Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА О ТРЕХМЕРНЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ

В. М. Борисов

(Москва)

Рассматривается задача о построении сверхзвуковой части сопла, обладающей максимальной тягой. Впервые точное решение этой задачи в замкнутой форме для осесимметричных сверхзвуковых течений было дано Ю. Д. Шмыглевским [1]. Начальная и концевая точки образующей сопла считались заданными. Для явной записи функционала и дополнительных условий использовался переход от контура тела к границам области влияния.

В настоящей работе сверхзвуковое течение в сопле предполагается пространственным. Дифференциальные уравнения течения используются как связи между функциями. Этот подход к решению вариационных задач газовой динамики был использован Гудерлеем и Армитейджем [1] и Т. К. Сиразетдиновым [3]. Необходимые условия экстремума, получаемые при такой постановке задачи, представляют собой краевую задачу для системы нелинейных уравнений в частных производных с условиями на всей поверхности, ограничивающей область влияния. Подобный результат, например, был получен в работе [2] при определении осесимметричного сопла максимальной тяги с произвольными изопериметрическими условиями на стенке.

В случае ограничений, связанных только с выходным контуром сопла, выявляется класс пространственных оптимальных решений, где число независимых переменных в краевой задаче удается понизить. Для осесимметричных течений это дано в работе [4].

1. Формулировка вариационной задачи. Пусть u, v, w — проекции скорости на оси декартовых координат x, y, z. Для описания стационарного безвихревого изэнтропического течения невязкого нетеплопроводного газа с произвольными термодинамическими свойствами достаточно трех уравнений (две проекции вихря и уравнение неразрывности)

$$L_1 \equiv u_z - w_x = 0, \qquad L_2 \equiv v_x - u_y = 0$$
$$L_3 \equiv (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0 \tag{1.1}$$

Здесь и в дальнейшем индексами x, y, z будем обозначать частные производные. Плотность ρ, давление p и скорость звука a — известные функции модуля скорости. При этом

$$\frac{dp}{\rho} = a^2 \frac{d\rho}{\rho} = -u\,du - v\,dv - w\,dw \tag{1.2}$$

Для дальнейшего введем две «функции тока» $\psi(x, y, z)$ и $\chi(x, y, z)$ пространственного течения по формулам:

$$\rho u = \frac{D(\psi, \chi)}{D(y, z)} = \psi_y \chi_z - \psi_z \chi_y \qquad (uvw,\ xyz) \tag{1.3}$$

Здесь символ (uvw, xyz) означает циклическую перестановку.

