Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

О РЕГУЛЯРНОМ ОТРАЖЕНИИ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН ОТ ЖЕСТКОЙ СТЕНКИ

Г. П. Шиндяпин

(Саратов)

Задачи о регулярном отражении слабых ударных волн от жесткой стенки не могут быть исследованы при помощи лишь акустической теории, так как возникает необходимость учета зависимости основных параметров потока от величины избыточного давления. Общие принципы теории коротких волн, учитывающей в первом приближении эту зависимость, были развиты О. С. Рыжовым и С. А. Христиановичем в работе [1].

В этой же работе был впервые исследован вопрос о регулярном отражении в нелинейной постановке. Для приближенного решения задачи использовались точные решения обращенной системы коротких волн. При этом произвол постоянных, содержащихся в решениях, использовался для приближенного удовлетворения граничных условий.

В настоящей работе для решения уравнений коротких волн используется метод разложения искомых функций в ряды по малому параметру, за который принимается величина избыточного давления. Приводится вид граничных условий, которым должны удовлетворять решения уравнений коротких волн на фронте ударной волны. При исследовании задачи о регулярном отражении отыскиваются частные решения системы коротких волн в виде, представляющем непосредственную зависимость скоростей течения от функций координат. Это позволяет довольно точно удовлетворить условию сохранения касательной составляющей скорости при переходе через фронт отраженной волны и всем другим граничным условиям. Простой аналитический вид решений позволяет проинтегрировать дифференциальное уравнение отраженного ударного фронта, найти координаты фронта в замкнутом виде, а также проследить непрерывное изменение всей картины отражения и поля скоростей при изменении исходных данных в диапазоне регулярного отражения. Приводятся примеры расчета течения в случае докритического и критического значения исходных данных.

1. Приведем вывод уравнений коротких волн, основанный на разложении искомых функций в ряды по малому параметру $P = p \,/\, nP_0$, где p — избыточное давление, P_0 — начальное давление, n — постоянная отношения теплоемкостей (для воздуха $P_0 = 1$ *атм*, $n = 1.4$).

Уравнения динамики сжимаемого газа для плоских течений в цилиндрической системе координат r, ϑ имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{v^2}{r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{uv}{r} + \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \vartheta} = 0 \qquad (1.1) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{u}{r}\right) = 0\end{gathered}$$

Здесь u, v — проекции вектора скорости q на направление радиус-вектора и перпендикуляр к нему, p — избыточное давление, ρ — плотность, t — время.

Для слабых ударных волн можно с большой точностью считать процесс сжатия адиабатическим, что позволяет для воздуха записать закон сжатия в виде

$$p = P_0 \, [(\rho / \rho_0)^n - 1] \tag{1.2}$$

где ρ_0 — начальная плотность.

Исходя из этого закона, найдем старшие члены разложения основных параметров потока в ряды по малым значениям P.

Для плотности из (1.2) имеем

$$\rho / \rho_0 = 1 + P - {}^1/_2 \, (n - 1) \, P^2 \tag{1.3}$$

Для скорости распространения фронта волны N в среде с избыточным давлением p_1 и скоростью частиц q_1, а также нормальной q_n и касательной q_τ составляющих скорости частиц q за фронтом ударной волны имеем условия динамической совместности (1.4)

$$\rho \, (N - q_n) = \rho_1 \, (N - q_{1n}), \quad p - p_1 = \rho_1 \, (N - q_n) \, (q_n - q_{1n}), \quad q_\tau = q_{1\tau}$$

Отсюда, применяя (1.3), имеем, следуя [2],

$$\begin{gathered} N = a_0 [1 + {}^1/_4 \, (n + 1) \, P + {}^1/_4 \, (n - 3) \, P_1] + q_{1n} \\ q_n = a_0 \, (P - P_1) + q_{1n} \end{gathered} \tag{1.5}$$

Если считать, что избыточное давление p_1 и скорость q_1 соответствуют состоянию за фронтом волны N_1, распространяющейся по невозмущенному газу с нулевым избыточным давлением, то $q_{1n} = a_0 P_1$, и (1.5) примет вид

$$N = a_0 \, [1 + {}^1/_4 \, (n + 1) \, (P + P_1)], \qquad q_n = a_0 P \tag{1.6}$$

Пусть $r = r \, (\vartheta, t)$ — уравнение фронта ударной волны, ψ — угол между нормалью к ударному фронту и направлением радиус-вектора, θ — угол между направлением радиус-вектора и направлением скорости частиц. Тогда для составляющих скорости u и v на фронте волны имеем равенства

$$\begin{gathered} u = q_n \cos \psi + q_\tau \sin \psi, \qquad v = q_n \sin \psi - q_\tau \cos \psi \\ q_n = q \cos (\psi - \theta), \qquad q_\tau = q \sin (\psi - \theta) \\ \operatorname{tg} \theta = v / u, \ \operatorname{tg} \psi = r^{-1} \, \partial r / \partial \vartheta \end{gathered} \tag{1.7}$$

