РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. Ф. Демьянов, Л. Ю. Худяков (Ленинград)

Рассматривается одна задача целочисленного квадратичного программирования. Задача целочисленного линейного программирования рассматривалась, например, в [1–3]. Сначала рассматривается нецелочисленная вспомогательная задача («непрерывная» задача), а затем показывается, как по известному решению нецелочисленной задачи находить целочисленное решение. В качестве примера приводится задача выбора оптимального порядка внешних воздействий на линейную систему.

1. Постановка задачи. Задана функция

$$F(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^* N \mathbf{X} + \mathbf{X}^* \mathbf{B} + c \tag{1.1}$$

где $\mathbf{X} = (x^1, \ldots, x^n)$ — n-мерный вектор, N — вещественная симметричная положительно определенная квадратная матрица n-го порядка, B — n-мерный вектор, c — вещественное число, $*$ означает транспонирование.

Заданы n вещественных чисел $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, из этих n чисел можно составить $n!$ различных n-мерных векторов, в каждый из которых в качестве координат входят все числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Обозначим совокупность этих векторов через Ω. Легко усмотреть, что все точки множества Ω лежат в плоскости, перпендикулярной вектору $(1, 1, \ldots, 1)$ и проходящей через точку $(a, a, \ldots, a)$, где $a = (\gamma_1 + \ldots + \gamma_n) / n$.

Требуется найти такую точку $\mathbf{Z} \in \Omega$, что

$$F(\mathbf{Z}) = \min F(\mathbf{X}), \qquad \mathbf{X} \in \Omega \tag{1.2}$$

Ясно, что эту задачу можно решить перебором, однако при больших n перебор практически неосуществим. Введем в рассмотрение множество L, образованное из векторов множества Ω следующим образом: $\mathbf{X} \in L$, если

$$\mathbf{X} = \alpha_1 \mathbf{X}_1 + \ldots + \alpha_s \mathbf{X}_s; \qquad \mathbf{X}_i \in \Omega, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, s; \qquad \alpha_1 + \ldots + \alpha_s = 1$$
$$s \leqslant n! \tag{1.3}$$

Ясно, что L — выпуклое замкнутое ограниченное в n-мерном евклидовом пространстве множество (многогранник): $\Omega \subset L$.

Решим вначале вспомогательную задачу. Найти такую точку $\mathbf{Y} \in L$, что

$$F(\mathbf{Y}) = \min F(\mathbf{X}), \qquad \mathbf{X} \in L \tag{1.4}$$

2. Решение вспомогательной задачи. Найдем минимум функции (1.1) на множестве L. Через $\mathbf{G}(\mathbf{X})$ обозначим градиент функции $F(\mathbf{X})$

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \left(\frac{\partial F}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x^n}\right) = 2N\mathbf{X} + \mathbf{B}$$

Выберем любое $\mathbf{X}_1 \in L$. Вычисляя градиент функции $F(\mathbf{X})$ в точке $\mathbf{X}_1$, имеем $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}(\mathbf{X}_1) = 2N\mathbf{X}_1 + \mathbf{B}$. Найдем такую точку $\mathbf{Z}_1 \in L$, что

$$\mathbf{Z}_1^* \mathbf{G}_1 = \min \mathbf{X}^* \mathbf{G}_1, \qquad \mathbf{X} \in L \tag{2.1}$$

Компоненты вектора $\mathbf{Z}_1$ надо искать следующим образом. Пусть $\mathbf{G} = (g_1^1, \ldots, g_1^n)$ и пусть наибольшей компонентой вектора $\mathbf{G}_1$ является g_1^k. Тогда в качестве z_1^k надо взять наименьшее из чисел $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Далее ищем наибольшее из чисел g_1^i $(i \neq k)$ и наименьшее из оставшихся в последовательности $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ и так далее, пока не найдем все компоненты вектора $\mathbf{Z}_1$. Легко видеть, что $\mathbf{Z}_1 \in \Omega$, т. е. решение линейной задачи (2.1) будет целочисленным. Составим теперь линейную комбинацию

$$\mathbf{X}_1(\alpha) = \alpha \mathbf{X}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{Z}_1, \qquad \alpha \in [0, 1]$$