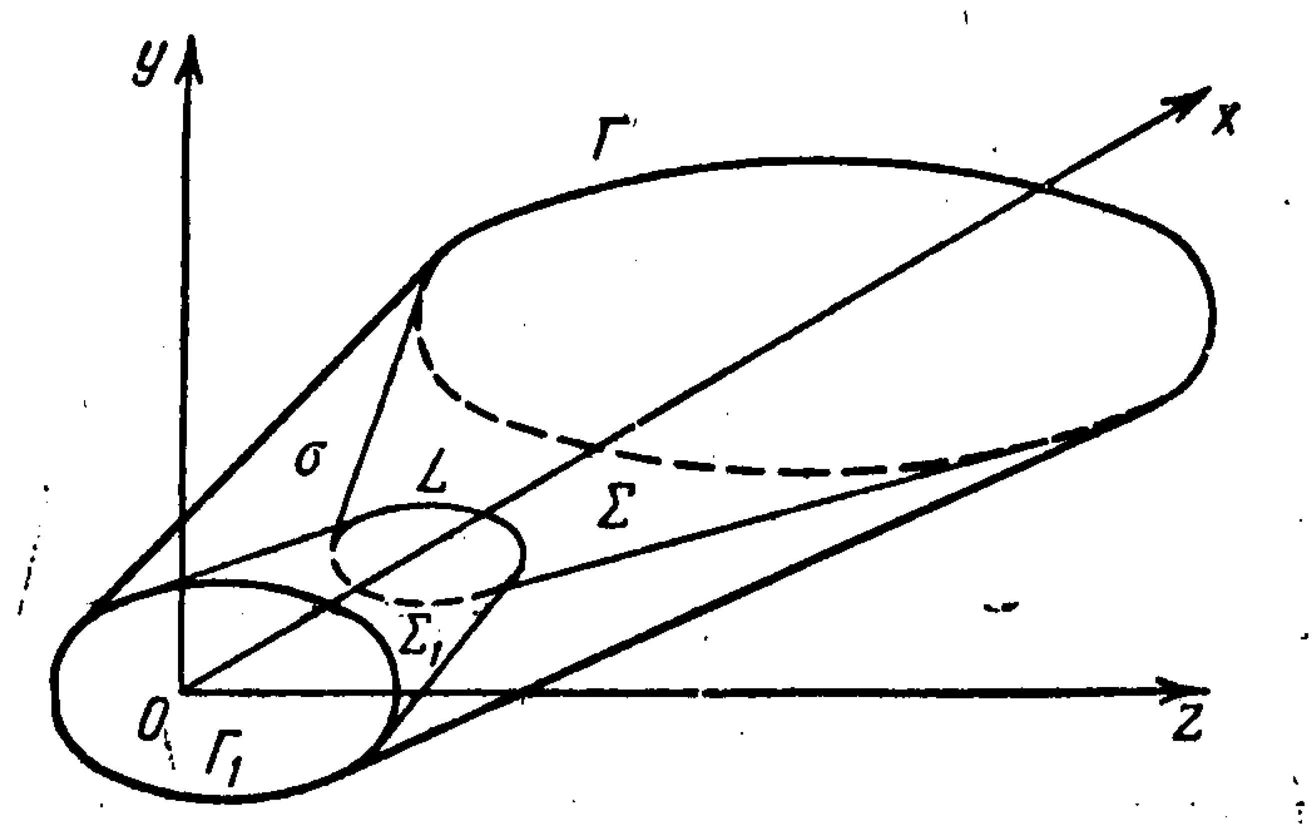
Нетрудно проверить, что уравнение $L_3=0$ системы (1.1) будет следствием системы (1.3). Поэтому два любых уравнения (1.3) позволяют по известному полю течения построить функции ψ и χ в потоке.

Рассмотрим дифференциальные уравнения линии тока

$$\frac{dx}{\rho u} = \frac{dy}{\rho v} = \frac{dz}{\rho w} \tag{1.4}$$

С учетом (1.3) уравнение (1.4) можно проинтегрировать. Вычисления дают, что вдоль линии тока

$$\psi = \text{const}, \quad \chi = \text{const} \tag{1.5}$$



Фиг. 1

Обратимся к вариационной задаче. Пусть параметры начального потока заданы характеристической поверхностью Σ_1. Эта поверхность (фиг. 1) проходит через заданный контур Γ_1. Кроме того, задан некоторый контур Г. Буквой Σ обозначим неизвестную замыкающую характеристическую поверхность, приходящую на контур Г. Контур L — линия пересечения Σ и Σ_1. Обозначим через σ поверхность тока $f(x, y, z) = 0$, проходящую через контуры Γ_1 и Г. На этой поверхности

$$u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz = 0 \tag{1.6}$$

Здесь $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности σ.

Если через p_0 обозначить внешнее давление, то тяга сопла в направлении оси x дается соотношением

$$T = \iint_\sigma (p - p_0) \cos nx\, d\sigma \tag{1.7}$$

На распределение давления p по σ при сверхзвуковом течении влияет только область τ, ограниченная поверхностями Σ_1, Σ и σ.

