Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

К ПОСТРОЕНИЮ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК

А. Л. Гольденвейзер, А. В. Колос

(Москва)

Обсуждаются пути построения приближенной теории расчета тонких упругих пластинок без использования предположений типа гипотезы Кирхгофа. До последнего времени единственным методом решения этой задачи был метод, основанный на использовании степенных рядов или рядов, расположенных по полиномам Лежандра, однако недавно начали появляться работы, в которых эта цель достигается при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. В предлагаемой работе обсуждаются свойства этих методов и выводятся уравнения, к которым приводит асимптотический метод в задаче об общей деформации тонкой пластинки, срединная плоскость которой отнесена к произвольной ортогональной системе криволинейных координат.

1. Отнесем срединную плоскость пластинки к ортогональной системе криволинейных координат α, β и будем полагать, что координата γ перпендикулярна к срединной плоскости. Тогда дифференциальные уравнения трехмерной задачи теории упругости будут иметь вид

$$
\begin{gathered}
H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\gamma}}{\partial \gamma} - H_\alpha \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial \alpha} (\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\beta\beta}) - 2H_\beta \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial \beta} \sigma_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha\beta) \\
H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\alpha\gamma}}{\partial \alpha} + H_\beta \frac{\partial \sigma_{\beta\gamma}}{\partial \beta} + \frac{\partial \sigma_{\gamma\gamma}}{\partial \gamma} - H_\alpha \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial \alpha} \sigma_{\alpha\gamma} - H_\beta \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial \beta} \sigma_{\beta\gamma} = 0 \\
E\left(H_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} - H_\beta \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial \beta} u_\beta\right) = \sigma_{\alpha\alpha} - \nu(\sigma_{\beta\beta} + \sigma_{\gamma\gamma}) \qquad (\alpha\beta) \\
E \frac{\partial W}{\partial \gamma} = \sigma_{\gamma\gamma} - \nu(\sigma_{\alpha\alpha} + \sigma_{\beta\beta}) \qquad (1.1) \\
E\left(H_\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} + H_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} + H_\alpha \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial \alpha} u_\beta + H_\beta \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial \beta} u_\alpha\right) = 2(1+\nu)\sigma_{\alpha\beta} \\
E\left(H_\alpha \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \gamma}\right) = 2(1+\nu)\sigma_{\alpha\gamma} \qquad (\alpha\beta)
\end{gathered}
$$

Здесь $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\alpha\gamma}$, $\sigma_{\beta\beta}$, $\sigma_{\beta\gamma}$, $\sigma_{\gamma\gamma}$ — компоненты тензора напряжений, u_α, u_β, W — компоненты вектора смещения, H_α, H_β — параметры Ляме, E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона. Символ $(\alpha\beta)$ здесь и в дальнейшем означает, что имеет место второе соотношение, которое получается из приведенного заменой α на β, и наоборот.

Предполагая, что пластинка произвольным образом загружена по верхней и нижней плоскостям, имеем условия на поверхностях $\gamma = \pm h$

$$
\begin{gathered}
\sigma_{\gamma\gamma} = a(\alpha, \beta), \quad \sigma_{\alpha\gamma} = h^{-1} c_\alpha(\alpha, \beta) \quad (\alpha\beta) \quad \text{при } \gamma = h \\
\sigma_{\gamma\gamma} = b(\alpha, \beta), \quad \sigma_{\alpha\gamma} = h^{-1} d_\alpha(\alpha, \beta) \quad (\alpha\beta) \quad \text{при } \gamma = -h
\end{gathered} \qquad (1.2)
$$

Условия на боковых поверхностях пластинки будут сформулированы ниже.

Напряженное состояние пластинки можно представить в виде суммы симметричного и обратно симметричного напряженных состояний.

Под симметричным подразумевается напряженное состояние, удовлетворяющее условиям

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \tfrac{1}{2} q(\alpha, \beta), \qquad \sigma_{\alpha\gamma} = \pm\tfrac{1}{2} h^{-1} q_\alpha(\alpha, \beta) \quad (\alpha\beta) \quad \text{при } \gamma = \pm h \tag{1.3}$$

и такое, в котором относительно γ

$$\sigma_{\alpha\alpha},\ \sigma_{\alpha\beta},\ \sigma_{\beta\beta},\ \sigma_{\gamma\gamma},\ u_\alpha,\ u_\beta \text{ — четные функции,}$$
$$\sigma_{\alpha\gamma},\ \sigma_{\beta\gamma},\ W \text{ — нечетные функции} \tag{1.4}$$

Под обратно симметричным подразумевается напряженное состояние, удовлетворяющее условиям

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \pm\tfrac{1}{2} p(\alpha, \beta), \qquad \sigma_{\alpha\gamma} = \tfrac{1}{2} h^{-1} p_\alpha(\alpha, \beta) \quad (\alpha\beta) \quad \text{при } \gamma = \pm h \tag{1.5}$$

и такое, в котором относительно γ

$$\sigma_{\alpha\gamma},\ \sigma_{\beta\gamma},\ W \text{ — четные функции}$$
$$\sigma_{\alpha\alpha},\ \sigma_{\alpha\beta},\ \sigma_{\beta\beta},\ \sigma_{\gamma\gamma},\ u_\alpha,\ u_\beta \text{ — нечетные функции} \tag{1.6}$$

Считается, что

$$p = a - b, \qquad q = a + b, \qquad q_\alpha = c_\alpha - d_\alpha \quad (\alpha\beta), \qquad p_\alpha = c_\alpha + d_\alpha \quad (\alpha\beta)$$

Обратно симметричное напряженное состояние соответствует изгибу пластинки, причем p — интенсивность поверхностной нагрузки, p_α, p_β — интенсивность поверхностных моментов, а симметричное напряженное состояние соответствует обобщенному плоскому напряженному состоянию, для которого q_α, q_β — интенсивность нагрузок, параллельных срединной плоскости, и напряженному состоянию обжатия пластинки, для которого q — интенсивность обжимающей нагрузки.

2. Запишем решение системы (1.1) в виде

$$\sigma_{ij} = h^{-q} \sum_{s=0}^{S} h^s \sigma_{ij}^{(s)}, \qquad u_k = h^{-q} \sum_{s=0}^{S} h^s u_k^{(s)}, \qquad W = h^{-q} \sum_{s=0}^{S} h^s W^{(s)} \tag{2.1}$$
$$(i = \alpha, \beta, \gamma;\ j = \alpha, \beta, \gamma;\ k = \alpha, \beta)$$

(где q — целые числа, различные для различных напряжений и перемещений) и будем строить итерационные процессы для последовательного определения коэффициентов этих разложений.