Отсюда на линии разрыва для малых значений углов ψ и θ будем иметь

$$u = q \, (1 - {}^1/_2 \psi^2), \qquad v = - u\psi, \qquad \partial r / \partial t = N \, (1 + {}^1/_2 \psi^2) \tag{1.8}$$

Последнее получается из равенства скоростей распространения ударного фронта в направлении радиус-вектора $\partial r / \partial t = N \sec \psi$.

Введем безразмерные функции M и V согласно [1] и независимые переменные Δ, Y, τ посредством соотношений

$$M = \frac{u}{a_0}, \quad V = \frac{v}{a_0}, \quad \Delta = \frac{r}{a_0 t} - 1, \quad Y = \frac{\vartheta}{\theta_0 \sqrt{{}^1/_2 \, (n + 1)}}, \quad \tau = \ln t \tag{1.9}$$

Здесь θ_0 — некоторое характерное значение угла. При этом третье равенство (1.8) при подстановке обозначений (1.9) и отбрасывании заведомо малых членов примет вид

$$\Delta + \frac{\partial \Delta}{\partial \tau} = \frac{n+1}{4}(P + P_1) + \frac{1}{(n+1)\theta_0^2}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial Y}\right)^2 \tag{1.10}$$

Считая $\tau \sim Y \sim 1$, отсюда и из оставшихся равенств (1.8) имеем

$$\Delta \sim P, \qquad \theta_0 \sim P^{1/2}, \qquad M \sim P, \qquad V \sim P^{3/2} \tag{1.11}$$

Полученные соотношения определяют порядок малости параметров потока на ударном фронте. Будем считать, что этот порядок сохраняется и в некоторой области примыкающей к фронту ударной волны.

Тогда уравнения динамики (1.1) в переменных (1.9) после отбрасывания малых величин высшего порядка согласно (1.3), (1.11) примут вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial M}{\partial \Delta} = \frac{\partial P}{\partial \Delta}, \qquad \frac{\partial V}{\partial \Delta} = \frac{1}{\theta_0 \sqrt{1/2\,(n+1)}} \frac{\partial P}{\partial Y} \\ \frac{\partial M}{\partial \tau} + \frac{\partial P}{\partial \tau} + (M - \Delta)\left(\frac{\partial M}{\partial \Delta} + \frac{\partial P}{\partial \Delta}\right) + (n-2)\,P\,\frac{\partial P}{\partial \Delta} + \\ + P\,\frac{\partial M}{\partial \Delta} + \frac{1}{\theta_0 \sqrt{1/2\,(n+1)}} \frac{\partial V}{\partial Y} + M = 0\end{gathered} \tag{1.12}$$

Интегрируя первое уравнение системы (1.12), имеем $M = P + F(Y)$, где $F(Y)$ — произвольная функция. На фронте ударной волны, согласно (1.8), (1.6), имеем $M = (1 - 1/2\psi^2)\,P \approx P$, поэтому $F(Y) = 0$. Уравнения (1.12) при этом примут вид

$$\begin{gathered}M = P, \qquad \frac{\partial V}{\partial \Delta} = \frac{1}{\theta_0 \sqrt{1/2\,(n+1)}} \frac{\partial M}{\partial Y} \\ \frac{\partial M}{\partial \tau} + \left(\frac{n+1}{2} M - \Delta\right)\frac{\partial M}{\partial \Delta} + \frac{1}{2\theta_0 \sqrt{1/2\,(n+1)}} \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{1}{2} M = 0\end{gathered} \tag{1.13}$$

который является основным при исследовании коротких волн.

Для исследования системы (1.13), учитывая оценки (1.11), удобно ввести, следуя работе [1],

$$M = M_0\mu, \qquad V = M_0 \sqrt{1/2\,(n+1)\,M_0}\,\nu, \qquad \Delta = 1/2\,(n+1)\,M_0\delta$$
$$\theta_0 = \sqrt{M_0} \tag{1.14}$$

Здесь M_0 — характерное значение числа M. Система уравнений коротких волн примет вид

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tau} + (\mu - \delta)\frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \frac{1}{2}\frac{\partial \nu}{\partial Y} + \frac{1}{2}\mu = 0, \qquad \frac{\partial \nu}{\partial \delta} - \frac{\partial \mu}{\partial Y} = 0, \qquad M = \frac{p}{nP_0} \tag{1.15}$$