Сформулируем следующую вариационную задачу: по заданной характеристической поверхности Σ_1 найти поверхность тока σ, проходящую через заданные контуры Γ_1 и Г и реализующую экстремум функционала (1.7) при дифференциальной связи (1.6) на σ и дифференциальных связях (1.1), (1.2) в области τ.

2. Необходимые условия экстремума. Обозначим через $c(x, y, z)$, $h_1(x, y, z)$, $h_2(x, y, z)$, $h_3(x, y, z)$ множители Лагранжа. Составим следующее выражение

$$T^\circ = \iint_\sigma [(p - p_0 + cu) \cos nx + cv \cos ny + cw \cos nz]\, d\sigma + \\ + \iiint_\tau (h_1L_1 + h_2L_2 + h_3L_3)\, d\tau \tag{2.1}$$

Потребуем, чтобы это выражение принимало экстремальное значение при варьировании u, v, w и варьировании x, y, z на поверхности σ.

При этом p и ρ будут функциями u, v, w, причем по (1.2)

$$\delta p = -\rho u\,\delta u - \rho v\,\delta v - \rho w\,\delta w, \qquad \delta\rho = -\frac{\rho u}{a^2}\delta u - \frac{\rho v}{a^2}\delta v - \frac{\rho w}{a^2}\delta w \qquad (2.2)$$

Следуя [2], проведем варьирование поверхности и скоростей раздельно. Тогда полная вариация T° будет равна

$$\delta T^\circ = \delta T^\circ_{\mathrm{v=const}} + \delta T^\circ_{\sigma=\mathrm{const}}$$

При вычислении $\delta T^\circ_{\mathrm{v=const}}$ можно рассматривать все три варианта представления функции $f(x, y, z) = 0$ в явном виде. Можно считать $f(x, y, z)$ разрешенной относительно x, при этом y, z будут считаться независимыми.

Величины x_y, x_z будут представлять частные производные от x соответственно по y и z, согласно уравнению $f(x, y, z) = 0$, в предположении, что эта функция определяет зависимость x от y, z.

Далее, символами $\partial c / \partial x$, $\partial c / \partial y$, $\partial c / \partial z$ будем обозначать частные производные от функции c, рассматривая ее на поверхности σ.

В рассматриваемом примере

$$\frac{\partial c}{\partial x} = c_x, \qquad \frac{\partial c}{\partial y} = c_y + c_x x_y, \qquad \frac{\partial c}{\partial z} = c_z + c_x x_z$$

Кроме того, ясно, что

$$0 = f_y + f_x x_y, \qquad 0 = f_z + f_x x_z$$

Итак, пусть аргумент x представляет в явном виде поверхность σ в силу равенства $f(x, y, z) = 0$.

Вычислим $\delta T^\circ_{\mathrm{v=const}}$ при варьировании формы поверхности σ и приравняем $\delta T^\circ_{\mathrm{v=const}}$ нулю:

$$\delta T^\circ_{\mathrm{v=const}} = \delta \iint_\sigma [(p - p_0 + cu)\cos nx + cv\cos ny + cw\cos nz]\, d\sigma =$$

$$= \delta \iint_{\sigma_{yz}} [-(p - p_0 + cu) + cvx_y + cwx_z]\, dydz =$$

$$= \iint_{\sigma_{yz}} \left\{\left[-p_x - (cu)_x + (cv)_x x_y + (cw)_x x_z - \frac{\partial cv}{\partial y} - \frac{\partial cw}{\partial z}\right] \times \right.$$

$$\left. \times\, \delta x + \frac{\partial (cv\delta x)}{\partial y} + \frac{\partial (cw\delta x)}{\partial z}\right\} dydz = 0$$

Здесь через σ_{yz} обозначена проекция поверхности σ на плоскость yz. Воспользовавшись формулой Грина и принимая во внимание, что $\delta x = \delta n \cos nx$, получим

$$\delta T^\circ_{\mathrm{v=const}} = \iint_\sigma - [p_x + (cu)_x + (cv)_y + (cw)_z]\, \delta n \cos^2 nx d\sigma = 0$$

Интеграл от выражения типа дивергенции пропадает, так как границы области интегрирования не варьируются.