Найдем такое $\alpha = \alpha_1 \in [0, 1]$, что $F(\mathbf{X}_1(\alpha_1)) = \min F(\mathbf{X}_1(\alpha))$, $\alpha \in [0, 1]$. Ясно, что

$$\alpha_1 = \frac{-(\mathbf{X}_1 - \mathbf{Z}_1)^* [2N\mathbf{Z}_1 + \mathbf{B}]}{2(\mathbf{X}_1 - \mathbf{Z}_1)^* N (\mathbf{X}_1 - \mathbf{Z}_1)} = \frac{s_1}{s_2} \tag{2.2}$$

Если $\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{Z}_1$, то в (2.2) знаменатель $s_2 > 0$ в силу положительной определенности матрицы N, если же $\mathbf{X}_1 = \mathbf{Z}_1$, то $\mathbf{X}_1$ является решением поставленной задачи.

Если α_1, определяемое (2.2), окажется отрицательным, то, как легко видеть, $F(\mathbf{Z}_1) < F(\mathbf{X}_1)$, в этом случае полагаем $\mathbf{X}_2 = \mathbf{Z}_1$.

Пусть в (2.2) числитель $s_1 \geqslant 0$. Так как

$$s_2 = s_1 + (\mathbf{X}_1 - \mathbf{Z}_1)^* [2N\mathbf{X}_1 + \mathbf{B}], \qquad (\mathbf{X}_1 - \mathbf{Z}_1)^* [2N\mathbf{X}_1 + \mathbf{B}] \geqslant 0$$

(последнее в силу (2.1)), то $s_2 \geqslant s_1$ и $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant 1$. В этом случае полагаем

$$\mathbf{X}_2 = \alpha_1 \mathbf{X}_1 + (1 - \alpha_1) \mathbf{Z}_1$$

Ясно, что $F(\mathbf{X}_2) \leqslant F(\mathbf{X}_1)$, $\mathbf{X}_2 \in L$.

Далее поступаем аналогично. Таким образом, получаем последовательности

$$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots; \quad \mathbf{X}_s \in L; \qquad \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \ldots; \quad \mathbf{Z}_s \in \Omega \tag{2.3}$$

В силу выбора точек Z_s имеем (2.4)

$$\varphi_s = (\mathbf{Z}_s - \mathbf{X}_s)^* \mathbf{G}_s \leqslant 0, \qquad F(\mathbf{X}_1) \geqslant F(\mathbf{X}_2) \geqslant \ldots, \qquad \lim F(\mathbf{X}_s) = d, \qquad F(\mathbf{X}_s) \geqslant d$$

Здесь d — конечное число, так как L — ограниченное множество.

Пусть $\mathbf{Y}$ — любой из пределов последовательности $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots$, т. е. существует подпоследовательность $\mathbf{X}_{k_1}, \mathbf{X}_{k_2}, \ldots$ такая, что $\mathbf{X}_{k_s} \to \mathbf{Y} \in L$.

Тогда, как и в [4], можно показать, что

$$F(\mathbf{Y}) = \min F(\mathbf{X}), \ \mathbf{X} \in L$$

Из [4] вытекает также, что

$$\min [(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^* \mathbf{G}] = 0, \qquad \mathbf{X} \in L, \qquad \mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{Y}) = 2N\mathbf{Y} + \mathbf{B} \tag{2.5}$$

3. Нахождение целочисленного решения по известному решению вспомогательной задачи. Пусть известно решение «непрерывной» задачи, т. е. известна такая точка $\mathbf{Y} \in L$, что $F(\mathbf{Y}) = \min F(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} \in L$ (находить такую точку можно способом, описанным выше).