Первый из этих итерационных процессов заключается в следующем: в (1.1) производится замена переменных

$$\gamma = h\zeta \tag{2.2}$$

в полученную систему вносятся разложения (2.1), где q выбирается следующим образом:

для симметричной задачи

$$\begin{gathered} q = 2 \ \text{ для } \sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\beta\beta}, \qquad q = 1 \ \text{ для } \sigma_{\alpha\gamma}, \sigma_{\beta\gamma} \\ q = 0 \ \text{ для } \sigma_{\gamma\gamma}, \qquad q = 2 \ \text{ для } u_\alpha, u_\beta, \qquad q = 1 \ \text{ для } W \end{gathered} \tag{2.3}$$

для обратно симметричной задачи

$$\begin{gathered} q = 2 \ \text{ для } \sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\beta\beta}, \qquad q = 1 \ \text{ для } \sigma_{\alpha\gamma}, \sigma_{\beta\gamma} \\ q = 0 \ \text{ для } \sigma_{\gamma\gamma}, \qquad q = 2 \ \text{ для } u_\alpha, u_\beta, \qquad q = 3 \ \text{ для } W \end{gathered} \tag{2.4}$$

и в каждом полученном уравнении приравниваются нулю коэффициенты при всех степенях h, начиная с самой низкой. Это дает для коэффициентов разложения (2.1) такие последовательности систем уравнений:

$$H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}^{(s)}}{\partial \alpha} + H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{(s)}}{\partial \beta} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\gamma}^{(s)}}{\partial \zeta} - H_\alpha \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial \alpha} (\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)} - \sigma_{\beta\beta}^{(s)}) - 2H_\beta \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial \beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} = 0 \quad (\alpha\beta)$$

$$H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\alpha\gamma}^{(s)}}{\partial \alpha} + H_\beta \frac{\partial \sigma_{\beta\gamma}^{(s)}}{\partial \beta} + \frac{\partial \sigma_{\gamma\gamma}^{(s)}}{\partial \zeta} - H_\alpha \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial \alpha} \sigma_{\alpha\gamma}^{(s)} - H_\beta \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial \beta} \sigma_{\beta\gamma}^{(s)} = 0 \qquad (2.5)$$

$$E \left(H_\alpha \frac{\partial u_\alpha^{(s)}}{\partial \alpha} - H_\beta \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial \beta} u_\beta^{(s)} \right) = \sigma_{\alpha\alpha}^{(s)} - \nu (\sigma_{\beta\beta}^{(s)} + \sigma_{\gamma\gamma}^{(s-2)}) \quad (\alpha\beta)$$

$$E \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} = \sigma_{\gamma\gamma}^{(a)} - \nu (\sigma_{\alpha\alpha}^{(b)} + \sigma_{\beta\beta}^{(b)})$$

$$E \left(H_\alpha \frac{\partial u_\beta^{(s)}}{\partial \alpha} + H_\beta \frac{\partial u_\alpha^{(s)}}{\partial \beta} + H_\alpha \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial \alpha} u_\beta^{(s)} + H_\beta \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial \beta} u_\alpha^{(s)} \right) = 2 (1 + \nu) \sigma_{\alpha\beta}^{(s)}$$

$$E \left(H_\alpha \frac{\partial W^{(c)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha^{(s)}}{\partial \zeta} \right) = 2 (1 + \nu) \sigma_{\alpha\gamma}^{(s-2)} \quad (\alpha\beta)$$

Здесь s — номер члена разложения, а числа a, b, c связаны с s так:

$$a = s - 2, \quad b = s, \quad c = s - 2 \quad \text{для симметричной задачи} \qquad (2.6)$$

$$a = s - 4, \quad b = s - 2, \quad c = s \quad \text{для обратно симметричной задачи} \qquad (2.7)$$

В (2.5) и всюду в дальнейшем величины с отрицательными индексами считаются равными нулю.

В уравнениях (2.5), (2.6) и (2.7) легко выполнить интегрирование по переменной ζ. Полученный результат можно записать так:

для симметричной задачи

$$W^{(s)} = \zeta w^{(s)} + W^{*(s)}, \quad u_\alpha^{(s)} = v_\alpha^{(s)} + u_\alpha^{*(s)} \quad (\alpha\beta)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)} = \tau_{\alpha\alpha}^{(s)} + \sigma_{\alpha\alpha}^{*(s)} \quad (\alpha\beta), \qquad \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} = \tau_{\alpha\beta}^{(s)} + \sigma_{\alpha\beta}^{*(s)} \qquad (2.8)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{(s)} = \zeta \tau_{\alpha\gamma}^{(s)} + \sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)} \quad (\alpha\beta), \qquad \sigma_{\gamma\gamma}^{(s)} = S_{\gamma\gamma}^{(s)} + \frac{1}{2} \zeta^2 \tau_{\gamma\gamma}^{(s)} + \sigma_{\gamma\gamma}^{*(s)}$$

для обратно симметричной задачи

$$W^{(s)} = w^{(s)} + W^{*(s)}, \quad u_\alpha^{(s)} = \zeta v_\alpha^{(s)} + u_\alpha^{*(s)} \quad (\alpha\beta)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)} = \zeta \tau_{\alpha\alpha}^{(s)} + \sigma_{\alpha\alpha}^{*(s)} \quad (\alpha\beta), \qquad \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} = \zeta \tau_{\alpha\beta}^{(s)} + \sigma_{\alpha\beta}^{*(s)} \qquad (2.9)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{(s)} = S_{\alpha\gamma}^{(s)} + \zeta^2 \tau_{\alpha\gamma}^{(s)} + \sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)} \quad (\alpha\beta), \qquad \sigma_{\gamma\gamma}^{(s)} = \zeta S_{\gamma\gamma}^{(s)} + \zeta^3 \tau_{\gamma\gamma}^{(s)} + \sigma_{\gamma\gamma}^{*(s)}$$

В этих формулах функции от α и β

$$w^{(s)},\quad v_\alpha^{(s)},\quad v_\beta^{(s)},\quad \tau_{\alpha\alpha}^{(s)},\quad \tau_{\alpha\beta}^{(s)},\quad \tau_{\beta\beta}^{(s)},\quad \tau_{\alpha\gamma}^{(s)},\quad \tau_{\beta\gamma}^{(s)}, \tau_{\gamma\gamma}^{(s)},\quad S_{\alpha\gamma}^{(s)},\quad S_{\beta\gamma}^{(s)},\quad S_{\gamma\gamma}^{(s)}$$

связаны дифференциальными зависимостями, которые записываются так: для симметричной задачи

$$\tau_{\alpha\alpha}^{(s)} = \frac{E}{1-\nu^2} T_{\alpha\alpha}^{(s)} \quad (\alpha\beta), \qquad \tau_{\alpha\beta}^{(s)} = \frac{E}{2(1+\nu)} T_{\alpha\beta}^{(s)}, \qquad \tau_{\alpha\gamma}^{(s)} = T_{\alpha\gamma}^{(s)} \quad (\alpha\beta) \tag{2.10}$$

$$\tau_{\gamma\gamma}^{(s)} = T_{\gamma\gamma}^{(s)}, \qquad Ew^{(s)} = -\nu(\tau_{\alpha\alpha}^{(s)} + \tau_{\beta\beta}^{(s)})$$

для обратной симметричной задачи

$$\tau_{\alpha\alpha}^{(s)} = \frac{E}{1-\nu^2} T_{\alpha\alpha}^{(s)} \quad (\alpha\beta), \qquad \tau_{\alpha\beta}^{(s)} = \frac{E}{2(1+\nu)} T_{\alpha\beta}^{(s)}, \qquad \tau_{\alpha\gamma}^{(s)} = \frac{1}{2} T_{\alpha\gamma} \quad (\alpha\beta)$$

$$\tau_{\gamma\gamma}^{(s)} = \frac{1}{3} T_{\gamma\gamma}^{(s)}, \qquad v_\alpha^{(s)} = -H_\alpha \frac{\partial w^{(s)}}{\partial\alpha} \quad (\alpha\beta) \tag{2.11}$$

$$S_{\gamma\gamma}^{(s)} = -\left[H_\alpha \frac{\partial S_{\alpha\gamma}^{(s)}}{\partial\alpha} + H_\beta \frac{\partial S_{\beta\gamma}^{(s)}}{\partial\beta} - H_\alpha \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial\alpha} S_{\alpha\gamma}^{(s)} - H_\beta \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial\beta} S_{\beta\gamma}^{(s)}\right]$$