Здесь в случае автомодельных течений $\partial \mu \,/\, \partial \tau = 0$

2. Дифференциальное уравнение, определяющее положение ударного фронта, получим из (1.10), вводя обозначения (1.14),

$$\frac{\partial \delta}{\partial Y} = \pm \left\{2\left[\delta\left(1 + \frac{1}{M_0}\frac{\partial M_0}{\partial \tau}\right) + \frac{\partial \delta}{\partial \tau}\right] - (\mu + \mu_1)\right\}^{1/2} \tag{2.1}$$

Вводя, согласно [1], подвижную систему координат

$$x = a_0 t\,([1 + {}^1/_2\,(n+1)\,X] \approx a_0 t\,(1 + \Delta - {}^1/_2\vartheta^2)$$
$$y = a_0 t\sqrt{{}^1/_2\,(n+1)\,M_0 Y} \approx a_0 t\vartheta, \qquad \delta = X + {}^1/_2 Y^2 \tag{2.2}$$

При этом уравнение (2.1) примет вид

$$\frac{dX}{dY} = -Y \pm \left\{2\left[\delta\left(1 + \frac{1}{M_0}\frac{\partial M_0}{\partial\tau}\right) + \frac{\partial\delta}{\partial\tau}\right] - (\mu + \mu_1)\right\}^{1/2} \tag{2.3}$$

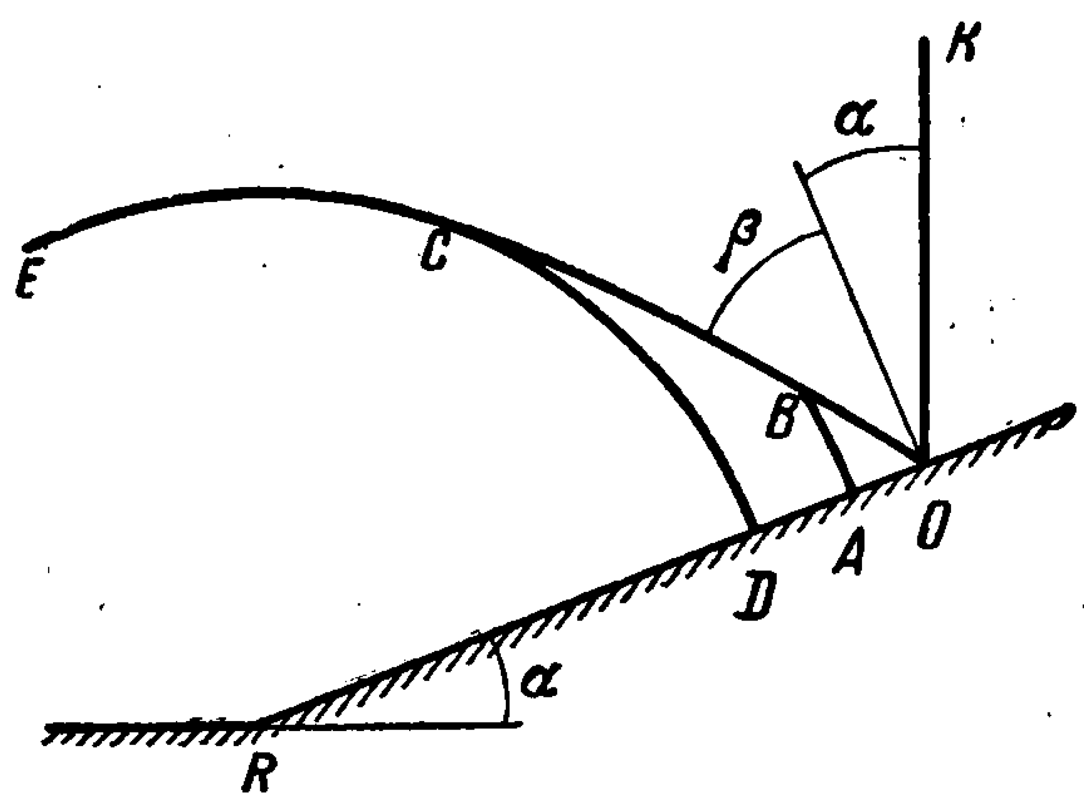
На фронте ударной волны условие Гюгонио для нормальной составляющей скорости выполняется автоматически, поскольку во всем потоке M и p связаны соотношением $M = p\,/\,nP_0$.

Для сохранения касательной составляющей скорости к ударному фронту при переходе через него будем иметь условие типа

$$u\psi - v = u_1(\psi + \vartheta + \alpha), \qquad u_1 = q_{1n}\cos\psi \approx q_{1n} \tag{2.4}$$

где α — угол, составленный направлением скорости перед фронтом волны и осью $\vartheta = 0$.

