О ТЕОРЕМЕ РАУСА ДЛЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

Л. Н. Семенова (Москва)

1. Для голономных систем известна одна теорема Рауса [1], которая позволяет судить об устойчивости стационарного движения. В некоторых случаях эта теорема применима и для неголономных систем. Ниже рассматривается один из таких случаев. Пусть движение неголономной механической системы, на которую наложены неголономные, линейные, стационарные связи, описывается системой дифференциальных уравнений с неопределенными множителями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k a_{ki} = R_{qi}, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ki} q_i^{\cdot} = 0 \qquad \left(\begin{matrix} i = 1, \ldots, n \\ k = 1, \ldots, n-m \end{matrix}\right) \tag{1.1}$$

Предположим, что координаты $q_{s+1}, \ldots, q_n$ $(s < n)$ — циклические:

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k a_{k\alpha} = 0 \qquad (\alpha = s+1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

Для выполнения второй системы равенств (1.2) достаточно, чтобы $a_{k\alpha} \equiv 0$.

Уравнения движения такой системы имеют $n - s$ первых интегралов

$$\partial L \,/\, \partial q_\alpha^{\cdot} = \beta_\alpha \qquad (\beta_\alpha = \mathrm{const}) \tag{1.3}$$

Выразим из (1.3) циклические скорости через нециклические координаты и скорости следующим образом:

$$q_\alpha^{\cdot} = q_\alpha^{\cdot}\,(q_1, \ldots, q_s, q_1^{\cdot}, \ldots, q_s^{\cdot}, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_n) \tag{1.4}$$

Обозначим через L^* результат исключения $q_{s+1}^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}$ из выражения L посредством уравнений (1.4). Получим

$$\frac{\partial L^*}{\partial q_j^{\cdot}} = \frac{\partial L}{\partial q_j^{\cdot}} + \sum_{\alpha=s+1}^{n} \beta_\alpha \frac{\partial q_\alpha^{\cdot}}{\partial q_j^{\cdot}}, \qquad \frac{\partial L^*}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{\alpha=s-1}^{n} \beta_\alpha \frac{\partial q_\alpha^{\cdot}}{\partial q_j}$$

На основании этих уравнений система (1.1) принимает вид $(j = 1, \ldots, s)$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial q_j^{\cdot}} - \frac{\partial L^*}{\partial q_j} - \sum_{\alpha=s+1}^{n} \beta_\alpha \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial q_\alpha^{\cdot}}{\partial q_j^{\cdot}} - \frac{\partial q_\alpha^{\cdot}}{\partial q_j}\right) = \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k a_{kj}, \quad \sum_{j=1}^{s} a_{kj} q_j^{\cdot} = 0 \tag{1.5}$$

Нетрудно убедиться, что система (1.5) допускает интеграл энергии

$$H \equiv \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L^*}{\partial q_j^{\cdot}} q_j^{\cdot} - L^* - \sum_{\alpha=s+1}^{n} \beta_\alpha \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial q_\alpha^{\cdot}}{\partial q_j^{\cdot}} q_i^{\cdot} - q_\alpha^{\cdot}\right) = \mathrm{const}$$

что и следовало ожидать, так как действующие на систему активные силы имеют потенциал, а наложенные на систему связи — идеальные и стационарные.

Пусть при некоторых значениях β_α уравнения (1.5) допускают частное решение $q_j = 0$. Этому решению соответствует стационарное движение, в котором изменяются одни циклические координаты q_α.

Уравнениями возмущенного движения будут уравнения (1.5). Теорема Рауса состоит в том, что если функция $V = H - H_0$ будет знакоопределенной от переменных $q_j, q_j^{\cdot}$, то (согласно теореме Ляпунова, так как $V^{\cdot} \equiv 0$) стационарное движение будет устойчивым; H_0 обозначает функцию H, когда в последней все нециклические координаты q_j и их скорости $q_j^{\cdot}$ положены равными нулю [1].

Замечание. Теорема Рауса справедлива и для неголономных систем с нелинейными стационарными связями. Действительно, пусть неголономные нелинейные стационарные связи выражаются уравнениями

$$\varphi_k\,(q_1, \ldots, q_n\, q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n-m) \tag{1.6}$$

Определим возможные перемещения по Четаеву

$$(\partial\varphi_k / \partial q_1^{\cdot})\delta q_1 + \ldots + \partial\varphi_k / \partial q_n^{\cdot})\delta q_n = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n-m) \tag{1.7}$$

В силу того, что действительные перемещения находятся среди возможных, т. е. удовлетворяют системе (1.7), для системы (1.5) также существует интеграл энергии.