В формулах (2.10) и (2.11)

$$T_{\alpha\alpha}^{(s)} = H_\alpha \frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial\alpha} - H_\beta \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial\beta} v_\beta^{(s)} + \nu H_\beta \frac{\partial v_\beta^{(s)}}{\partial\beta} - \nu H_\alpha \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial\alpha} v_\alpha^{(s)} \quad (\alpha\beta)$$

$$T_{\alpha\beta}^{(s)} = H_\alpha \frac{\partial v_\beta^{(s)}}{\partial\alpha} + H_\beta \frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial\beta} + H_\alpha \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial\alpha} v_\beta^{(s)} + H_\beta \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial\beta} v_\alpha^{(s)}$$

$$T_{\alpha\gamma}^{(s)} = -H_\alpha \frac{\partial \tau_{\alpha\alpha}^{(s)}}{\partial\alpha} - H_\beta \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}^{(s)}}{\partial\beta} + H_\alpha \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial\alpha} (\tau_{\alpha\alpha}^{(s)} - \tau_{\beta\beta}^{(s)}) + 2H_\beta \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial\beta} \tau_{\alpha\beta}^{(s)} \quad (\alpha\beta) \tag{2.12}$$

$$T_{\gamma\gamma}^{(s)} = -H_\alpha \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}^{(s)}}{\partial\alpha} - H_\beta \frac{\partial \tau_{\beta\gamma}^{(s)}}{\partial\beta} + H_\alpha \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial\alpha} \tau_{\alpha\gamma}^{(s)} + H_\beta \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial\beta} \tau_{\beta\gamma}^{(s)}$$

Величины, отмеченные в (2.8) и (2.9) звездочками, определяются следующими соотношениями:

для симметричной задачи (2.13)

$$Eu_\alpha^{*(s)} = -\int_0^\zeta \left[EH_\alpha \frac{\partial W^{(s-2)}}{\partial\alpha} - 2(1+\nu)\sigma_{\alpha\gamma}^{(s-2)}\right] d\zeta \quad (\alpha\beta)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{*(s)} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[H_\alpha \frac{\partial u_\alpha^{*(s)}}{\partial\alpha} - H_\beta \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial\beta} u_\beta^{*(s)} + \nu H_\beta \frac{\partial u_\beta^{*(s)}}{\partial\beta} - \right.$$

$$\left. - \nu H_\alpha \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial\alpha} u_\alpha^{*(s)}\right] \quad (\alpha\beta)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{*(s)} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[H_\alpha \frac{\partial u_\beta^{*(s)}}{\partial \alpha} + H_\beta \frac{\partial u_\alpha^{*(s)}}{\partial \beta} + H_\alpha \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial \alpha} u_\beta^{*(s)} + H_\beta \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial \beta} u_\alpha^{*(s)}\right]$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)} = -\int_0^\zeta \left[H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}^{*(s)}}{\partial \alpha} + H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{*(s)}}{\partial \beta} - H_\alpha \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial \alpha}(\sigma_{\alpha\alpha}^{*(s)} - \sigma_{\beta\beta}^{*(s)}) - \right.$$

$$\left. - 2H_\beta \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial \beta} \sigma_{\alpha\beta}^{*(s)}\right] d\zeta \qquad (\alpha\beta)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{*(s)} = -\int_0^\zeta \left[H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)}}{\partial \alpha} + H_\beta \frac{\partial \sigma_{\beta\gamma}^{*(s)}}{\partial \beta} - H_\alpha \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial \alpha} \sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)} - H_\beta \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial \beta} \sigma_{\beta\gamma}^{*(s)}\right] d\zeta$$

$$EW^{*(s)} = \int_0^\zeta [\sigma_{\gamma\gamma}^{(s-2)} - \nu(\sigma_{\alpha\alpha}^{*(s)} + \sigma_{\beta\beta}^{*(s)})]\, d\zeta$$

для обратно симметричной задачи (2.14)

$$EW^{*(s)} = +\int_0^\zeta [\sigma_{\gamma\gamma}^{(s-4)} - \nu(\sigma_{\alpha\alpha}^{(s-2)} + \sigma_{\beta\beta}^{(s-2)})]\, d\zeta$$

$$Eu_\alpha^{*(s)} = -E\int_0^\zeta H_\alpha \frac{\partial W^{*(s)}}{\partial \alpha} d\zeta + 2(1+\nu)\int_0^\zeta \sigma_{\alpha\gamma}^{(s-2)} d\zeta \qquad (\alpha\beta)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{*(s)} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[H_\alpha \frac{\partial u_\alpha^{*(s)}}{\partial \alpha} - H_\beta \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial \beta} u_\beta^{*(s)} + \nu H_\beta \frac{\partial u_\beta^{*(s)}}{\partial \beta} - \right.$$

$$\left. - \nu H_\alpha \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial \alpha} u_\alpha^{*(s)}\right] + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{\gamma\gamma}^{(s-2)} \qquad (\alpha\beta)$$

. . . .

(не выписаны выражения $\sigma_{\alpha\beta}^{*(s)}$, $\sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)}$, $\sigma_{\gamma\gamma}^{*(s)}$; для обратно симметричной задачи они такие же как и для симметричной).

Формулы (2.13) и (2.14) имеют рекуррентный характер и позволяют определять без решения каких-либо уравнений величины со звездочкой, относящиеся к приближению (s), если известны все величины, относящиеся к приближениям (0), (1), (2), ... (s — 1).

3. Будем считать, что функции a, b, c_α, c_β, d_α, d_β в (1.2) не зависят от h. (Обобщение на случай, когда эти величины — полиномы от целых или дробных степеней h, достигается очевидным образом при помощи принципа суперпозиции.) При этом предположении граничные условия (1.3) и (1.5), накладываемые на напряжения, можно заменить последовательностями условий, накладываемых на коэффициенты разложений (2.1):

для симметричного случая

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(0)} = \frac{1}{2} q, \qquad \sigma_{\alpha\gamma}^{(0)} = \pm\frac{1}{2} q_\alpha, \qquad \sigma_{\beta\gamma}^{(0)} = \pm\frac{1}{2} q_\beta$$

$$\text{при } \zeta = \pm 1 \qquad (3.1)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(t)} = \sigma_{\alpha\gamma}^{(t)} = \sigma_{\beta\gamma}^{(t)} = 0 \qquad (t > 0)$$

для обратно симметричного случая

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(0)} = \pm\frac{1}{2}p, \qquad \sigma_{\alpha\gamma}^{(0)} = \frac{1}{2}p_\alpha, \qquad \sigma_{\beta\gamma}^{(0)} = \frac{1}{2}p_\beta$$

$$\text{при } \zeta = \pm 1 \tag{3.2}$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(t)} = \sigma_{\alpha\gamma}^{(t)} = \sigma_{\beta\gamma}^{(t)} = 0 \qquad (t > 0).$$

Подставляя (2.8) и (2.9) в (3.1) и (3.2) и учитывая, что, как видно из (2.13) и (2.14), величины, отмеченные звездочками, при $s = 0$ и $s = 1$ равны нулю, получим:

для симметричной задачи

$$\tau_{\alpha\gamma}^{(s)} = \frac{1}{2}q_\alpha^{(s)} \quad (\alpha\beta), \qquad S_{\gamma\gamma}^{(s)} + \frac{1}{2}\tau_{\gamma\gamma}^{(s)} = \frac{1}{2}q^{(s)} \tag{3.3}$$

где

$$q^{(0)} = q, \qquad q^{(1)} = 0, \qquad q^{(r)} = -2\sigma_{\gamma\gamma}^{*(r)}\big|_{\zeta=1} \quad (r > 1)$$

$$q_\alpha^{(0)} = q_\alpha, \qquad q_\alpha^{(1)} = 0, \qquad q_\alpha^{(r)} = -2\sigma_{\alpha\gamma}^{*(r)}\big|_{\zeta=1} \quad (\alpha\beta)$$

$$(r > 1) \tag{3.4}$$

для обратно симметричной задачи

$$S_{\alpha\gamma}^{(s)} + \tau_{\alpha\gamma}^{(s)} = {}^1/_2 p_\alpha^{(s)} \quad (\alpha\beta), \qquad S_{\gamma\gamma}^{(s)} + \tau_{\gamma\gamma}^{(s)} = {}^1/_2 p^{(s)} \tag{3.5}$$