На поверхности σ величина $\cos nx$, вообще говоря, не равна нулю.

Поэтому для обращения в нуль $\delta T^{\circ}_{v=\mathrm{const}}$ необходимо потребовать на σ выполнение условия

$$p_x + (cu)_x + (cv)_y + (cw)_z = 0$$

Учитывая равенства (1.1), (1.2), справедливые в объеме τ, уравнение можно переписать в виде

$$-\rho u u_x - \rho v u_y - \rho w u_z + \rho u \left(\frac{c}{\rho}\right)_x + \rho v \left(\frac{c}{\rho}\right)_y + \rho w \left(\frac{c}{\rho}\right)_z =$$

$$= \rho u \left(\frac{c}{\rho} - u\right)_x + \rho v \left(\frac{c}{\rho} - u\right)_y + \rho w \left(\frac{c}{\rho} - u\right)_z = 0 \tag{2.3}$$

Характеристическая система линейного однородного уравнения (2.3) совпадает с дифференциальными уравнениями линии тока (1.4). Вдоль линии тока по формуле (1.5) $\psi = \mathrm{const}$ и $\chi = \mathrm{const}$. Тогда общее решение линейного однородного уравнения (2.3) имеет вид

$$\frac{c}{\rho} - u = \Phi(\psi, \chi), \quad \text{или} \quad c = \rho\,[u + \Phi(\psi, \chi)]$$

Здесь $\Phi(\psi, \chi)$ — произвольная функция от ψ и χ.

На поверхности тока величины ψ и χ связаны. Пусть на σ эта связь задана в виде $\psi = \psi(\chi)$. Тогда переменный множитель c на поверхности σ вычисляется по формуле

$$c = \rho\,\{u + \Phi\,[\psi(\chi), \chi]\} \tag{2.4}$$

Теперь получим выражение для $\delta T^{\circ}_{\sigma=\mathrm{const}}$ и приравняем его нулю

$$\delta T^{\circ}_{\sigma=\mathrm{const}} = \iint_{\sigma} [(\delta p + c\delta u)\cos nx + c\delta v \cos ny + c\delta w \cos nz]\, d\sigma +$$

$$+ \iiint_{\tau} \{h_1\,[(\delta u)_z - (\delta w)_x] + h_2\,[(\delta v)_x - (\delta u)_y] + h_3\,[(\delta \rho u)_x + (\delta \rho v)_y +$$

$$+ (\delta \rho w)_z]\}\, d\tau = 0 \tag{2.5}$$

Обозначим через k нормаль характеристической поверхности первого семейства Σ. На поверхности Σ имеем

$$u \cos kx + v \cos ky + w \cos kz = a \tag{2.6}$$

Используя формулу Гаусса — Остроградского, преобразуем второй интеграл в выражении (2.5) при помощи интегрирования по частям. При этом будем помнить, что на заданной характеристической поверхности Σ вариации функций равны нулю. Тогда с учетом (2.2)

$$\delta T^{\circ}_{\sigma=\mathrm{const}} = \iint_{G} (U_1 \delta u + V_1 \delta v + W_1 \delta w)\, d\sigma + \iint_{\Sigma} (U_2 \delta u + V_2 \delta v + W_2 \delta w)\, d\Sigma +$$

$$+ \iiint_{\tau} (U_3 \delta u + V_3 \delta v + W_3 \delta w)\, d\tau = 0 \tag{2.7}$$

Приравнивая нулю выражения δu, δv и δw, определим множители Лагранжа на поверхностях σ, Σ и в объеме τ.