3. Рассмотрим отражение плоской бесконечно длинной волны OK с избыточным давлением p_1 от жесткой стенки с малым изломом α (фиг. 1), который совпадает с углом падения, образуемым ударным фронтом и перпендикуляром к стенке в точке пересечения. Пусть этот фронт распространяется в невозмущенной среде с нулевым избыточным давлением. Для регулярного отражения (α больше некоторого критического значения α_*) фронт отраженной волны OE будет состоять в общем случае из отрезка прямой OB с некоторым постоянным давлением p_0 (невозмущенный фронт), небольшой дуги BC, где имеет место интенсивное падение давления от p_0 до p_1, и дуги окружности CE, представляющей собой фронт звуковой волны, вдоль которого давление почти не отличается от давления за падающим фронтом.



Фиг. 1

Таким образом, если выбрать за начало координат точку R и направить ось $\vartheta = 0$ по стенке, то в зоне $ABCD$ будем иметь интенсивное изменение давления как в направлении радиус-вектора, так и перпендикуляра к нему, т. е. течение типа короткой волны.

Запишем граничные условия задачи. Для ударных волн, используя (2.4) в обозначениях (1.14), имеем

$$\mu_1 = \frac{M_1}{M_0}, \qquad \frac{\mu_1\psi}{\sqrt{{}^1/_2\,(n+1)\,M_0}} + \nu_1 = 0 \quad \text{на } OK \tag{3.1}$$

$$\mu = \frac{M}{M_0}, \qquad \frac{(\mu - \mu_1)\,\psi}{\sqrt{{}^1/_2\,(n+1)\,M_0}} - \nu = \mu_1\left(\frac{\alpha}{\sqrt{{}^1/_2\,(n+1)\,M_0}} + Y\right) \quad \text{на } OE \tag{3.2}$$

Здесь, согласно (2.1),

$$\psi = \left(\frac{n+1}{2} M_0\right)^{1/2} \left\{2\left[\delta\left(1+\frac{1}{M_0}\frac{\partial M_0}{\partial \tau}\right)+\frac{\partial \delta}{\partial \tau}\right]-(\mu+\mu_1)\right\}^{1/2} \tag{3.3}$$

На фронте звуковой волны AB с большой точностью можно считать скорость q направленной параллельно стенке, т. е.

$$\mu Y + \nu = 0, \quad \nu = 0 \quad \text{на стенке } DA \tag{3.4}$$

Наконец, потребуем, чтобы при подходе по BC к точке C — фронт отраженной волны переходил в звуковую окружность CE, т. е.

$$\mu = \mu_1 \quad \text{при } \delta_1\left(1+\frac{1}{M_0}\frac{\partial M_0}{\partial \tau}\right)+\frac{\partial \delta_1}{\partial \tau} = \mu_1 \tag{3.5}$$

4. Для течения вблизи точки O условия (3.1), (3.2), (3.3) дают

$$\mu_1 = \frac{M_1}{M_0}, \qquad \alpha = \left(\frac{n+1}{2} M_0\right)^{1/2}\left\{2\left[\delta_0\left(1+\frac{1}{M_0}\frac{\partial M_0}{\partial \tau}\right)+\frac{\partial \delta_0}{\partial \tau}\right]-\mu_1\right\}^{1/2} \tag{4.1}$$

$$(1-\mu_1)\beta = \mu_1\alpha, \qquad \beta = \left(\frac{n+1}{2} M_0\right)^{1/2}\left\{2\left[\delta_0\left(1+\frac{1}{M_0}\frac{\partial M_0}{\partial \tau}\right)+\frac{\partial \delta_0}{\partial \tau}\right]-(1+\mu_1)\right\}^{1/2} \tag{4.2}$$

Отсюда находим известные соотношения [1] для β и M_0

$$\beta = \left(\frac{n+1}{2}\right) M_0 \frac{\mu_1}{\sqrt{1-2\mu_1}}, \qquad M_0 = \frac{1-2\mu_1}{{}^1\!/_2(n+1)}\left(\frac{\alpha}{1-\mu_1}\right)^2 \tag{4.3}$$

Второе условие (4.1) дает закон движения точки O

$$\left(M_0+\frac{\partial M_0}{\partial \tau}\right)\delta_0 + M_0\frac{\partial \delta_0}{\partial \tau} = M_0\left(\frac{\mu_1}{2}+\frac{\alpha^{\circ 2}}{2}\right), \qquad \alpha^\circ = \frac{\alpha}{\sqrt{{}^1\!/_2(n+1)M_0}} \tag{4.4}$$