где

$$p^{(0)} = p, \qquad p^{(1)} = 0, \qquad p^{(r)} = -2\sigma_{\gamma\gamma}^{*(r)}\big|_{\zeta=1}$$

$$(r > 1)$$

$$p_\alpha^{(0)} = p_\alpha, \qquad p_\alpha^{(1)} = 0, \qquad p_\alpha^{(r)} = -2\sigma_{\alpha\gamma}^{*(r)}\big|_{\zeta=1} \quad (\alpha\beta) \tag{3.6}$$

Равенства (2.10), (2.12) и (3.3) образуют систему десяти уравнений с неизвестными

$$v_\alpha^{(s)},\ v_\beta^{(s)},\ w^{(s)},\ \tau_{\alpha\alpha}^{(s)},\ \tau_{\alpha\beta}^{(s)},\ \tau_{\beta\beta}^{(s)},\ \tau_{\alpha\gamma}^{(s)},\ \tau_{\beta\gamma}^{(s)},\ \tau_{\gamma\gamma}^{(s)},\ S_{\gamma\gamma}^{(s)} \tag{3.7}$$

При помощи двух последних равенств (2.10), (2.12) и равенств (3.3) и (3.4) величины

$$\tau_{\alpha\gamma}^{(s)},\quad \tau_{\beta\gamma}^{(s)},\quad \tau_{\gamma\gamma}^{(s)},\quad S_{\gamma\gamma}^{(s)} \tag{3.8}$$

выражаются через

$$q,\quad q_\alpha,\quad q_\beta,\quad \sigma_{\gamma\gamma}^{*(s)}\big|_{\zeta=1},\quad \sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)}\big|_{\zeta=1},\quad \sigma_{\beta\gamma}^{*(s)}\big|_{\zeta=1}$$

а величина $w^{(s)}$ выражается через $\tau_{\alpha\alpha}^{(s)}$ и $\tau_{\beta\beta}^{(s)}$ или, как это следует из (2.10), (2.12) — через $v_\alpha^{(s)}$ и $v_\beta^{(s)}$.

Подставляя полученные значения величин (3.8) в первые три равенства (2.10) и (2.12) получаем систему пяти уравнений с неизвестными $v_\alpha^{(s)}$, $v_\beta^{(s)}$, $\tau_{\alpha\alpha}^{(s)}$, $\tau_{\alpha\beta}^{(s)}$, $\tau_{\beta\beta}^{(s)}$

$$H_\alpha \frac{\partial \tau_{\alpha\alpha}^{(s)}}{\partial \alpha} + H_\beta \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}^{(s)}}{\partial \beta} - H_\alpha \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial \alpha} (\tau_{\alpha\alpha}^{(s)} - \tau_{\beta\beta}^{(s)}) - 2H_\beta \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial \beta} \tau_{\alpha\beta}^{(s)} = -\frac{1}{2} q_\alpha^{(s)} \quad (\alpha\beta)$$

$$\tau_{\alpha\alpha}^{(s)} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[H_\alpha \frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial \alpha} - H_\beta \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial \beta} v_\beta^{(s)} + \nu H_\beta \frac{\partial v_\beta^{(s)}}{\partial \beta} - \nu H_\alpha \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial \alpha} v_\alpha^{(s)} \right] \quad (\alpha\beta) \tag{3.9}$$

$$\tau_{\alpha\beta}^{(s)} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[H_\alpha \frac{\partial v_\beta^{(s)}}{\partial \alpha} + H_\beta \frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial \beta} + H_\alpha \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial \alpha} v_\beta^{(s)} + H_\beta \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial \beta} v_\alpha^{(s)} \right]$$

Эта система для каждого (s) эквивалентна неоднородной системе дифференциальных уравнений задачи об обобщенном плоском напряженном состоянии.

Первое равенство (3.9) представляет собой уравнения равновесия, а два последних — соотношения упругости. Свободные члены в правых частях уравнений равновесия можно рассматривать как компоненты некоторой условной тангенциальной нагрузки. При $s = 0$ величины $q_\alpha^{(s)}$ и $q_\beta^{(s)}$ совпадают с компонентами действительно действующей нагрузки q_α, q_β; если $s = 1$, то $q_\alpha^{(1)} = q_\beta^{(1)} = 0$, а при $s > 1$ эти величины определяются как некоторые дифференциальные операторы от q_α, q_β. В частности, легко убедиться, что если q_α, q_β имеют потенциальную функцию $V^{(0)}$, то потенциальная функция $V^{(2)}$ для $q_\alpha^{(2)}$, $q_\beta^{(2)}$ определяется формулой

$$V^{(2)} = \frac{4-3\nu}{12(1-\nu)} \Delta V^{(0)} \qquad (\Delta \text{ — оператор Лапласа}) \tag{3.10}$$

Для обратно симметричной задачи уравнения (2.11) (2.12) и (3.5), образуют систему двенадцати уравнений с неизвестными

$$v_\alpha^{(s)},\ v_\beta^{(s)},\ w^{(s)},\ \tau_{\alpha\alpha}^{(s)},\ \tau_{\alpha\beta}^{(s)},\ \tau_{\beta\beta}^{(s)},\ \tau_{\alpha\gamma}^{(s)},\ \tau_{\beta\gamma}^{(s)},\ \tau_{\gamma\gamma}^{(s)},\ S_{\alpha\gamma}^{(s)},\ S_{\beta\gamma}^{(s)},\ S_{\gamma\gamma}^{(s)} \tag{3.11}$$

При помощи последних двух уравнений (2.11) и равенств (2.12), (3.5), (3.6) величины

$$S_{\alpha\gamma}^{(s)},\quad S_{\beta\gamma}^{(s)},\quad S_{\gamma\gamma}^{(s)},\quad \tau_{\gamma\gamma}^{(s)} \tag{3.12}$$

можно выразить через

$$\tau_{\alpha\gamma}^{(s)}, \tau_{\beta\gamma}^{(s)}, \tau_{\gamma\gamma}^{(s)}, p, p_\alpha, p_\beta, \sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)}\big|_{\zeta=1}, \sigma_{\beta\gamma}^{*(s)}\big|_{\zeta=1}, \sigma_{\gamma\gamma}^{*(s)}\big|_{\zeta=1},$$

а $v_\alpha^{(s)}$ и $v_\beta^{(s)}$ через $w^{(s)}$.

