К ЗАДАЧЕ ДВИЖЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОСТОЯННОГО МОМЕНТА

К. Г. Валеев

(Ленинград)

Применяются цепные дроби к изучению движения твердого осесимметричного тела вокруг неподвижной точки O, когда вдоль оси симметрии действует постоянный момент.

1. Пусть с телом неподвижно скреплена прямоугольная система координат $\xi\eta\zeta$. Предполагается симметрия тела вокруг оси ζ, в этом случае равны моменты инерции A, B относительно осей ξ, η. Постоянный момент величиной m ($m > 0$) направлен вдоль оси ζ. Уравнения Эйлера для проекций ω_1, ω_2, ω_3 вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на подвижные оси координат ξ, η, ζ имеют вид

$$A d\omega_1/dt + (C-A)\,\omega_2\omega_3 = 0, \qquad A d\omega_2/dt - (C-A)\,\omega_3\omega_1 = 0, \qquad C d\omega_3/dt = m \tag{1.1}$$

и легко интегрируются [1] (стр. 134). Для начальных условий общего вида

$$\omega_1 = \omega_1^\circ, \quad \omega_2 = \omega_2^\circ, \quad \omega_3 = \omega_3^\circ, \quad t = 0, \quad (\omega_1^\circ)^2 + (\omega_2^\circ)^2 \neq 0 \tag{1.2}$$

используя обозначение $i = \sqrt{-1}$, имеем решение [1]

$$\omega_1 + i\omega_2 = (\omega_1^\circ + i\omega_2^\circ)\exp\left(i\frac{C-A}{A}\int_0^t \omega_3\,dt\right), \qquad \omega_3 = \omega_3^\circ + \frac{m}{C}t \tag{1.3}$$

Введем единичный вектор $\boldsymbol{\gamma}$, сохраняющий неизменное направление в пространстве. Обозначим его проекции на подвижные оси координат $\xi\eta\zeta$ через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Эти проекции удовлетворяют уравнениям [1] (стр. 128)

$$d\gamma_1/dt = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \qquad d\gamma_2/dt = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \qquad d\gamma_3/dt = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_3 \tag{1.4}$$

Вводится в рассмотрение комплексная переменная z [1] (стр. 121)

$$z = (\gamma_1 + i\gamma_2)(1-\gamma_3)^{-1} \tag{1.5}$$

полностью определяющая вектор $\boldsymbol{\gamma}$. Дифференцируя z по t в силу уравнений (1.4) для z получим уравнение Дарбу — Риккати [1] (стр. 130)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega_2 - i\omega_1}{2} - i\omega_3 z + \frac{\omega_2 + i\omega_1}{2} z^2 \tag{1.6}$$

Замена переменных вида

$$u = z\frac{\omega_2 + i\omega_1}{|\omega_2 + i\omega_1|}, \qquad \tau = 0.5\,|\omega_2^\circ + i\omega_1^\circ|\left(t + \frac{\omega_3^\circ C}{m}\right) \tag{1.7}$$

приводит к дифференциальному уравнению

$$du/d\tau = 1 - i\alpha\tau u + u^2, \qquad \alpha = 4mA^{-1}\,|\omega_2^\circ + i\omega_1^\circ|^{-2} \tag{1.8}$$

Если известно одно частное решение уравнения (1.8), то его решение сводится к квадратурам. Уравнение (1.8) можно привести к линейному дифференциальному уравнению второго порядка [1] (стр. 136).

Уравнение (1.8) описывает специальный случай движения тела с угловыми скоростями $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = \alpha\tau$, если принять переменную τ за время.