Подставляя во второе уравнение (4.3) значение μ_1 из (4.1), для определения M_0 получим

$$M_0^2 - \left(\frac{2}{n+1}\alpha^2 + 2M_1\right)M_0 + \left(\frac{4}{n+1}\alpha^2 + M_1\right)M_1 = 0 \tag{4.5}$$

Из двух значений M_0 в действительности, как известно [1], реализуется течение, отвечающее значению

$$M_0 = \frac{\alpha^2 + (n+1)M_1 - \sqrt{\alpha^4 - 2(n+1)\alpha^2 M_1}}{n+1} \tag{4.6}$$

При этом максимальное относительное избыточное давление

$$\frac{M_0}{M_1} = \frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{2}\alpha^{\vee 2} + 1 - \frac{1}{2}\alpha^{\vee}\sqrt{\alpha^{\vee 2} - 4}, \qquad \alpha^{\vee} = \frac{\alpha}{\sqrt{{}^1\!/_2(n+1)M_1}} \tag{4.7}$$

принимает наибольшее значение при $\alpha^{\vee} = 2$, а

$$\alpha \,/\, \sqrt{{}^1\!/_2(n+1)M_1} = 2 \tag{4.8}$$

будет критическим соотношением для регулярного отражения. Регулярное отражение должно характеризоваться, следовательно, условием $\alpha \geqslant 2\sqrt{{}^1\!/_2(n+1)M_1}$, накладываемым на исходные параметры M_1, α или, что то же самое, p_1, α. Если считать угол, отвечающий условию (4.8) при определенном M_1, за критическое значение угла и обозначать α_*, то условие регулярного отражения есть

$$\alpha \geqslant \alpha_* = 2\sqrt{{}^1/_2\,(n+1)\,M_1} \tag{4.9}$$

Будем считать интенсивность падающей волны M_1 постоянной. Тогда, согласно (4.6), значение M_0 тоже постоянно, а следовательно, постоянны и все параметры, характеризующие картину отражения, т. е. в переменных μ, ν, δ, Y картина отражения становится автомодельной, и можно пользоваться для описания течения в зоне короткой волны уравнениями (1.15). При этом уравнение (4.4) примет вид

$$\delta_0 = {}^1/_2\mu_1 + {}^1/_2\alpha^{\circ 2} \tag{4.10}$$

Параметры течения β, M_0 определяются согласно (4.3), а для α° из первого условия (4.2) имеем

$$\alpha^\circ = \frac{1-\mu_1}{\sqrt{1-2\mu_1}} \tag{4.11}$$

Для фронта отраженной волны (2.1) получим

$$d\delta\,/\,dY = -\sqrt{2\delta - (\mu + \mu_1)} \tag{4.12}$$

Используем его для определения координат точки B — пересечения отраженного фронта с звуковой окружностью. Для прямолинейного участка фронта OB, с учетом

$$\psi = \sqrt{{}^1/_2\,(n+1)\,M_0}\,d\delta\,/\,dY = \beta - \vartheta, \qquad \alpha^2 - \beta^2 = {}^1/_2\,(n+1)\,M_0\,]$$

получим из (4.12)

$$\delta + \beta^\circ Y - {}^1/_2 Y^2 = {}^1/_2\mu_1 + {}^1/_2\alpha^{\circ 2}$$

Уравнение звуковой окружности $\delta = 1$. Отсюда координаты точки B

$$Y_1 = \frac{\mu_1}{\sqrt{1-2\mu_1}} - \sqrt{1-\mu_1}, \qquad \delta_1 = 1 \tag{4.13}$$

Область постоянного значения давления исчезает, если фронт звуковой волны AB догонит фронт падающей волны. Это случится, когда Y_1 станет равным нулю. Тогда для координат точки B будем иметь

$$Y_1 = 0, \qquad \delta_1 = \delta_0 = {}^1/_2\mu_1 + {}^1/_2\alpha^{\circ 2} \tag{4.14}$$

5. Система уравнений коротких волн (1.15) соответствует уравнению

$$\mu_\delta{}^2 + (\mu - \delta)\,\mu_{\delta\delta} + {}^1/_2\mu_{YY} + (k-1)\,\mu_\delta = 0, \qquad k = {}^1/_2 \tag{5.1}$$