Внеся эти результаты в первые четыре равенства (2.11), получим систему шести уравнений с неизвестными

$$\tau_{\alpha\alpha}^{(s)},\ \tau_{\alpha\beta}^{(s)},\ \tau_{\beta\beta}^{(s)},\ \tau_{\alpha\gamma}^{(s)},\ \tau_{\beta\gamma}^{(s)},\ w^{(s)} \tag{3.13}$$

Она записывается так: (3.14)

$$\tau_{\alpha\alpha}^{(s)} = -\frac{E}{1-\nu^2}\left[H_\alpha \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(H_\alpha \frac{\partial w^{(s)}}{\partial\alpha}\right) - H_\beta \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial\beta} H_\beta \frac{\partial w^{(s)}}{\partial\beta} + \right.$$
$$\left. + \nu H_\beta \frac{\partial}{\partial\beta}\left(H_\beta \frac{\partial w^{(s)}}{\partial\beta}\right) - \nu H_\alpha \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial\alpha} H_\alpha \frac{\partial w^{(s)}}{\partial\alpha}\right] \qquad (\alpha\beta)$$

$$\tau_{\alpha\beta}^{(s)} = -\frac{E}{2(1+\nu)}\left[H_\alpha \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(H_\beta \frac{\partial w^{(s)}}{\partial\beta}\right) + H_\beta \frac{\partial}{\partial\beta}\left(H_\alpha \frac{\partial w^{(s)}}{\partial\alpha}\right) + \right.$$
$$\left. + H_\alpha \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial\alpha} H_\beta \frac{\partial w^{(s)}}{\partial\beta} + H_\beta \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial\beta} H_\alpha \frac{\partial w^{(s)}}{\partial\alpha}\right]$$

$$H_\alpha \frac{\partial \tau_{\alpha\alpha}^{(s)}}{\partial\alpha} + H_\beta \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}^{(s)}}{\partial\beta} - H_\alpha \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial\alpha}(\tau_{\alpha\alpha}^{(s)} - \tau_{\beta\beta}^{(s)}) - 2H_\beta \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial\beta}\tau_{\alpha\beta}^{(s)} = -2\tau_{\alpha\gamma}^{(s)} \qquad (\alpha\beta)$$

$$H_\alpha \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}^{(s)}}{\partial\alpha} + H_\beta \frac{\partial \tau_{\beta\gamma}^{(s)}}{\partial\beta} - H_\alpha \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial\alpha}\tau_{\alpha\gamma}^{(s)} - H_\beta \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial\beta}\tau_{\beta\gamma}^{(s)} =$$
$$= \frac{3}{4}\left\{p^{(s)} + H_\alpha H_\beta\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p_\alpha^{(s)}}{H_\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{p_\beta^{(s)}}{H_\alpha}\right)\right]\right\}$$

Эта система эквивалентна системе дифференциальных уравнений классической теории изгиба пластинок. А именно, если ввести новые величины при помощи формул:

$$M_\alpha^{(s)} = \frac{2}{3} h^s \tau_{\alpha\alpha}^{(s)} + h^s \int_{-1}^{+1} \zeta \sigma_{\alpha\alpha}^{*(s)} d\zeta \qquad (\alpha\beta)$$

$$H_{\alpha\beta}^{(s)} = \frac{2}{3} h^s \tau_{\alpha\beta}^{(s)} + h^s \int_{-1}^{+1} \zeta \sigma_{\alpha\beta}^{*(s)} d\zeta \qquad (3.15)$$

$$N_\alpha^{(s)} = h^s\left[-\frac{4}{3}\tau_{\alpha\gamma}^{(s)} + p_\alpha^{(s)} + \int_{-1}^{+1} \sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)} d\zeta\right] \qquad (\alpha\beta)$$

выразить первые пять величин (3.13) через $M_\alpha^{(s)}$, $M_\beta^{(s)}$, $H_{\alpha\beta}^{(s)}$, $N_\alpha^{(s)}$, $N_\beta^{(s)}$ и подставить их в уравнения (3.14), то получим обычные соотношения теории изгиба пластинок, в которых величины (3.15) будут играть роль моментов и перерезывающих усилий s-го приближения [1].

В работе [2] было показано (для цилиндрической системы координат), что все эти величины можно выразить через функцию $w_0^{(s)} = h^{s-3} w^{(s)}$, которая удовлеторяет уравнению

$$\Delta\Delta w_0^{(s)} = \frac{P^{(s)}}{D} \qquad \left(D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\right) \qquad (3.16)$$

Здесь $P^{(s)}$ выражается через p, p_α, p_β. В частности

$$P^{(0)} = p + H_\alpha H_\beta\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p_\alpha}{H_\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{p_\beta}{H_\alpha}\right)\right], \qquad P^{(1)} = 0 \qquad (3.17)$$

$$P^{(2)} = \frac{h^2}{30(1-\nu^2)}\left\{-3(8-3\nu)\Delta p + (4+\nu)\Delta\left[H_\alpha H_\beta \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p_\alpha}{H_\beta}\right) + H_\alpha H_\beta \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{p_\beta}{H_\alpha}\right)\right]\right\}$$

При $p_\alpha = p_\beta = 0$ имеем

$$P^{(0)} = p, \qquad P^{(1)} = 0, \qquad P^{(2)} = -\frac{(8-3\nu)h^2}{10(1-\nu)}\Delta p \qquad (3.18)$$

---

[1] В работе [1] для задачи об изгибе пластинки замена (3.15) проведена в декартовых координатах, причем ошибочно не были учтены величины со звездочками.

Замечание. Из формул (3.10), (3.17), (3.18), (3.4), (3.6), (2.13) и (2.14) видно, что при построении приближенной теории изгиба и растяжения пластинки требуется, чтобы поверхностные нагрузки имели непрерывные производные достаточно высокого порядка. Следует отметить, что требование дифференцируемости нагрузки не является дефектом рассматриваемого здесь метода, а отражает физическую сущность задачи. В этом нетрудно убедиться на примере изгиба круглой пластинки, отнесенной к полярным координатам, нормальной нагрузкой интенсивности $p = p_0 \cos n\theta$.

В центре пластинки функция p становится недифференцируемой, и обсуждаемый метод делается неприменимым. Это объясняется тем, что в центре пластинки в данном случае напряженное состояние существенно трехмерно и никакая теория, основанная на малости толщины пластинки, не может его описать.

4. Описанный выше итерационный процесс был назван в работе [1] основным. Он рассчитан на построение основных — глубоко проникающих внутрь пластинки — напряженных состояний. Поэтому при составлении уравнений (2.5) считалось, что напряжения и смещения не слишком быстро изменяются по α, β, а тот факт, что по γ напряжения и перемещения в тонкой пластинке должны меняться быстро, был учтен при помощи замены переменных (2.2).

Формулы (2.8), (2.9), (2.13), (2.14) показывают, что основным итерационным процессом определяются такие напряженные состояния пластинки, в которых напряжения и перемещения по переменной ζ, т. е. вдоль толщины, меняются по полиномиальному закону, причем степень полиномов неограниченно возрастает с возрастанием числа приближений. При неограниченном увеличении числа приближений будут получаться напряженные состояния, в которых напряжения и перемещения выражаются по ζ степенными рядами. Поэтому, взяв достаточное число приближений и используя произволы интегрирования уравнений (3.9) и (3.14), можно формально с любой точностью выполнить граничные условия на боковых поверхностях пластинки.

В этом заключается один из возможных способов строить приближенную теорию расчета пластинок; он представляет собой один из вариантов метода степенных рядов, т. е. неоднократно применявшегося метода (см., например [3–6]), основанного на разложении искомых величин в направлении толщины в степенные ряды. Этим методом можно пользоваться при любой (в том числе, и немалой) толщине пластинки, хотя надо заметить, что трудности, связанные с исследованием характера сходимости соответствующих рядов, пока не удалось преодолеть. Однако если говорить только о тонких пластинках, то метод степенных рядов страдает недостатком, сущность которого выяснится ниже.

Из сказанного выше вытекает, что для уравнений теории упругости процесс построения интегралов, выражающихся по одной переменной степенными рядами, можно расположить так, что он будет иметь итерационный характер, и на всех этапах будут учитываться только величины одного порядка (не зависящие от h). Это сулит очевидные выгоды, особенно если учесть, что на каждом этапе приходится интегрировать хорошо знакомые уравнения задачи об изгибе пластинки и задачи об обобщенном плоском напряженном состоянии. Однако все эти преимущества почти полностью утрачиваются при выполнении граничных условий на боковых поверхностях пластинки: для выполнения этой операции нужно построить в общем виде некоторое количество приближений, записать соответствующие выражения для напряжений или перемещений и потребовать, чтобы они, в том или ином смысле, приближенно удовлетворяли граничным условиям. Таким образом, в обсуждаемом здесь варианте метода степенных рядов произволы интегрирования приходится определять сразу, а не для каждого приближения в отдельности, и, кроме того, в выкладки будут входить уже величины, соизмеримые различным степеням h. В других вариантах метода степенных рядов его недостатки остаются по существу прежними и выражаются в том, что порядок соответствующих уравнений растет с возрастанием числа приближений, а коэффициенты уравнений зависят от h и при малых h существенно отличаются один от другого по абсолютной величине.