2. Решение уравнения (1.8) будем искать методом Лагранжа [2] (стр. 79). Подстановка $u = t(1-v)^{-1}$ приводит к дифференциальному уравнению

$$\tau\, dv/d\tau = (1-\alpha i)\tau^2 - (1-\alpha i\tau^2)v + v^2 \tag{2.1}$$

Замена независимого переменного $\tau^2 = x$ преобразует (2.1) в уравнение Риккати

$$2x\, dv / dx + (1 - i\alpha x)\, v - v^2 = (1 - i\alpha)\, x \tag{2.2}$$

Для этого уравнения можно найти частное решение в виде цепной дроби [2] (стр. 80), [3] (стр. 295)

$$v = -\frac{(\alpha i - 1)\, x}{3} - \frac{(2\alpha i + 1)\, x}{5} + \frac{(3\alpha i - 1)\, x}{7} - \frac{(4\alpha i + 1)\, x}{9} + \cdots$$
$$\cdots - \frac{(2n\alpha i + 1)\, x}{4n + 1} + \frac{[(2n + 1)\, \alpha i - 1]\, x}{4n + 3} - \cdots \tag{2.3}$$

С учетом замен, находим частное решение уравнения (1.8)

$$u = \frac{\tau}{1} + \frac{(\alpha i - 1)\, \tau^2}{3} - \frac{(2\alpha i + 1)\, \tau^2}{5} + \frac{(3\alpha i - 1)\, \tau^2}{7} - \cdots \tag{2.4}$$

Используя обозначение Принсгейма [2] (стр. 8), решение (2.4) можно записать в виде

$$u = \left[\frac{\tau}{1}, \frac{c_\nu \tau^2}{1}\right]_{\nu=2}^{\infty}, \qquad c_\nu = \frac{(-1)^\nu (\nu - 1)\, \alpha i - 1}{\nu^2 - 1} \tag{2.5}$$

Так как $c_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$, то цепная дробь в выражениях (2.4), (2.5) для $u(\tau)$ сходится при всех конечных значениях τ (см. [3] стр. 293). Полученное решение определяет положение в системе координат $\xi\eta\zeta$ вектора γ. Этот вектор сохраняет неизменное положение в пространстве, и в момент

$$t = -\omega_3{}^\circ C m^{-1}, \qquad \tau = 0 \tag{2.6}$$

совпадает по направлению с осью ζ. Форма решения удобна для численного расчета, но не пригодна для отыскания общего решения (1.8) при помощи квадратур.

3. Ищем общее решение уравнения (1.8) с начальными условиями

$$u = b, \quad \tau = 0 \tag{3.1}$$

В уравнении (1.8) сделаем замену зависимой переменной

$$u = b\, (b - y)\, [b - y - (1 + b^2)\, \tau]^{-1} \tag{3.2}$$

Получим дифференциальное уравнение

$$b\tau\, dy / d\tau + (c + d\tau + e\tau^2)\, y + (-1 + f\tau)\, y^2 = g\tau + h\tau^2 \tag{3.3}$$

Здесь постоянные коэффициенты равны

$$c = b, \qquad d = -2 - 2i\alpha b^2 (1 + b^2)^{-1}, \qquad e = i\alpha b$$
$$f = i\alpha b\, (1 + b^2)^{-1}, \qquad g = -2b - i\alpha b^3 (1 + b^2)^{-1}, \quad h = 1 + b^2 + i\alpha b^2 \tag{3.4}$$

Уравнение (3.3) инвариантно по форме относительно замены вида

$$y = g\tau\, (b + c - y_1)^{-1} \tag{3.5}$$

приводящей уравнение (3.3) к уравнению

$$b\tau\, dy_1 / d\tau + (c_1 + d_1\tau + e_1\tau^2) y_1 + (-1 + f_1\tau)\, y^2{}_1 = g_1\tau + h_1\tau^2 \tag{3.6}$$

Новые коэффициенты выражаются через старые по формулам

$$c_1 = b + c, \qquad f_1 = -hg^{-1}, \quad d_1 = -d - 2c_1 f_1, \qquad e_1 = -e$$
$$g_1 = g - dc_1 - f_1 c_1{}^2, \qquad h_1 = -gf - c_1 e \tag{3.7}$$

Применяя многократно замену (3.5), получим разложение в цепную дробь. Исключая множество значений b лебеговой меры нуль, можно построить цепную дробь с бесконечным числом звеньев. Сходимость получающихся цепных дробей не исследовалась.