Из первого интеграла формулы (2.7) с учетом (1.6) получим следующие условия, которые должны выполняться на поверхности σ:

$$
\begin{aligned}
U_1 &\equiv (-\rho u + c + \rho h_3)\cos nx - h_2 \cos ny + h_1 \cos nz = 0\\
V_1 &\equiv (-\rho v + h_2)\cos nx + (c + \rho h_3)\cos ny = 0\\
W_1 &\equiv (-\rho w - h_1)\cos nx + (c + \rho h_3)\cos nz = 0
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Обозначим

$$\lambda_1 = w + \frac{h_1}{\rho}, \qquad \lambda_2 = v - \frac{h_2}{\rho}, \qquad \lambda_3 = u + \Phi + h_3 \tag{2.9}$$

Тогда (2.8), с учетом (1.6), (2.4) и (2.9), можно переписать так:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 \cos nz + \lambda_2 \cos ny + \lambda_3 \cos nx &= 0\\
-\lambda_2 \cos nx + \lambda_3 \cos ny &= 0\\
-\lambda_1 \cos nx + \lambda_3 \cos nz &= 0
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Детерминант Δ однородной системы уравнений (2.10), определяющей величины λ_1, λ_2, λ_3, равен $\Delta = -\cos nx$. На поверхности σ величина $\cos nx$, вообще говоря, не равна нулю, поэтому $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Вспоминая (2.9), получаем, что на поверхности сопла

$$h_1 = -\rho w, \qquad h_2 = \rho v, \qquad h_3 = -\{u + \Phi[\psi(\chi), \chi]\} \tag{2.11}$$

Из второго интеграла выражения (2.7) с учетом (2.6) получим условия, которые должны выполняться на характеристической поверхности Σ

$$
\begin{aligned}
U_2 &\equiv h_3\rho \cos kx - h_2 \cos ky + h_1 \cos kz - h_3\rho u / a = 0\\
V_2 &\equiv h_2 \cos kx + h_3\rho \cos ky - h_3\rho v / a = 0\\
W_2 &\equiv - h_1 \cos kx + h_3\rho \cos kz - h_3 \rho w / a = 0
\end{aligned}
$$

Система однородна. Ее детерминант равен нулю. Следовательно, на Σ достаточно удовлетворить двум условиям

$$
\begin{aligned}
h_2 \cos kx + h_3\rho \cos ky - h_3\rho v / a &= 0\\
- h_1 \cos kx + h_3\rho \cos kz - h_3 \rho w / a &= 0
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Наконец, из третьего интеграла выражения (2.7) получим условия, которые должны выполняться в объеме τ

$$
\begin{aligned}
U_3 &\equiv h_{1z} - h_{2y} + \rho\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)h_{3x} - \rho\frac{uv}{a^2}h_{3y} - \rho\frac{uw}{a^2}h_{3z} = 0\\
V_3 &\equiv h_{2x} - \rho\frac{uv}{a^2}h_{3x} + \rho\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)h_{3y} - \rho\frac{vw}{a^2}h_{3z} = 0\\
W_3 &\equiv -h_{1x} - \rho\frac{uw}{a^2}h_{3x} - \rho\frac{vw}{a^2}h_{3y} + \rho\left(1 - \frac{w^2}{a^2}\right)h_{3z} = 0
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