Вышеописанное свойство метода степенных рядов не случайно и не может быть объяснено неудачным расположением выкладок. В классической теории пластинок при выполнении граничных условий на боковых поверхностях учитываются только такие характеристики краевых силовых воздействий, как усилия и моменты. Увеличение точности выполнения граничных условий эквивалентно учету самоуравновешенных краевых воздействий (полимоментов) и это, в соответствии с принципом Сен-Венана, приводит к появлению быстро затухающих от края напряженных состояний.

Уравнения приближенной теории пластинок, если они составлены с достаточной точностью и имеют целью описать все упругие явления, должны содержать соответствующие быстрозатухающие интегралы, которые в теории асимптотического интегрирования называются пограничным слоем [7,8]. Такие интегралы как раз и имеют уравнения, получающиеся методом степенных рядов, т. е. уравнения достаточно высокого порядка, в коэффициенты которых входит малый параметр.

В связи со сказанным естественно возникает мысль выделить в отдельное рассмотрение построение быстро затухающих напряженных состояний и указать для них такие итерационные процессы, которые лучше приспособлены к этому, чем основной итерационный процесс. Метод, в котором используется эта идея, обсуждался в работах [1, 9–15], и его можно назвать асимптотическим. В предлагаемой работе формулируется вспомогательный итерационный процесс для нахождения быстро затухающих напряженных состояний в пластинке, испытывающей изгиб и растяжение, показывается, что если напряженное состояние пластинки искать в виде суммы напряженных состояний, получающихся при помощи основного и вспомогательного процессов, то итерационный характер будет иметь не только процесс интегрирования уравнений, но и процесс наложения граничных условий на боковых поверхностях.

В последнее время появились работы [16, 17], в которых приближенная теория изгиба пластинок строится при помощи символического метода А. И. Лурье [18]. При этом получаются уравнения бесконечно высокого порядка, и в этом смысле метод примыкает к методу степенных рядов. В [16] показано, что этим методом можно получить результаты, весьма близкие к результатам, полученным асимптотическим методом.

Замечание. Дифференциальные уравнения, к которым приводит метод степенных рядов, как уравнения, содержащие малый параметр, можно решать методом асимптотического интегрирования. При этом быстро затухающие решения автоматически выделяются, и различие между асимптотическим методом и методом степенных рядов станет не существенным. Тогда уравнения, получающиеся методом степенных рядов, потеряют самостоятельное значение и превратятся в вспомогательное средство для получения результатов, к которым асимптотический метод приводит сразу.

5. Опишем теперь вспомогательный итерационный процесс, считая, что при его помощи должны строиться напряженные состояния, быстро затухающие при удалении от линии

$$\alpha = \alpha_0$$

которая предполагается совмещенной с краем пластинки.

Этот процесс состоит в следующем: делаем в (1.1) замену переменных

$$H_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} = h^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial}{\partial \gamma} = h^{-1} \frac{\partial}{\partial \zeta} \tag{5.1}$$

вносим в полученную после такого преобразования систему разложения (2.1), выбираем q так:

$$q = r \quad \text{для } \sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\beta\beta}, \sigma_{\alpha\gamma}, \sigma_{\beta\gamma}, \sigma_{\gamma\gamma}$$

$$q = r - 1 \quad \text{для } u_\alpha, u_\beta, W \tag{5.2}$$

(r — пока неопределенное число) и приравниваем нулю коэффициенты при всех степенях h, начиная с самой низкой. Это приводит к такой последовательности уравнений для коэффициентов разложения (2.1):

$$\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{\beta\gamma}^{(s)}}{\partial\zeta}=R_\beta^{(s-1)}$$

$$E\frac{\partial u_\beta^{(s)}}{\partial\xi}-2(1+\nu)\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}=-EH_\beta\frac{\partial u_\alpha^{(s-1)}}{\partial\beta}+Ek_\beta u_\beta^{(s-1)} \tag{5.3}$$

$$E\frac{\partial u_\beta^{(s)}}{\partial\zeta}-2(1+\nu)\sigma_{\beta\gamma}^{(s)}=-EH_\beta\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\beta}$$

$$\frac{\partial\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{\alpha\gamma}^{(s)}}{\partial\zeta}=R_\xi^{(s-1)},\qquad \frac{\partial\sigma_{\alpha\gamma}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{\gamma\gamma}^{(s)}}{\partial\zeta}=R_\zeta^{(s-1)} \tag{5.4}$$

$$E\frac{\partial u_\alpha^{(s)}}{\partial\xi}=[\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)}-\nu(\sigma_{\beta\beta}^{(s)}+\sigma_{\gamma\gamma}^{(s)})],\quad E\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta}=[\sigma_{\gamma\gamma}^{(s)}-\nu(\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)}+\sigma_{\beta\beta}^{(s)})]$$

$$E\left(\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial u_\alpha^{(s)}}{\partial\zeta}\right)-2(1+\nu)\sigma_{\alpha\gamma}^{(s)}=0$$

$$\sigma_{\beta\beta}^{(s)}-\nu(\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)}+\sigma_{\gamma\gamma}^{(s)})=EH_\beta\frac{\partial u_\beta^{(s-1)}}{\partial\beta}+Ek_\beta u_\alpha^{(s-1)}$$

В уравнениях (5.3) и (5.4) использованы обозначения

$$R_\xi^{(s-1)}=-H_\beta\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}^{(s-1)}}{\partial\beta}-k_\beta(\sigma_{\alpha\alpha}^{(s-1)}-\sigma_{\beta\beta}^{(s-1)}) \tag{5.5}$$

$$R_\zeta^{(s-1)}=H_\beta\frac{\partial\sigma_{\beta\gamma}^{(s-1)}}{\partial\beta}-k_\beta\sigma_{\alpha\gamma}^{(s-1)},\qquad R_\beta^{(s-1)}=-H_\beta\frac{\partial\sigma_{\beta\beta}^{(s-1)}}{\partial\beta}\,2k_\beta\sigma_{\alpha\beta}^{(s-1)}$$

и учтены формулы для кривизн координатных линий

$$k_\alpha=H_\beta\frac{\partial\ln H_\alpha}{\partial\beta},\qquad k_\beta=-H_\alpha\frac{\partial\ln H_\beta}{\partial\alpha}.$$

Кроме того, принято, что $k_\alpha=0$. Последнее предположение означает, что координатная система α, β, ζ, в которой строилось основное напряженное состояние, заменена для построения быстрозатухающих напряженных состояний новой координатной системой ξ, β, ζ, в которой ξ—линии являются прямыми. Координатную систему ξ, β, ζ надо строить только вблизи края $\alpha=\alpha_0$.

Это, вообще говоря, возможно, но надо отметить, что при этом из рассмотрения должны быть исключены угловые точки края (скругленные или нескругленные).

Уравнения (5.3) и (5.4) образуют рекуррентную систему. Из нее последовательно определяются величины с индексом (s) через величины с индексом $(s-1)$. При $s=0$, когда величины с $(s-1)$ равны нулю, получаются однородные уравнения, хорошо известные в теории упругости. Равенства (5.3) образуют уравнения кручения стержней (относительно оси β), а равенства (5.4) — уравнения задачи о плоской деформации (в плоскости $\xi\zeta$). При $s>0$ (когда величины с $(s-1)$ надо рассматривать как известные) уравнения остаются прежними, но становятся неоднородными.