Его частные решения ищем в виде $\mu = F(\zeta)$, $\zeta = \delta - cY^2$. Это дает

$$\mu = a\delta - a\,(a - {}^1/_2)\,Y^2 + a_1 \tag{5.2}$$

Здесь a, a_1 — произвольные постоянные. Согласно второму уравнению (1.17), имеем

$$\nu = -2a\,(a - {}^1/_2)\,Y\delta + f\,(Y)$$

Это после подстановки в первое уравнение дает

$$f'\,(Y) = a\,(2a+1)\,(a - {}^1/_2)\,Y^2 - (2a+1)\,a_1$$

Отсюда, принимая во внимание условие (3.5), получим

$$f(Y) = {}^1/_3 a(2a+1)(a-{}^1/_2)Y^3 - (2a+1)a_1 Y \qquad (5.3)$$
$$\nu = {}^1/_3 a(2a+1)(a-{}^1/_2)Y^3 - [2a(a-{}^1/_2)\delta + (2a+1)a_1]Y$$

Найдем значения постоянных a, a_1 для решений (5.2), (5.3). В точке B, согласно (4.12), (4.13), имеем

$$a_1 = 1 - a\delta_1 + a(a-{}^1/_2)Y_1^2 \qquad (5.4)$$

Условие (3.6) в точке C (Y_2, δ_2) теперь дает

$$Y_2 = \left(\frac{a(\mu_1-\delta_1)+1-\mu_1}{a(a-{}^1/_2)} + Y_1^2\right)^{1/2} \qquad (5.5)$$

Условие (3.4) на AB

$$ {}^1/_3 a(2a+1)(a-{}^1/_2)Y^3 - [2a(a-{}^1/_2)\delta_1 + (2a+1)(1-a\delta_1)]Y -$$
$$- a(2a+1)(a-{}^1/_2)Y_1^2 Y + Y = 0 \qquad (5.6)$$

при $Y \leqslant Y_1$ удовлетворяется с точностью до членов третьего порядка малых Y_1. Значение коэффициента a найдем из условия (3.2) в точке C

$$- {}^1/_3 a(2a+1)(a-{}^1/_2)Y_2^3 + \{2a(a-{}^1/_2)\mu_1 +$$
$$+ (2a+1)[1 - a\delta_1 + a(a-{}^1/_2)Y_1^2]\}Y_2 = \mu_1(\alpha^\circ + Y_2) \qquad (5.7)$$

т. е. имеем окончательный вид решения

$$\mu = a(\delta - \delta_1) - a(a-{}^1/_2)(Y^2 - Y_1^2) + 1$$
$$\nu = {}^1/_3 a(2a+1)(a-{}^1/_2)Y^3 - \{2a(a-{}^1/_2)\delta + (2a+1)[1 - a\delta_1 +$$
$$+ a(a-{}^1/_2)Y_1^2]\}Y \qquad (5.8)$$

6. Уравнение фронта отраженной волны $dX/dY = -Y - \sqrt{2\delta - (\mu+\mu_1)}$ теперь может быть проинтегрировано. Подставляя μ из (5.8), получим

$$X'^2 + 2YX' + a(1-a)Y^2 - (2-a)X + \mu_1 + 1 -$$
$$- a\delta_1 + a(a-{}^1/_2)Y_1^2 = 0$$

Система подстановок

$$X = \frac{x - \mu_1 + 1 - a\delta_1 + a(a-{}^1/_2)Y_1^2}{2-a}$$
$$x = Y^2 U(Y), \qquad V^2 = 1 - a(1-a) + (2-a)U$$

приводит это уравнение к виду

$$\frac{2VdV}{2V^2 + (2-a)V - a(2a-1)} = -\frac{dY}{Y}$$

Интегрирование дает

$$[(V-\alpha)Y]^\alpha [(V+\beta)Y]^\beta = A_0, \qquad \begin{aligned}\alpha &= {}^1/_4[\sqrt{17a^2-12a+4} + (2-a)]\\ \beta &= {}^1/_4[\sqrt{17a^2-12a+4} - (2-a)]\end{aligned}$$

или

$$Y = \frac{Z-z}{\alpha+\beta}, \qquad V = \frac{Z\alpha + z\beta}{Z-z}, \qquad Z = Az^{-\alpha/\beta} \qquad (6.1)$$

Из условия прохождения фронта через точку O для A получаем

$$A = \{(2 - a)\,\delta_0 - [\mu_1 + 1 - a\delta_1 + a\,(a - {}^1/_2)\,Y_1^2]\}^\lambda$$

$$\lambda = {}^1/_2\,(\alpha + \beta)\,/\,\beta \tag{6.2}$$

Уравнение отраженной волны в параметрическом виде

$$Y = \frac{A - z^{2\lambda}}{(\alpha + \beta)\,z^{\alpha/\beta}}, \qquad X = \frac{1}{2 - a}\Big\{\mu_1 + 1 - a\delta_1 + a$$

$$(a - {}^1/_2)\,Y_1^2 + \left[\frac{\alpha A + \beta z^{2\lambda}}{(\alpha + \beta)\,z^{\alpha/\beta}}\right]^2 - [1 - a\,(1 - a)]\,Y^2\Big\} \tag{6.3}$$