4. При больших значениях τ можно применить другой прием отыскания решения уравнения (1.8). Сделаем подстановку

$$u = -\frac{dy}{d\tau} y^{-1} = -\frac{dy}{y d\tau} \tag{4.1}$$

что приведет уравнение (1.8) к линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + i\alpha\tau\frac{dy}{d\tau} + y = 0 \tag{4.2}$$

Уравнение (4.2) дифференцируем k раз по τ, найдем

$$\frac{d^{k+2}y}{d\tau^{k+2}} + i\alpha\tau\frac{d^{k+1}y}{d\tau^{k+1}} + (1 + i\alpha k\tau)\frac{d^k y}{d\tau^k} = 0 \tag{4.3}$$

Из (4.3) находим рекуррентное соотношение

$$\frac{d^{k+1}y}{d^k y d\tau} = -\left(\frac{i\alpha\tau}{1 + i\alpha k\tau} + \frac{1}{1 + i\alpha k\tau}\frac{d^{k+2}y}{d^{k+1}y\, d\tau}\right)^{-1} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.4}$$

Применяя последовательно (4.4) для исключения дифференциалов, получаем для (4.1) цепную дробь

$$u^\circ(\tau) = \left[\frac{(i\alpha\tau)^{-1}}{1}, \quad \frac{[1 + (\nu - 1)\alpha i]\,\alpha^{-2}\tau^{-2}}{1}\right]_{\nu=2}^{\infty} \tag{4.5}$$

Сходимость дроби (4.5) не известна, но непосредственной подстановкой можно убедиться, что подходящие дроби $u_k(\tau)$, где

$$u_1(\tau) = (i\alpha\tau)^{-1}, \qquad u_2(\tau) = \frac{(i\alpha\tau)^{-1}}{1 + (1 + i\alpha)\,\alpha^{-2}\,\tau^{-2}} \tag{4.6}$$

$$u_3(\tau) = \frac{(i\alpha\tau)^{-1}}{1 + \dfrac{(1 + i\alpha)\,\alpha^{-2}\tau^{-2}}{1 + (1 + 2i\alpha)\,\alpha^{-2}\,\tau^{-2}}}, \ldots$$

удовлетворяют уравнению (1.8) с точностью до величины $O(\alpha^{-k}\tau^{-2k})$. Цепная дробь $u^\circ(\tau)$ (4.5) представляет асимптотически при $\tau \to \infty$ частное решение уравнения (1.8). Разлагая его в ряд по обратным степеням τ, находим

$$u^\circ(\tau) = \frac{1}{i\alpha\tau} - \frac{1 + i\alpha}{i\alpha^2\tau^3} + \frac{(1 + i\alpha)(2 + 3i\alpha)}{i\alpha^5\tau^5} + O\left(\frac{1}{\alpha^4\tau^7}\right) \tag{4.7}$$

Решение $u^\circ(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$, т. е. при $t \to \infty$. Для z из (1.7) находим выражение для частного решения

$$z^\circ(t) = \exp\left(i\frac{C - A}{A}\int_0^t \omega_3\, dt - i\, Arg\,(w_2^\circ + i\omega_1^\circ)\right) u^\circ(\tau) \tag{4.8}$$

Так как $z^\circ(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то существует такой неподвижный вектор γ°, к которому приблизится ось ζ при $t \to \infty$. Комплексная переменная $z^\circ(t)$ определяет вектор — γ°. Сам вектор γ° описывает в подвижной системе координат $\xi\eta\zeta$ линейчатую поверхность. Он вращается вокруг оси ζ с угловой скоростью, близкой к $(C - A)\,A^{-1}\,\omega_3$, и одновременно приближается к ней.

Введем подвижную относительно тела систему координат $\xi'\eta'\zeta$, повернутую вокруг оси ζ на угол φ относительно системы $\xi\eta\zeta$, где

$$\varphi = \frac{C-A}{A}\int\limits_0^t \omega_3\,dt - Arg\,(\omega_2{}^\circ - i\omega_1{}^\circ) \qquad (4.9)$$

В системе $\xi'\eta'\zeta$ движение вектора $-\gamma^\circ$ описывается мало изменяющейся при достаточно больших значениях $t > 0$ комплексной переменной $u^\circ(\tau)$. Следовательно, система $\xi'\eta'\zeta$ вращается вокруг вектора γ° с угловой скоростью, которая оказывается близкой к $CA^{-1}\omega_3$.