Для нахождения решения целочисленной задачи, т. е. нахождения точки $\mathbf{Z} \in \Omega$, доставляющей минимум функции (1.1) на множестве Ω, можно применять следующие соображения:

1°. Представим функцию $F(\mathbf{X})$ в виде

$$F(\mathbf{X}) = F(\mathbf{Y}) + (\mathbf{X} - \mathbf{Y})^* [2N\mathbf{Y} + \mathbf{B}] + (\mathbf{X} - \mathbf{Y})^* N (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \tag{3.1}$$

Так как матрица N положительно определенная, то

$$F(\mathbf{X}) \geqslant F(\mathbf{Y}) + (\mathbf{X} - \mathbf{Y})^* \mathbf{G}, \qquad \mathbf{G} = 2N\mathbf{Y} + \mathbf{B}$$

Пусть нам известен алгоритм упорядочения точек множества Ω относительно вектора $\mathbf{G}$, т. е. известен способ построения точек

$$\mathbf{X}_{11}, \ \mathbf{X}_{12}, \ldots, \mathbf{X}_{1p_1}, \ \mathbf{X}_{21}, \ldots, \mathbf{X}_{2p_2}, \ldots \tag{3.2}$$

таких, что

$$\mathbf{X}_{ij} \in \Omega \qquad (i = 1, 2, \ldots; \ j = 1, 2, \ldots, p_i)$$

$$\mathbf{X}_{11}^* \mathbf{G} = \mathbf{X}_{12}^* \mathbf{G} = \ldots = \mathbf{X}_{1p_1}^* \mathbf{G} < \mathbf{X}_{21}^* \mathbf{G} = \ldots = \mathbf{X}_{2p_2}^* \mathbf{G} < \ldots \tag{3.3}$$

причем, если $\mathbf{X}_{ij}^* \mathbf{G} = a$, то любой вектор $\mathbf{X} \in \Omega$, для которого $\mathbf{X}^* \mathbf{G} < a$, находится в последовательности (3.2) левее вектора $\mathbf{X}_{ij}$ (ниже в приложении показано, как строить последовательность (3.2), обладающую свойством (3.3)). Тогда

$$(\mathbf{X}_{11}-\mathbf{Y})^*\,\mathbf{G}=\ldots=(\mathbf{X}_{1p_1}-\mathbf{Y})^*\,\mathbf{G}<\ldots$$

Так как точка $\mathbf{Y}$ — точка минимума функции $F(\mathbf{X})$ на множестве L, то из (2.5) получим $(\mathbf{X}_{ij}-\mathbf{Y})^*\,\mathbf{G}\geqslant 0$. Образуем множество

$$R_m=\{\mathbf{X}_{11},\ldots,\mathbf{X}_{1p_1},\ \mathbf{X}_{21},\ldots,\mathbf{X}_{m1},\ldots,\mathbf{X}_{mp_m}\}$$

Пусть

$$\Theta_m=\min F(\mathbf{X}),\qquad \mathbf{X}\in R_m,\qquad \delta_m=(\mathbf{X}_{m1}-\mathbf{Y})^*\,\mathbf{G}$$

Для $\mathbf{X}\in\Omega$; $\mathbf{X}\,\overline{\in}\,\mathbf{R}_m$ будет $(\mathbf{X}-\mathbf{Y})^*\,\mathbf{G}>\delta_m$. Ясно, что δ_m не убывает, а Θ_m разве лишь уменьшается с увеличением m. Для $\mathbf{X}\in\Omega$, $\mathbf{X}\,\overline{\in}\,R_m$, имеем

$$F(\mathbf{X})>F(\mathbf{Y})+\delta_m \tag{3.4}$$

Если окажется $\Theta_m\leqslant F(\mathbf{Y})+\delta_m$, то $\Theta_m=\min F(\mathbf{X})$, $\mathbf{X}\in\Omega$.

2°. Изложенный выше способ нахождения целочисленного решения по известному «непрерывному» неприменим, если в точке $\mathbf{Y}$ функция $F(\mathbf{X})$ достигает минимума во всем пространстве (тогда $\mathbf{G}=(0,\ldots,0)$) или если все координаты вектора $\mathbf{G}$ одинаковы. В этом случае, если матрица N строго положительно определена, можно строить последовательность точек (3.2), обладающую свойством

$$(\mathbf{X}_{11}-\mathbf{Y})^2=\ldots=(\mathbf{X}_{1p_1}-\mathbf{Y})^2<(\mathbf{X}_{21}-\mathbf{Y})^2=\ldots=(\mathbf{X}_{2p_2}-\mathbf{Y})^2<\ldots$$

В этом случае тоже можно, используя разложение (3.1) и строгую положительную определенность матрицы N, получить оценки, аналогичные (3.4).