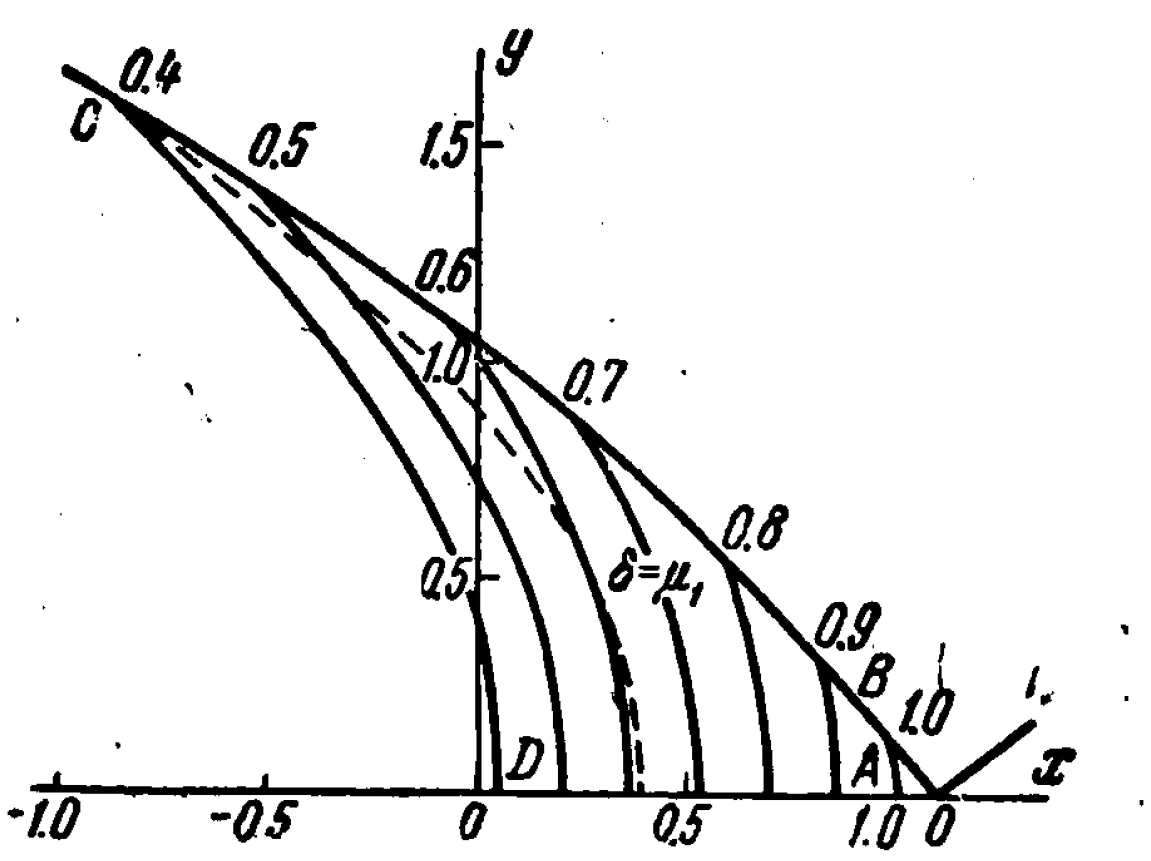
позволяет построить ее фронт в декартовой системе координат.

7. Для примера приведем расчет картин отражения, соответствующих случаям $\mu_1 = 0.4$ $(\alpha > \alpha_*)$, $\mu_1 = {}^1/_3$ $(\alpha = \alpha_*)$.