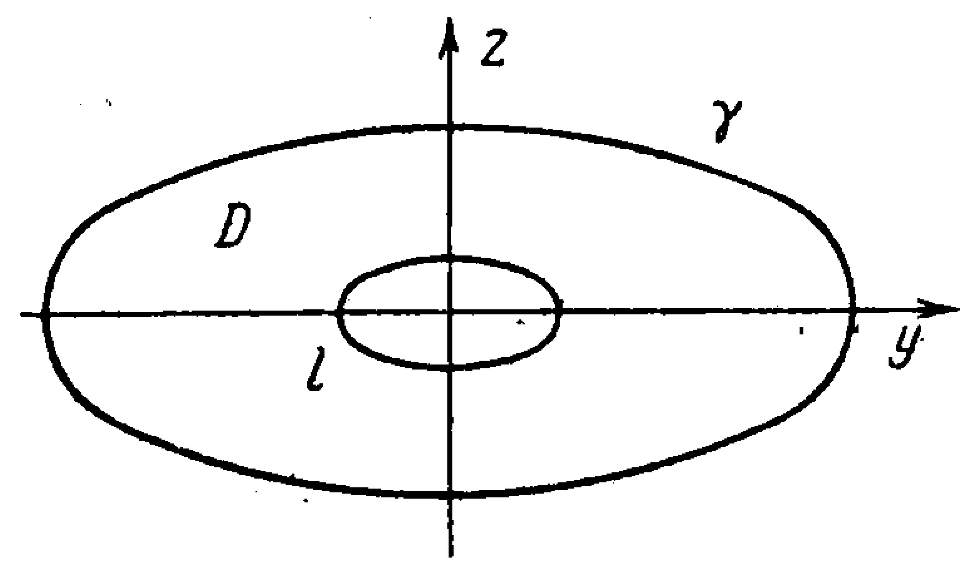
Как показывает анализ, система (2.13) при сверхзвуковом течении имеет гиперболический тип, причем характеристические направления совпадают с характеристическими направлениями уравнений газовой динамики (1.1), (1.2).

...ная задача об определении поверхности сопла σ, об-...альной тягой и проходящей через контуры Γ_1 и Γ, ...й задаче для уравнений в частных производных.

...но, пусть σ — какая-то поверхность, натянутая на Γ_1 и Γ. ...на Σ_1 начальному течению и поверхности σ определим реше...ы (1.1), (1.2) течение в области τ, а также характеристическую ...ть первого семейства Σ. Далее, по известному полю течения и какой-то функции $\Phi\,[\psi(\chi), \chi]$ вычислим значения h_1, h_2, h_3 на поверхности σ по формуле (2.11). Затем, решая задачу Коши для уравнений (2.13) в объеме τ, найдем значения h_1, h_2, h_3 на Σ. Если, кроме того, на Σ выполняются условия (2.12), то поверхность тока σ будет давать решение вариационной задачи.

3. Понижение числа независимых переменных в краевой задаче при $\Phi\,[\psi(\chi), \chi] = \mathrm{const}$. Спроектируем характеристическую поверхность первого семейства Σ, натянутую на контуры Γ и L, на плоскость yz. На фиг. 2 ограниченная двусвязная область D изображает проекцию Σ на плоскость yz. Контуры Γ и L проектируются соответственно в линии γ и l. Теперь перепишем условия, которые выполняются на поверхности Σ, уравнение которой записано в форме $\varphi(y, z) - x = 0$. Обозначим

$$A = a\sqrt{1 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2} \tag{3.1}$$



Фиг. 2.

Тогда два условия экстремальности (2.12) перепишутся в форме

$$\rho v \frac{A}{a^2} = -\frac{h_2}{h_3} + \rho\varphi_y, \qquad \rho w \frac{A}{a^2} = \frac{h_1}{h_3} + \rho\varphi_z \tag{3.2}$$

а условие направлений (2.6) — в форме

$$-u + v\varphi_y + w\varphi_z = A \tag{3.3}$$

Поверхность Σ является характеристической поверхностью системы (2.13). Условие совместности на этой поверхности имеет вид

$$\frac{\partial h_1}{\partial z} - \frac{\partial h_2}{\partial y} + \rho\frac{A}{a^2}\left(v\frac{\partial h_3}{\partial y} + w\frac{\partial h_3}{\partial z}\right) - \rho\varphi_y\frac{\partial h_3}{\partial y} - \rho\varphi_z\frac{\partial h_3}{\partial z} = 0$$

Учитывая (3.2), условие совместности на Σ можно переписать в виде

$$\frac{\partial h_1 h_3}{\partial z} - \frac{\partial h_2 h_3}{\partial y} = 0 \tag{3.4}$$

Положим на поверхности сопла σ функцию $\Phi\,[\psi(\chi), \chi] = c_1 = \mathrm{const}$. Далее рассмотрим выражения для множителей Лагранжа

$$h_1 = -\rho w, \qquad h_2 = \rho v, \qquad h_3 = -(u + c_1) \tag{3.5}$$

Эти выражения обладают замечательным свойством: они удовлетворяют начальным данным Коши (2.11) и, как нетрудно проверить, являются интегралом системы (2.13) в силу соотношений (1.1), (1.2).