2. *Пример*. Рассмотрим гиростат S, представляющий собой твердое тело S_1 со сферическим основанием, опирающимся на горизонтальную абсолютно шероховатую плоскость, с которым неизменно связана ось вращения симметричного ротора, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω. Примером такого гиростата может служить, в частности, гироскопический шар Бобылева [2]. Будем предполагать, что сферическое основание тела S_1 касается опорной плоскости только одной своей точкой P. Предположим также, что геометрический центр O_1 сферического основания тела S_1 совпадает с центром тяжести O гиростата S. Последний примем за начало подвижной системы координатных осей $Oxyz$, совмещенной с осями центрального эллипсоида инерции преобразованного тела. Моменты инерции относительно осей xyz обозначим $A = B$, C. В неподвижной системе координат $O_2\xi\eta\zeta$ ось ζ направлена вертикально вверх. Пусть u, v, w и p, q, r — соответственно проекции скорости центра тяжести гиростата и мгновенной угловой скорости на оси xyz; φ, ψ, θ — углы Эйлера; x, y, z — координаты точки касания. Уравнения движения этой системы возьмем в форме системы уравнений Лагранжа с неопределенными множителями с функцией Лагранжа

$$L = {}^1/_2\, M\,(u^2 + v^2 + w^2) + {}^1/_2\,[A\,(p^2 + q^2) + Cr^2 + C_2\omega^2] + C_2\omega r - Mga$$

Уравнения связей выражают равенство нулю скорости точки касания

$$u + qz - ry = 0, \qquad v + rx - pz = 0, \qquad w + py - qx = 0$$

Из матрицы

$$\| a_{ki} \| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & a\sin\theta\cos\varphi & 0 & a\cos\theta\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 & -a\sin\theta\sin\varphi & 0 & a\cos\theta\cos\varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a\sin\theta \end{Vmatrix}$$

видно, что коэффициенты при $\psi^{\cdot}$ обращаются в нуль, т. е. $R_\psi = 0$ и $\partial L / \partial\psi = 0$; следовательно, координата ψ циклическая. Исследуем устойчивость движения

$$\varphi = \theta = 0, \quad \psi^{\cdot} = r_0, \quad u = v = w = 0, \quad \varphi^{\cdot} = \theta^{\cdot} = 0 \tag{2.1}$$

Согласно теореме Рауса, это стационарное движение будет устойчивым, если функция $V = H - H_0$ будет знакоопределенной. Рассмотрим функцию

$$V = {}^1/_2\, M\,(u^2 + v^2 + w^2) + {}^1/_2\, A\theta^{\cdot 2} + {}^1/_2\, k^{-1}\,[C_2^2\,\omega^2\,(1 - \cos\theta)^2 + \\ + 2CC_2\,\omega r_0\,(1 - \cos\theta) + (C - A)\,C\,r_0^2\sin^2\theta + AC\,\varphi^{\cdot 2}\sin^2\theta] \tag{2.2}$$

$$(k = A\sin^2\theta + C\cos^2\theta)$$

Квадратичная часть функции

$$V_2 = {}^1/_2\, M\,(u^2 + v^2 + w^2) + {}^1/_2\, A\theta^{\cdot 2} + {}^1/_2\,[(C - A)\,r_0 + C_2\omega]\,r_0\theta^2$$

будет определенно положительной по отношению u, v, w, θ, $\theta^{\cdot}$ при условии

$$(C - A)\,r_0 + C_2\omega > 0 \tag{2.3}$$

Условие (2.3) совпадает с условием (4.18) работы [3] при $a_1 = 0$.

Таким образом, согласно теореме об устойчивости по отношению к части переменных [4], стационарное движение (2.1) устойчиво по отношению к u, v, w, θ, $\theta^{\cdot}$ и (2.3) является достаточным условием устойчивости.

Поступила 23 V 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. Изд-во АН СССР, 1962.
2. Жуковский Н. Е. О гироскопическом шаре Бобылева, т. 1, Собр. соч., Гостехтеоретиздат, 1948.
3. Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных. Вестн. Москов. ун-та, 1957, № 4.
4. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гиростата некоторого вида. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.