Окончательно при больших значениях $t > 0$ соблюдается следующий характер движения. Существует неподвижный вектор γ°, составляющий непрерывно уменьшающийся угол

$$A\,|\,\omega_1{}^\circ + i\omega_2{}^\circ\,|\,m^{-1}t^{-1} + O\,(t^{-2})$$

с осью ζ. Тело вращается с угловой скоростью $(A-C)\,A^{-1}\,mt + O\,(1)$ вокруг оси ζ. Ось ζ вращается с угловой скоростью $CA^{-1}\,mt + O\,(1)$ вокруг вектора γ°.

Автор благодарит А. И. Лурье за постановку задачи и консультации.

Поступила 14 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, М., 1961.
2. Хованский А. Н. Приложение цепных дробей и обобщений к вопросам приближенного анализа. Гостехиздат, М., 1956.
3. Данилов В. Л., Иванова А. И., Исакова Е. К., Люстерник Л. А., Салехов Г. С., Хованский А. Н., Цлаф Л. Я., Янпольский А. Р. Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные дроби. Физматгиз, М., 1961.

О ДВИЖЕНИИ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО КОМПАСА ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ ЕГО ТОЧКИ ОПОРЫ

Л. Я. Ройтенберг (Москва)

Изучается движение гироскопического компаса при случайных перемещениях его точки опоры, что имеет место в условиях качки корабля, вибраций основания прибора и в других случаях. В указанных условиях ускорение точки опоры гироскопического компаса представляет собой случайную векторную функцию времени, и движение гирокомпаса будет описываться системой линейных неоднородных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами и случайными правыми частями, т. е. в этих условиях гироскопический компас представляет собой систему со случайным параметрическим возбуждением под воздействием случайных внешних сил.

1. При нахождении уравнений движения гироскопического компаса для рассматриваемого случая будем исходить из полученных А. Ю. Ишлинским [1] общих уравнений движения гирокомпаса, которые можно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered}
2B\cos(\varepsilon-\delta)\,[-(V/R)(\sin\alpha_1\sin\gamma-\cos\alpha_1\sin\beta\cos\gamma)-(\alpha_1{}^{\cdot}+\Omega)\cos\beta\cos\gamma-\\
-\beta^{\cdot}\sin\gamma]=\operatorname{lm}W_1{}^\circ\sin\alpha_1\cos\beta-\operatorname{lm}W_2{}^\circ\cos\alpha_1\cos\beta-l(mW_3{}^\circ+P)\sin\beta-M_x^*\\
2B\cos(\varepsilon-\delta)\,[(V/R)(\sin\alpha_1\cos\gamma+\cos\alpha_1\sin\beta\sin\gamma)-(\alpha^{\cdot}+\Omega)\cos\beta\sin\gamma+\\
+\beta^{\cdot}\cos\gamma]=M_y{}^* \qquad (1.1)\\
[2B\cos(\varepsilon-\delta)]^{\cdot}=\operatorname{lm}W_1{}^\circ(\cos\alpha_1\cos\gamma-\sin\alpha_1\sin\beta\sin\gamma)+\\
+\operatorname{lm}W_2{}^\circ(\sin\alpha_1\cos\gamma+\cos\alpha_1\sin\beta\sin\gamma)-l(mW_3{}^\circ+P)\cos\beta\sin\gamma+M_z{}^*\\
2B\sin(\varepsilon-\delta)\,[(V/R)\cos\alpha_1\cos\beta+(\alpha_1{}^{\cdot}+\Omega)\sin\beta+\gamma^{\cdot}]=\varkappa\sin\delta\cos\delta-M_{y_1}{}^*
\end{gathered}$$

Здесь точка означает дифференцирование по времени.