

О ВЛИЯНИИ ВЯЗКОСТИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА СТРУКТУРУ СЖИМАЕМЫХ ТЕЧЕНИЙ

О. С. Рыжов, Г. М. Шефтер

(Москва)

Впервые попытку упростить уравнения Навье—Стокса для описания двумерных стационарных околосвуковых течений совершенного¹ газа, по-видимому, сделали Липман, Ашкеназ и Коул (см., например, [1]). Выяснению влияния вязкости и теплопроводности на некоторые течения сжимаемой среды со скоростями, близкими к скорости звука, посвящены работы Стернберга [2], Зичела [3,4], Шанявского [5] и других авторов.

В настоящей работе на базе уравнений Навье—Стокса и основных законов термодинамики выводятся асимптотические уравнения, которым удовлетворяют течения типа «коротких волн» [6,7], распространяющихся в вязком теплопроводящем газе. Получены качественные оценки для размеров зон, в которых влияние диссипативных процессов может быть существенным.

Во второй части работы рассматриваются стационарные околосвуковые течения. Исследуется влияние вязкости и теплопроводности на асимптотическую картину обтекания профилей и тел вращения звуковым на бесконечности потоком. Обнаружено, что в плоском случае решение Ф. И. Франкля [8] для идеального газа правильно описывает околосвуковое течение реального газа вдали от профиля, за исключением самой структуры ударного фронта. При обтекании же тел вращения потоком, имеющим на бесконечности скорость звука, асимптотическая картина течения вязкого теплопроводящего газа качественно отлична от той, которая дается решением уравнений идеального газа [9,10]. Чтобы установить истинную картину течения, в уравнениях движения надо сохранить диссипативные члены.

При описании течений реального газа вязкостью и теплопроводностью часто можно пренебречь, так как коэффициенты вязкости и теплопроводности обычно невелики. Диссипативные процессы играют существенную роль лишь в областях, где происходит резкое изменение параметров потока, например в пограничном слое. Эти же процессы, наряду с нелинейным характером уравнений газовой динамики, определяют структуру ударных волн [11,12]. В газовой динамике часто встречаются задачи, когда довольно резкие изменения параметров потока происходят в узких областях, прилегающих к ударным фронтам. Такие течения называются короткими волнами, их общая теория для идеального газа была развита в работах [6,7].

В коротких волнах градиенты параметров потока могут быть настолько значительными, что становится необходимым учитывать влияние вязкости и теплопроводности. В работе Стернберга [2], посвященной маховскому отражению слабых ударных волн, показано, что между теоретическими и экспериментальными результатами существуют расхождения. Это связано с тем, что теория течения идеальной жидкости в некоторой окрестности тройной точки не будет удовлетворительной, и необходимо принять во внимание диссипативные процессы, происходящие в реальном газе. В этой области происходит расщепление падающей ударной волны в отраженную волну и так называемую «ножку» Маха. Каждая из указанных волн вне переходной области имеет

¹ Термином «совершенный» обозначается газ, подчиняющийся уравнению состояния Клапейрона; название «идеальный» будет относиться к газу, лишенному вязкости и теплопроводности.

квазиодномерную структуру, структура же ударных волн в окрестности тройной точки существенно двумерная, и пренебрегать изменением касательной к фронту составляющей вектора скорости больше нельзя. Такие ударные волны были названы Стернбергом «негюгониевскими». Из законов сохранения следует [2], что ширина слабой негюгониевской ударной волны, по крайней мере, в несколько раз больше ширины ударной волны, для которой выполняются обычные условия на поверхности сильного разрыва. Еще один пример негюгониевской ударной волны, возникающей при взаимодействии слабой ударной волны с пограничным слоем, был исследован Зичелом [3,4].

Задачи, рассмотренные в работах [2-4], представляют собой по существу примеры коротких волн, возникающих в стационарных течениях, где происходят диссипативные процессы.