Подставляя (3.5) в (3.1) — (3.4), получим следующую ... нений для определения экстремальной характеристическо... сти первого семейства:

$$A = a\sqrt{1 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2} = -u + v\varphi_y + w\varphi_z$$

$$\frac{A}{a^2}\,\frac{\varphi_y}{v} + \frac{1}{u + c_1}, \qquad \frac{A}{a^2} = \frac{\varphi_z}{w} + \frac{1}{u + c_1}, \qquad \frac{\partial v\rho\,(u + c_1)}{\partial y} + \frac{\partial w\rho\,(u + c_1)}{\partial z} = 0$$

Введем вместо неизвестных функций v и w на Σ функции ω и ε по формулам

$$v = \omega\cos\varepsilon, \qquad w = \omega\sin\varepsilon, \qquad v^2 + w^2 = \omega^2$$

Исключая A и учитывая, что $\rho = \rho\,(u^2 + \omega^2)$, $a = a\,(u^2 + \omega^2)$, систему (3.6) можно преобразовать к виду

$$u + c_1 = -\omega\,\frac{a}{\sqrt{u^2 + \omega^2 - a^2}} \tag{3.7}$$

$$\varphi_y = \omega\cos\varepsilon\,\frac{2u + c_1}{\omega^2 - u\,(u + c_1)}, \qquad \varphi_z = \omega\sin\varepsilon\,\frac{2u + c_1}{\omega^2 - u\,(u + c_1)} \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial\cos\varepsilon\,(u + c_1)\,\omega\rho}{\partial y} + \frac{\partial\sin\varepsilon\,(u + c_1)\,\omega\rho}{\partial z} = 0 \tag{3.9}$$

Эта система служит для нахождения функций $u\,(y, z)$, $\varepsilon\,(y, z)$, $\omega\,(y, z)$, $\varphi\,(y, z)$ на Σ. Проведем анализ системы (3.7) — (3.9).

Конечное соотношение (3.7) показывает, что в пространстве годографа скоростей Σ представима осесимметричной поверхностью с осью симметрии u. Таким образом, соотношение (3.7) позволяет считать u на Σ известной функцией ω, т. е. $u = u\,(\omega)$.

При определении Σ необходимо удовлетворить граничным условиям. Во-первых, Σ должна проходить через заданный контур Γ. Это означает, что в плоскости yz задан контур γ и значения φ на нем. Во-вторых, Σ должна проходить через некоторый контур L, принадлежащий заданной характеристической поверхности Σ_1. Это означает, что на некотором контуре l плоскости yz в силу непрерывности течения соотношения (3.7) — (3.9) должны выполняться для заданных значений газодинамических функций. В дальнейшем будем решать обратную задачу: будем выбирать на Σ_1 некоторый контур L, удовлетворяющий соотношениям (3.7) — (3.9), и по уравнениям (3.7) — (3.9) построим поверхность Σ, проходящую через контур L. Затем по заданному на Γ_1 значению $\psi = \psi\,(\chi)$ построим на Σ контур Γ. Контур Γ будет соответствовать выбранному контуру L.