В дальнейшем будет удобно представить коэффициенты разложений (2.1) в виде

$$\sigma_{ij}^{(s)}=\sigma_{ij\,(1)}^{(s)}+\sigma_{ij\,(2)}^{(s)},\qquad u_k^{(s)}=u_{k\,(1)}^{(s)}+u_{k\,(2)}^{(s)},\qquad W^{(s)}=W_{(1)}^{(s)}+W_{(2)}^{(s)}$$

$$(i,j=\alpha,\beta,\gamma;\ k=\alpha,\beta)$$

определив величины с дополнительными индексами (1) и (2) следующим образом: в нулевом приближении

$$\sigma_{\alpha\alpha\,(1)}^{(0)}=\sigma_{\beta\beta\,(1)}^{(0)}=\sigma_{\alpha\gamma\,(1)}^{(0)}=\sigma_{\gamma\gamma\,(1)}^{(0)}=u_{\alpha\,(1)}^{(0)}=W_{(1)}^{(0)}\equiv 0 \tag{5.6}$$

$\sigma_{\alpha\beta\,(1)}^{(0)}$, $\sigma_{\beta\gamma\,(1)}^{(0)}$, $u_{\beta\,(1)}^{(0)}$ определяются из однородной системы (5.3)

$$\sigma_{\alpha\beta\,(2)}^{(0)}=\sigma_{\beta\gamma\,(2)}^{(0)}=u_{\beta\,(2)}^{(0)}\equiv 0 \tag{5.7}$$

$\sigma_{\alpha\alpha\,(2)}^{(0)}$, $\sigma_{\beta\beta\,(2)}^{(0)}$, $\sigma_{\alpha\gamma\,(2)}^{(0)}$, $\sigma_{\gamma\gamma\,(2)}^{(0)}$, $u_{\alpha\,(2)}^{(0)}$, $W_{(2)}^{(0)}$ определяются из однородной системы (5.4).

В s-м приближении ($s > 0$) величины с дополнительными индексами (1) и (2) должны удовлетворять неоднородной системе (5.3), (5.4), в которой величины в правых частях имеют соответственно индексы (1) или (2).

Замечание. Величины с дополнительными индексами (1) и (2) соответствуют величинам, определявшимся в [1] при помощи первого и второго вариантов вспомогательного итерационного процесса.

Решения систем (5.3) и (5.4) подчиним условиям

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\gamma}^{(s)} &\equiv \sigma_{\alpha\gamma(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\gamma(2)}^{(s)} = 0 \quad (\alpha\beta) \\ \sigma_{\gamma\gamma}^{(s)} &\equiv \sigma_{\gamma\gamma(1)}^{(s)} + \sigma_{\gamma\gamma(2)}^{(s)} = 0 \end{aligned} \qquad \text{при } \zeta = \pm 1 \tag{5.8}$$

Тогда для напряженного состояния, представляющего собой сумму напряженных состояний, определяемых основным и вспомогательным итерационными процессами, будут выполняться условия (1.3) или (1.5).

При построении вспомогательного итерационного процесса использована замена переменных (5.1) и принималось, что по ξ, β, ζ изменяемость напряжений и перемещений не слишком велика. Это эквивалентно предположению, что по α и γ напряжения и перемещения имеют большую изменяемость. Следуя пути, описанному в п. 4, надо позаботиться, чтобы быстрая изменяемость по α обозначала быстрое затухание искомых величин, т. е. наложить условия затухания.

Обращаясь к рассмотрению этого вопроса, примем, что из (5.1) переменная ξ определяется формулой

$$\xi = \frac{1}{h}\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d\alpha}{H_\alpha}$$

Тогда край $\alpha = \alpha_0$ будет определяться уравнением $\xi = 0$, и уравнения (5.3) и (5.4) надо будет интегрировать в полуполосе

$$0 \geqslant \xi > -\infty, \qquad -1 \leqslant \zeta \leqslant +1 \tag{5.9}$$

При этом, как отмечалось выше, системы (5.3) и (5.4) имеют определенный физический смысл: это — неоднородные уравнения задачи кручения и задачи о плоской деформации.

На прямых $\zeta = \pm 1$ должны быть выполнены условия (5.8), т. е. условия отсутствия напряжений. Для затухающих решений при $\xi = -\infty$ напряжения и перемещения обращаются в нули. Таким образом, на полуполосу (5.9) будут действовать только:

а) краевые силы

$$[\sigma_{\alpha\alpha(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\alpha(2)}^{(s)}]_{\xi=0}, \qquad [\sigma_{\alpha\gamma(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\gamma(2)}^{(s)}]_{\xi=0}, \qquad [\sigma_{\alpha\beta(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\beta(2)}^{(s)}]_{\xi=0} \tag{5.10}$$

распределенные вдоль прямой $\xi = 0$;

б) массовые силы, компоненты которых R_ξ, R_β, R_ζ определяются формулами (5.5)

При $s = 0$ компоненты сил (5.5) будут равны нулю и в силу принципа Сен-Венана условиями затухания будут требования уравновешенности сил (5.10), т. е., если принять во внимание (5.6) и (5.7), это будут равенства

$$\int_{-1}^{+1} \zeta\sigma_{\alpha\alpha(2)}^{(0)}|_{\xi=0}\, d\zeta = 0, \qquad \int_{-1}^{+1} \sigma_{\alpha\gamma(2)}^{(0)}|_{\xi=0}\, d\zeta = 0 \tag{5.11}$$

$$\int_{-1}^{+1} \sigma_{\alpha\alpha(2)}^{(0)}|_{\xi=0}\, d\zeta = 0, \qquad \int_{-1}^{+1} \sigma_{\alpha\beta(1)}^{(0)}|_{\xi=0}\, d\zeta = 0 \tag{5.12}$$

Пусть, далее, существуют $(s - 1)$ приближений, определяемых уравнениями (5.3) и (5.4) и удовлетворяющих условиям затухания. Тогда $R_\xi^{(s-1)}$, $R_\zeta^{(s-1)}$, $R_\beta^{(s-1)}$ не обратятся в нули, но соответствующая нагрузка будет локализована в узкой зоне, примыкающей к прямой $\xi = 0$.

Условиями существования затухающих решений для приближения (s) будут требования

$$\begin{gathered}\int_{-1}^{+1} \zeta\, [\sigma_{\alpha\alpha(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\alpha(2)}^{(s)}]_{\xi=0}\, d\zeta = \int_{-\infty}^{0} d\xi \int_{-1}^{+1} [\zeta R_\xi^{(s-1)} - \xi R_\zeta^{(s-1)}]\, d\zeta \\ \int_{-1}^{+1} [\sigma_{\alpha\gamma(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\gamma(2)}^{(s)}]_{\xi=0}\, d\zeta = \int_{-\infty}^{0} d\xi \int_{-1}^{+1} R_\zeta^{(s-1)}\, d\zeta\end{gathered} \tag{5.13}$$

$$\begin{gathered}\int_{-1}^{+1} [\sigma_{\alpha\alpha(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\alpha(2)}^{(s)}]_{\xi=0}\, d\zeta = \int_{-\infty}^{0} d\xi \int_{-1}^{+1} R_\xi^{(s-1)}\, d\zeta \\ \int_{-1}^{+1} [\sigma_{\alpha\beta(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\beta(2)}^{(s)}]_{\xi=0}\, d\zeta = \int_{-\infty}^{0} d\xi \int_{-1}^{+1} R_\beta^{(s-1)}\, d\zeta\end{gathered} \tag{5.14}$$

выражающие уравновешенность массовых и краевых сил, действующих на полуполосу.

Для симметричной задачи, в силу (1.4), равенства (5.11) и (5.13) обращаются в тождества, и условиями затухания будут служить (5.12) и (5.14).