1. Выведем общие уравнения коротких волн для вязкого теплопроводящего газа. Уравнения неразрывности, Навье — Стокса и энергии в случае двумерных нестационарных движений записываются соответственно в виде [12,13]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{(k-1)\rho v_y}{y} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ 2\lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + \left(\zeta - \frac{2}{3} \lambda \right) \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{(k-1)v_y}{y} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{(k-1)\lambda}{y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (1.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ 2\lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} + \left(\zeta - \frac{2}{3} \lambda \right) \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{(k-1)v_y}{y} \right] \right\} + \frac{2(k-1)\lambda}{y} \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{v_y}{y} \right)$$

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial s}{\partial x} + v_y \frac{\partial s}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{(k-1)\kappa}{y} \frac{\partial T}{\partial y} + 2\lambda \left\{ \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left[\frac{(k-1)v_y}{y} \right]^2 \right\} + \left(\zeta - \frac{2}{3} \lambda \right) \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{(k-1)v_y}{y} \right]^2 \quad (1.2)$$

Здесь t — время, x, y — ортогональные декартовы (для плоскопараллельного течения) или цилиндрические (при симметрии относительно оси x) координаты, v_x, v_y — соответствующие составляющие вектора скорости, ρ — плотность, p — давление, T — температура, s — удельная энтропия, λ, ζ, κ — коэффициенты вязкости, второй вязкости и теплопроводности. Для плоскопараллельного течения коэффициент $k = 1$, для осесимметричного $k = 2$. Часто бывает удобным рассматривать так называемый коэффициент «продольной» вязкости $\mu = \frac{4}{3} \lambda + \zeta$.

Введем удельную энтальпию w , адиабатическую скорость звука a , коэффициент теплового расширения α , термический коэффициент давления β , удельные теплоемкости при постоянном давлении c_p и постоянном объеме c_v и отношение теплоемкостей γ

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s, \quad \alpha = \rho \left(\frac{\partial}{\partial T} \frac{1}{\rho} \right)_p, \quad \beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Согласно уравнению состояния и основному термодинамическому соотношению, для любой двухпараметрической среды имеют место равенства

$$dp = a^2 d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho ds, \quad dw = T ds + \frac{dp}{\rho} \quad (1.3)$$

Если воспользоваться соотношениями между термодинамическими величинами [14]

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T, \quad c_p - c_v = \frac{T p \alpha \beta}{\rho} = \left[\frac{1}{\rho} - \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_T\right] \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho$$

То уравнения (1.3) можно представить в виде [15]

$$dp = a^2 d\rho + \frac{\alpha T p a^2}{c_p} ds, \quad T ds = c_p dT - \frac{\alpha T}{\rho} dp, \quad \alpha T = \frac{(\gamma - 1) c_p}{a^2 \alpha} \quad (1.4)$$

Для совершенного газа, как известно, $\alpha = 1/T$. Уравнения (1.1), (1.2), (1.4) образуют замкнутую систему.

Исключив из уравнений (1.2) и (1.4) удельную энтропию s , получим

$$\begin{aligned} & \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) - \alpha T \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y}\right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{(k-1)\kappa}{y} \frac{\partial T}{\partial y} + 2\lambda \left\{ \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left[\frac{(k-1)v_y}{y}\right]^2 \right\} + \left(\zeta - \frac{2}{3}\lambda\right) \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{(k-1)v_y}{y}\right]^2 \quad (1.5) \end{aligned}$$

$$\gamma dp = a^2 d\rho + \alpha p a^2 dT \quad (1.6)$$

Предположим, что по невозмущенному покоящемуся газу с параметрами $p_0, \rho_0, T_0, a_0, \lambda_0, \zeta_0, \kappa_0, \mu_0, c_p, \gamma_0, \alpha_0$ в направлении оси x распространяется волна, в которой избыточные значения всех величин малы по сравнению с начальными; возмущения давления, плотности, температуры и скорости звука имеют такой же порядок малости, как и продольная составляющая вектора скорости v_x .

Как и в работах [6,7], для вывода приближенных уравнений коротких волн введем подвижную систему координат

$$x = \xi t, \quad y = \eta t, \quad t = t \quad (1.7)$$

и перейдем к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} \xi &= a_0 (1 + \Delta_0 \delta), & \eta &= a_0 \theta_0 \vartheta, & t &= \mu_0 \tau_0 \tau / \rho_0 a_0^2 \\ v_x &= a_0 M_0 u, & v_y &= a_0 N_0 v \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$p = \rho_0 a_0^2 (p_0 / \rho_0 a_0^2 + M_0 P), \quad \rho = \rho_0 (1 + M_0 R)$$

$$T = T_0 (1 + M_0 \Omega), \quad a = a_0 (1 + M_0 A)$$

Здесь $M_0, N_0, \Delta_0, \theta_0, \tau_0$ — характерные значения составляющих скорости, координат и времени, $\delta, \vartheta, \tau, u, v, P, R, \Omega, A$ — величины порядка единицы, а Δ_0, M_0, N_0 малы по сравнению с ней.