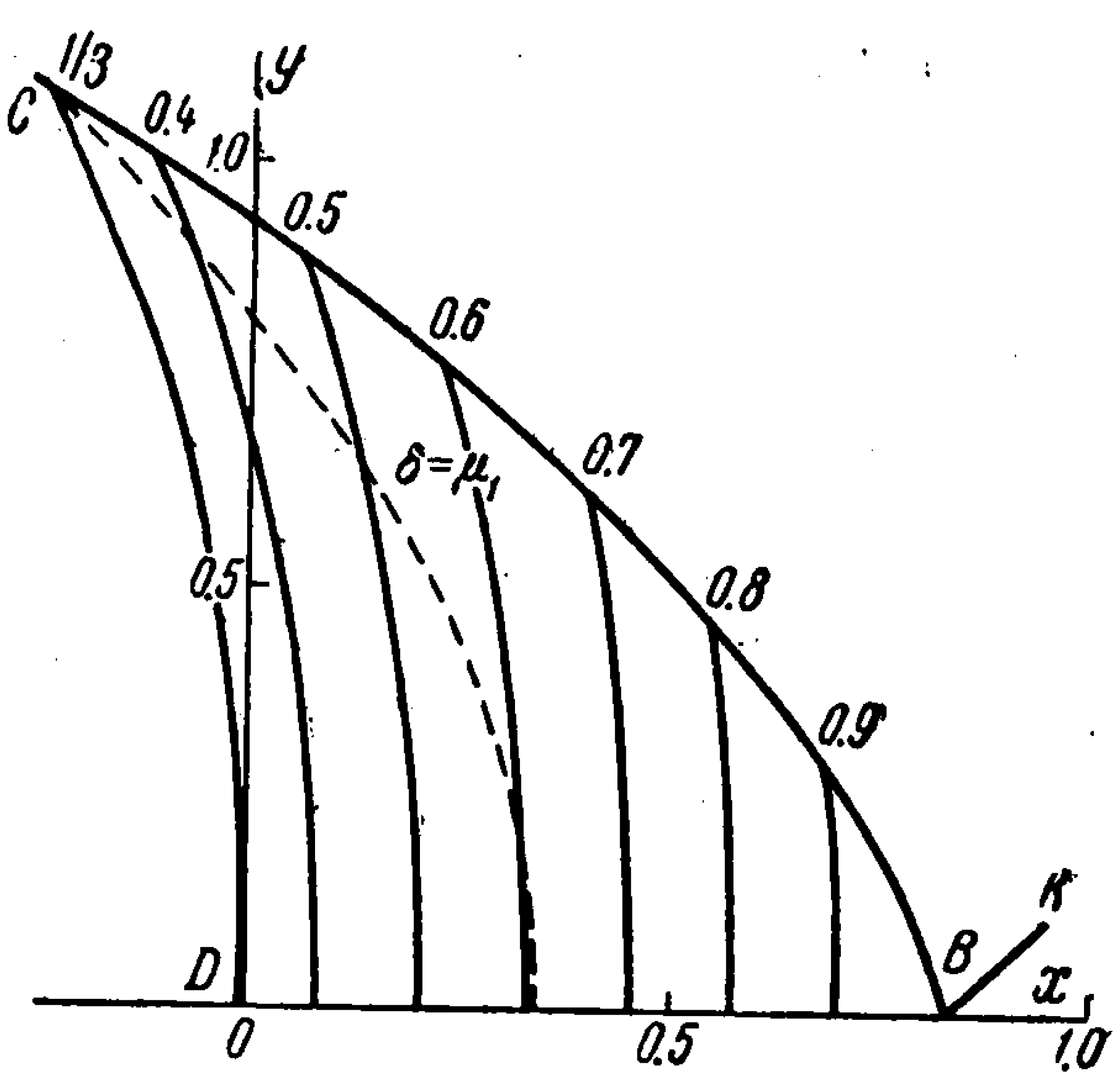
При $\mu_1 = 0.4$, что дает $\alpha^\circ = 1.34, \alpha = 1.5\,\beta$, $(M_0 = 2.5\ M_1)$ координаты точек $O(\delta_0 = 1.1,\ Y_0 = 0)$, $B\ (\delta_1 = 1,\ \ Y_1 = 0.12)$. Согласно (5.8), имеем $a = 0.633$, и для точки $C\,(\delta_2 = 0.4,\ Y_2 = 1.62)$.

При $\mu_1 = {}^1/_3$ имеем $\alpha^\circ = 1.115$, $\alpha = 2\beta$ $(M_0 = 3M_1)$, координаты точки $B(\delta_1 = 0.83,$ $Y_1 = 0)$. Значение $a = 0.792$ и для точки $C(\delta_2 = {}^1/_3,\ Y_2 = 1.08)$.

На фиг. 2, 3 показаны рассчитанные для этих случаев поля скоростей — линий равных значений μ, что соответствует линиям равных давлений, и построены кривые фронтов отраженных волн.



Фиг. 2



Фиг. 3

При этом условие (3.2) сохранения касательной составляющей вектора скорости при переходе через фронт отраженной волны можно считать выполненным точно, ибо погрешность, с которой выполнялось это условие, отнесенная к величине $\mu_1(\alpha^\circ + Y)$, нигде не превышает 1%.

В заключение автор благодарит С. В. Фальковича за ценные советы при обсуждении настоящей работы.

Поступила 29 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
2. Гриб А. А., Рябинин А. Г., Христианович С. А. Об отражении плоской ударной волны в воде от свободной поверхности. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
3. Ландау Л. Д., Лившиц С. М. Механика сплошных сред. § 95, Гостехиздат, 1960.