4. **Пример.** Рассмотрим задачу выбора оптимального порядка воздействий на линейную систему

$$\mathbf{X}^{\cdot}(t)=A(t)\,\mathbf{X}(t)+B(t)\,\mathbf{u}_{j(i)}(t)+\mathbf{f}(t),\qquad \mathbf{X}(0)=\mathbf{X}_0 \tag{4.1}$$

где $\mathbf{X}(t)$ — неизвестная n-мерная вектор-функция, $\mathbf{A}(t)$ — квадратная матрица n-го порядка, $\mathbf{u}_{j(i)}(t)$ — m-мерная вектор-функция внешнего управляемого воздействия, $\mathbf{f}(t)$ — известная n-мерная вектор-функция внешнего неуправляемого воздействия, $\mathbf{B}(t)$ — матрица порядка $m\times n$.

Компоненты векторов $u_{j(i)}(t)$, $f(t)$ и элементы матриц $A(t)$ и $B(t)$ считаются кусочно-непрерывными, заданными и ограниченными на $[0,T]$ функциями времени. В общем случае достаточно их измеримости. Вектор-функция $\mathbf{u}_{j(i)}(t)$ определяется соотношением

$$\mathbf{u}_{j(i)}(t)=\sum_{i=1}^{q}\mathbf{K}_i\varphi(t-t_{j(i)}) \tag{4.2}$$

где $\mathbf{K}_i$ $(i=1,\ldots,q)$ — заданные m-мерные векторы, $\varphi(t)\equiv 0$ при $t<0$ и $t>\Delta\tau$, а при $t\in[0,\Delta r]$ функция $\varphi(t)\equiv\psi(t)$, здесь $\psi(t)$ — непрерывная заданная функция, Δr — известная величина,

$$t_k=t_{k-1}+\Delta t,\ k=1,\ldots,q-1;\ t_0=0,\ t_{q-1}=T$$

где Δt — заданная величина.

Таким образом, вектор-функция $\mathbf{u}_{j(i)}(t)$ определяется дискретной числовой функцией $j(i)$. Общее число функций $j(i)$ при $i=1,\ldots,q$; $j=0,\ldots,q-1$ равно $q!$. Совокупность этих функций обозначим через Ω_1. Задан функционал

$$J(j(i))=\sum_{j=0}^{q-1}\mathbf{X}^*(t_j,j(i))\ N\mathbf{X}(t_j,\ j(i)) \tag{4.3}$$

Здесь $\mathbf{X}(t_j,\ j(i))$ — решение системы (4.1) в точке t_j при выборе управления $j(i)\in\Omega_1$, а матрица N — положительно определенная квадратная матрица n-го порядка. Требуется найти $j_0(i)\in\Omega_1$ такую, что

$$J(j_0(i))=\min\sum_{j=0}^{q-1}\mathbf{X}^*(t_j,j(i))\,N\mathbf{X}(t_j,(i)),\qquad j(i)\in\Omega_1 \tag{4.4}$$

По формуле Коши решение системы (4.1) запишется в виде

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{X}_0 + \int_0^t Y(t)\,Y^{-1}(\tau)\left[B(\tau)\sum_{i=1}^{q}\mathbf{K}_i\varphi(\tau - t_{j(i)}) + f(\tau)\right]d\tau$$

Здесь $Y(t)$ — фундаментальная матрица однородной части системы (4.1), тогда задачу минимизации функционала (4.4) можно свести к следующей.

