin{cases} T_{j4}^{(1)}\dfrac{1}{\omega_1 e_1}(1-\cos\omega_1 t) - T_{j4}^{(2)}\dfrac{1}{\omega_2 e_2}(1-\cos\omega_2 t) & (j=1,\,3)\\[2mm] -T_{j4}^{(1)}\dfrac{1}{\omega_1 e_1}\sin\omega_1 t + T_{j4}^{(2)}\dfrac{1}{\omega_2 e_2}\sin\omega_2 t & (j=2,\,4)\end{cases} \tag{3.6}$$

Дисперсии случайных процессов $x_j(t)$, в соответствии с (2.23) и (3.2), будут:

$$D_j(t) = a_j t + b_j\sin(\omega_1-\omega_2)t + c_j\sin 2\omega_1 t + h_j\sin 2\omega_2 t + l_j\sin(\omega_1+\omega_2)\,t$$
$$(j=1,\ldots,4) \tag{3.7}$$

где

$$a_j = \frac{1}{2R^2}\left[G_1(m_{j4}^2+n_{j4}^2) + G_2(m_{j1}^2+n_{j1}^2)\right], \qquad b_j = -\frac{1}{(\omega_1-\omega_2)R^2}(G_1 m_{j4}n_{j4} + G_2 m_{j1}n_{j1})$$

$$c_j = \frac{(-1)^j}{4\omega_1 R^2}(G_1 m_{j4}^2 - G_2 m_{j1}^2), \qquad h_j = \frac{(-1)^j}{4\omega_2 R^2}(G_1 n_{j4}^2 - G_2 n_{j1}^2) \tag{3.8}$$

$$l_j = \frac{(-1)^j}{(\omega_1+\omega_2)R^2}(-G_1 m_{j4}n_{j4} + G_2 m_{j1}n_{j1}), \qquad m_{jk} = \frac{1}{e_1}T_{jk}^{(1)}, \qquad n_{jk} = \frac{1}{e_2}T_{jk}^{(2)} \tag{3.9}$$

Из выражений (3.5) и (3.7) видно, что даже при отсутствии начальных отклонений, т. е. при $x_k(0)=0$ ($k=1,\ldots,4$), в условиях качки и вибраций корабля у недемпфированного гироскопического компаса возникает смещение среднего положения — математические ожидания $M[x_j(t)]$ имеют постоянную составляющую. Относительно этого смещенного положения гироскопический компас совершает в среднем незатухающие квазипериодические колебания.

Дисперсии углов, определяющих положение гироскопического компаса, помимо периодических составляющих, содержат также составляющую, возрастающую с течением времени по линейному закону. При достаточно большом промежутке времени дисперсия недемпфированного гирокомпаса может достичь значительной величины.

Поступила 30 VI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
2. Ройтенберг Я. Н. К теории гироскопического компаса. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
3. Ловитт У. В. Линейные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1957.
4. Свешников А. А. О движении гироскопического маятника при случайных перемещениях его точки подвеса. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3.