Для обратно симметричной задачи условиями затухания служат равенства (5.11) и (5.13), а (5.12) и (5.14) обращаются в тождества.

6. Обратимся к вопросу о процедуре выполнения граничных условий на боковых поверхностях пластинки за счет произволов основного и вспомогательного итерационных процессов. Для конкретности рассмотрим такие три варианта граничных условий при $\alpha = \alpha_0$ $(\xi = 0)$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = 0, \qquad \sigma_{\alpha\beta} = 0, \qquad \sigma_{\alpha\gamma} = 0 \tag{6.1}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = 0, \qquad \sigma_{\alpha\beta} = 0, \qquad W = 0 \tag{6.2}$$

$$u_\alpha = 0, \qquad u_\beta = 0, \qquad W = 0 \tag{6.3}$$

(они отвечают свободному краю, шарнирно опертому краю и жестко заделанному краю соответственно) и будем выполнять их, считая, что полное напряженное состояние складывается из основного напряженного состояния, определяемого основным итерационным процессом, и из краевого напряженного состояния, определяемого вспомогательным итерационным процессом. Пусть

$$
\begin{gathered}
\sigma_{\alpha\alpha} = h^{-q_1} \sum_{s=0}^{S} h^s \sigma_{\alpha\alpha}^{(s)} + h^{-q_2} \sum_{s=0}^{S} h^s \left(\sigma_{\alpha\alpha(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\alpha(2)}^{(s)}\right) \\
\sigma_{\alpha\beta} = h^{-q_1} \sum_{s=0}^{S} h^s \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} + h^{-q_2} \sum_{s=0}^{S} h^s \left(\sigma_{\alpha\beta(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\beta(2)}^{(s)}\right) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (6.4) \\
W = h^{-q_1} \sum_{s=0}^{S} h^s W^{(s)} + h^{-q_2} \sum_{s=0}^{S} h^s \left(W_{(1)}^{(s)} + W_{(2)}^{(s)}\right)
\end{gathered}
$$

Здесь под q_1 подразумеваются значения q, определяемые формулами (2.3) и (2.4), которые соответствуют основному итерационному процессу, а под q_2 — значения q, определяемые формулами (5.2), которые соответствуют вспомогательному итерационному процессу.

В формулах (5.2) остается неопределенным число r. Его надо выбрать так, чтобы процедура наложения граничных условий имела рекуррентный характер. Для всех трех видов рассматриваемых граничных условий (6.1) — (6.3) эта цель достигается, если положить $r = 2$. Тогда, подставив (6.4) в (6.1) — (6.3) и приравнивая нулю коэффициенты при всех степенях h в левых частях полученных равенств, получим последовательности краевых условий для коэффициентов разложений (6.4).

При $\alpha = \alpha_0$ $(\xi = 0)$ они записываются так:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)} + \sigma_{\alpha\alpha(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\alpha(2)}^{(s)} = 0, \qquad \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} + \sigma_{\alpha\beta(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\beta(2)}^{(s)} = 0 \\
\sigma_{\alpha\gamma}^{(s-1)} + \sigma_{\alpha\gamma(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\gamma(2)}^{(s)} = 0 \qquad (6.5)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)} + \sigma_{\alpha\alpha(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\alpha(2)}^{(s)} = 0, \qquad \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} + \sigma_{\alpha\beta(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\beta(2)}^{(s)} = 0 \\
W^{(s)} + W_{(1)}^{(a)} + W_{(2)}^{(a)} = 0 \qquad (6.6)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
u_\alpha^{(s)} + u_{\alpha(1)}^{(s-1)} + u_{\alpha(2)}^{(s-1)} = 0, \qquad u_\beta^{(s)} + u_{\beta(1)}^{(s-1)} + u_{\beta(2)}^{(s-1)} = 0 \\
W^{(s)} + W_{(1)}^{(a)} + W_{(2)}^{(a)} = 0 \qquad (6.7)
\end{gathered}
$$

причем для обратно симметричной задачи $a = s - 2$, а для симметричной задачи $a = s$.

В граничные соотношения (6.5) — (6.7) входят величины, отмеченные дополнительными нижними индексами (1) и (2). Выше было показано, что их определение для каждого отдельного (s) приводится к интегрированию уравнений задачи о кручении и задачи о плоской деформации. Это значит, что для каждого (s) величины содержат достаточно произволов для выполнения всех трех граничных условий, сформулированных равенствами (6.5) — (6.7). Однако в вспомогательном итерационном процессе в рассмотрение допускаются только затухающие решения и, следовательно, должны быть выполнены условия затухания (5.11) и (5.13) (для обратно симметричной задачи) или (5.12) и (5.14) (для симметричной задачи). Эти условия не зависят от переменной ζ и, следовательно, для их выполнения можно использовать произволы интегрирования основного итерационного процесса.

Для каждого (s) в симметричном и обратно симметричном случае построение величин $\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)}$, $\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}$, $\sigma_{\alpha\gamma}^{(s)}$, $u_{\alpha}^{(s)}$, $u_{\beta}^{(s)}$, $W^{(s)}$, входящих в условия (6.5) — (6.7), сводится к интегрированию уравнений задачи об изгибе пластинки (в обратно симметричном случае) или задачи об обобщенном плоском напряженном состоянии (в симметричном случае). Это дает достаточно произволов для выполнения всех условий затухания.

Таким образом, формальный подсчет показывает, что основной итерационный процесс вместе со вспомогательным процессом дает ровно столько произволов, сколько нужно для выполнения граничных условий (6.5) — (6.7) и условий затухания (5.11) — (5.14). Более подробный анализ этих условий занял бы слишком много места. В работе [1] для задачи об изгибе пластинки, отнесенной к декартовой системе координат, такой анализ проведен; он показал, что процедура выполнения граничных условий носит рекуррентный характер.

Поступила 22 X 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
2. Колос А. В. Об уточнении классической теории изгиба круглых пластинок. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
3. Krauss F. Grundgleichungen der Schalentheorie. Math. Ann., 1929, H. 1, Bd. 101.
4. Кильчевский Н. А. Обобщение современной теории оболочек. ПММ, 1939, т. 2, вып. 4.
5. Векуа И. Н. Об одном методе расчета призматических оболочек. Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 1955, т. 21.
6. Муштари Х. М. и Терегулов И. Г. К теории оболочек средней толщины. Докл. АН СССР, 1959, т. 128, № 6.
7. Вишик М. И. и Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Успехи матем. наук, 1957, т. 12, вып. 5 (77).
8. Friedrichs K. Asymptotic phenomena in mathematical physics. Bull. Amer. Math. Soc., 1955, vol. 6, No. 6. (русск. перев.: Механика Изд. иностр. лит., 1957, № 1:2)
9. Friedrichs K. The edge effect in the bending of plates. Reissner Anniv. vol. J. W. Edwards, Ann. Arbos. Mich, 1949.
10. Johnson M. W. and Reissner E. On the foundations of the theory of thin elastic shells. J. Math. and Phys., 1958, vol. 37.
11. Reiss E. L. and Locke S. On the theory of plane stress. Quart. Appl. Math., 1961, vol. 19, No. 3.
12. Friedrichs K. and Dressler R. F. A boundary-layer theory for elastic plates. Communs Pure and Appl. Math., 1961, vol. 14, No. 1.
13. Green A. E. On the linear theory of thin elastic shells. Proc. Roy. Soc. A, 1962, vol. 266, No. 1325.
14. Green A. E. Boundary layer equations in the linear theory of thin elastic shells. Proc. Roy. Soc. A, 1962, vol. 269, No. 1339.
15. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости, ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
16. Аксентян О. К., Ворович И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
17. Нигул У. К. О применении символического метода А. И. Лурье к анализу напряженных состояний двумерных теорий упругих плит. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
18. Лурье А. И. К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. 6, вып. 5.