Задана функция

$$F(\mathbf{K}) = \mathbf{K}^* N_1 \mathbf{K} + \mathbf{K}^*\mathbf{b} + c \tag{4.5}$$

где $\mathbf{K} = (\mathbf{K}_1, \ldots, \mathbf{K}_q)$ — mq-мерный вектор, так как $\mathbf{K}_i$ $(i = 1, \ldots, q)$ — m-мерные векторы, N_1 — положительно определенная матрица q-го порядка, $\mathbf{b}$ — m-мерный вектор, c — вещественное число. Заданы, кроме того, q m-мерных векторов $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$, из которых можно составить $q!$ различных mq-мерных векторов, образующих множество Ω. Необходимо найти $\mathbf{Y} \in \Omega$ такое, чтобы

$$F(\mathbf{Y}) = \min F(\mathbf{K}), \quad \mathbf{K} \in \Omega \tag{4.6}$$

Решается эта задача изложенным в п. 1—2 способом, но нахождение решения линейной задачи в этом случае сводится к решению «задачи о назначениях». Если у векторов γ_i $(i = 1, \ldots, q)$ в (4.2) от номера воздействия i зависит лишь одна компонента, то задача дословно совпадает с изложенной в п. 1 задачей.

Приложение. Рассмотрим упорядочение множества Ω относительно вектора $\mathbf{G}$. Ниже приведен алгоритм построения последовательности (3.2), обладающей свойством (3.3). Для простоты будем считать, что координаты вектора $\mathbf{G} = (g^1, \ldots, g^n)$ все различны и что $g^1 < g^2 < \ldots < g^n$. По предположению, сделанному в п. 1, среди чисел $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ тоже нет равных.

Ясно, что в качестве $\mathbf{X}_{11}$ следует взять тогда вектор $\mathbf{X}_{11} = (x_{11}{}^1, \ldots, x_{11}{}^n)$, координаты которого есть числа γ_i, расположенные в порядке убывания.

Пусть построено начало последовательности (3.2): $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_{k-1}$, для нахождения следующего вектора поступаем так: для каждого из ранее построенных векторов $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_{k-1}$ строим по $(n - 1)$ векторов, полученных перестановкой только двух соседних координат этого вектора, из полученного таким образом множества векторов D_{k-1} выбираем вектор $\mathbf{X}_k$, для которого

$$\mathbf{X}_k^*\mathbf{G} = \min \mathbf{X}^*\mathbf{G}, \qquad \mathbf{X} \in D_{k-1}, \qquad \mathbf{X} \neq \mathbf{X}_i \qquad (i = 1, \ldots, k-1)$$

Покажем, что полученный таким образом вектор является искомым. Действительно, у каждого вектора $\mathbf{Z} \in \Omega$, для которого

$$\min \mathbf{X}^*\mathbf{G} < \mathbf{Z}^*\mathbf{G} < \max \mathbf{X}^*\mathbf{G}, \quad \mathbf{X} \in \Omega$$

существуют векторы $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$, полученные из $\mathbf{Z}$ перестановкой только двух соседних координат и обладающих тем свойством, что $\mathbf{Z}_1^*\mathbf{G} < \mathbf{Z}^*\mathbf{G} < \mathbf{Z}_2^*\mathbf{G}$.

Но тогда, если $\mathbf{X}_k$ — следующий за $\mathbf{X}_{k-1}$ вектор в последовательности (3.2), то существует вектор $\mathbf{X}_{k1}$, полученный из $\mathbf{X}_k$ перестановкой только двух соседних координат, для которого $\mathbf{X}_{k1}^*\mathbf{G} < \mathbf{X}_k^*\mathbf{G}$ и так как $\mathbf{X}_k$ — ближайший к $\mathbf{X}_{k-1}$ вектор последовательности (3.1), то $\mathbf{X}_{k1}$ должен находиться среди векторов $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_{k-1}$, а это и значит, что точка $\mathbf{X}_k$ находится в множестве D_{k-1}.

Поступила 24 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В. Математические методы организации и планирования производства. Изд. ЛГУ, 1939.
2. Фон-Нейман Дж. Об одной нулевой игре двух лиц, эквивалентной задаче оптимального назначения. Сб. Матричные игры, вып. 1, Физматгиз, 1961.
3. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Задачи и методы линейного программирования. Физматгиз, 1961.
4. Демьянов В. Ф. Построение программного управления в линейной системе, оптимального в интегральном смысле. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.