Выберем произвольную точку на Σ_1. Соотношение (3.7) сразу позволяет определить контур L на Σ_1. Тем самым в плоскости yz определится контур l и значения φ на нем. По этим данным можно вычислить производную $d\varphi\,/\,ds$ на l, где s — длина дуги контура l. С другой стороны, соотношения (3.8) определяют φ_y и φ_z^* на l, а следовательно, также и производную $d\varphi\,/\,ds$. Очевидно, что в общем случае значения $d\varphi\,/\,ds$ на l, вычисленные первым и вторым путем, совпадать не будут. Это говорит о неразрешимости задачи.

Однако задача может быть решена, если предположить, что на контуре Γ_1 возможен излом поверхности тока σ.

В этом случае из Γ_1 может выходить бесчисленное множество характеристических поверхностей Σ_{1i}. Каждая Σ_{1i} определяется только заданной поверхностью Σ_1' и произвольно выбранной вдоль Γ_1 функцией $\delta_i(\Gamma_1)$ (пространственный аналог течения Прандтля — Мейера). В качестве функции $\delta_i(\Gamma_1)$ можно взять, например, двугранный угол между касательными плоскостями к поверхностям Σ_1 и Σ_{1i} в точках контура Γ_1. Для произвольно выбранной на Σ_1 точки подберем такую функцию $\delta_i(\Gamma_1)$ и, тем самым, начальную характеристическую поверхность Σ_{1i}, чтобы на построенном контуре l значения $d\varphi / ds$, вычисленные первым и вторым путем, совпадали. Таким образом будет построен нужный контур L и определены начальные условия для решения системы (3.7) — (3.9).

Систему уравнений (3.7) — (3.9) можно привести к системе известного вида.

Введем в рассмотрение новую функцию V_0 по формуле

$$V_0 = \omega \frac{2u + c_1}{\omega^2 - u(u + c_1)} \tag{3.10}$$

Учитывая, что по (3.7) $u = u(\omega)$, соотношение (3.10) можно рассматривать как неявное определение $\omega = \omega(V_0)$. Это позволяет рассматривать в зависимости от V_0 выражение

$$\rho_0(V_0) = \rho \frac{\omega(u + c_1)}{V_0} \tag{3.11}$$

Обозначим

$$u_0 = \varphi_y, \quad v_0 = \varphi_z, \quad x_0 = y, \quad y_0 = z \qquad (V_0^2 = u_0^2 + v_0^2) \tag{3.12}$$

Приравняв накрест продифференцированные выражения (3.8) систему (3.8) — (3.9) можно переписать так:

$$\frac{\partial u_0}{\partial y_0} - \frac{\partial v_0}{\partial x_0} = 0, \qquad \frac{\partial \rho_0 u_0}{\partial x_0} + \frac{\partial \rho_0 v_0}{\partial y_0} = 0 \tag{3.13}$$

Система (3.13) описывает плоские безвихревые «течения» сжимаемой жидкости с «потенциалом» φ, который является формой экстремальной характеристической поверхности Σ. Для продолжения аналогии «скорость звука» для этого «течения» вычисляется по формуле

$$a_0^2 = -V_0\rho_0 / \rho_0'$$

В заключение приношу благодарность Ю. Д. Шмыглевскому за помощь, оказанную при проведении работы.

Поступила 21 V 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики осесимметричных сверхзвуковых течений. ПММ, 1957, т. 21, вып. 2, стр. 195—206.
2. Guderley K. G., Armitage I. V. A General Method for the Determination of Best Supersonic Rocket Nozzles. Paper Presented at the Symposium on Extremal Problems in Aerodynamics. Boeing Scientific Research Laboratories Flight Sciences Laboratory Seattle, Washington, December 3—4, 1962. (русск. перев.: Механика, Сб. перев. и обз. ин. период. лит., Изд. иностр. лит., 1963, № 6).
3. Сиразетдинов Т. К. Оптимальные задачи газодинамики. Изв. высш. учебн. завед., Авиац. техн. 1963, № 2, стр. 11—21.
4. Борисов В. М., Шипилин А. В., О соплах максимальной тяги с произвольными изопериметрическими условиями. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1, стр. 182—183.