Как известно [12], коэффициенты вязкости и теплопроводности обычно имеют одинаковый порядок величины, т. е. их отношения сравнимы по порядку с единицей. Коэффициенты вязкости и теплопроводности отнесем к величине μ_0 , а все остальные параметры — к их значениям в состоянии равновесия. Возмущения всех этих величин будем обозначать штрихами

$$\lambda = \mu_0 (\lambda_0 / \mu_0 + \lambda'), \dots, \quad \alpha = \alpha_0 (1 + \alpha'), \dots \quad (1.9)$$

Здесь $\lambda', \dots, \alpha', \dots$ малы по сравнению с единицей.

Переходя к новым переменным (1.7) — (1.9) и сохраняя только старшие члены, систему уравнений (1.1), (1.5), (1.6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} M_0 \tau \frac{\partial R}{\partial \tau} + \frac{M_0}{\Delta_0} \left(\frac{\partial u}{\partial \delta} - \frac{\partial R}{\partial \delta} \right) + \frac{N_0}{\theta_0} \left[\frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{(k-1)v}{\vartheta} \right] &= 0 \\ M_0 \tau \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{M_0}{\Delta_0} \frac{\partial u}{\partial \delta} + \frac{N_0 M_0}{\theta_0} v \frac{\partial u}{\partial \vartheta} &= - \frac{M_0}{\Delta_0} \frac{\partial P}{\partial \delta} + \frac{M_0}{\tau_0 \Delta_0^2 \tau} \frac{\partial^2 u}{\partial \delta^2} + \\ + \frac{\lambda_0 M_0}{\tau_0 \mu_0 \theta_0^2 \tau} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + \frac{(\zeta_0 + 1/3 \lambda_0) N_0}{\tau_0 \mu_0 \Delta_0 \theta_0 \tau} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \delta \partial \vartheta} + \frac{k-1}{\vartheta} \frac{\partial v}{\partial \delta} \right] + \frac{(k-1) \lambda_0 M_0}{\tau_0 \mu_0 \theta_0^2 \tau \vartheta} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \\ N_0 \tau \frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{N_0}{\Delta_0} \frac{\partial v}{\partial \delta} + \frac{N_0^2}{\theta_0} v \frac{\partial v}{\partial \vartheta} &= - \frac{M_0}{\theta_0} \frac{\partial P}{\partial \vartheta} + \frac{\lambda_0 N_0}{\tau_0 \mu_0 \Delta_0^2 \tau} \frac{\partial^2 v}{\partial \delta^2} + \\ + \frac{(\zeta_0 + 1/3 \lambda_0) M_0}{\tau_0 \mu_0 \Delta_0 \theta_0 \tau} \frac{\partial^2 u}{\partial \delta \partial \vartheta} + \frac{N_0}{\tau_0 \theta_0^2 \tau} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2} + \frac{k-1}{\vartheta} \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta} - \frac{v}{\vartheta} \right) \right] \\ \gamma_0 \left(M_0 \tau \frac{\partial P}{\partial \tau} - \frac{M_0}{\Delta_0} \frac{\partial P}{\partial \delta} + \frac{M_0 N_0}{\theta_0} v \frac{\partial P}{\partial \vartheta} \right) &= M_0 \tau \frac{\partial R}{\partial \tau} - \frac{M_0}{\Delta_0} \frac{\partial R}{\partial \delta} + \frac{M_0 N_0}{\theta_0} v \frac{\partial R}{\partial \vartheta} + \\ + \alpha_0 T_0 \left(M_0 \tau \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} - \frac{M_0}{\Delta_0} \frac{\partial \Omega}{\partial \delta} + \frac{M_0 N_0}{\theta_0} v \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta} \right) & \quad (1.10) \\ \tau \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial P}{\partial \tau} \right) + \left(\frac{M_0}{\Delta_0} u - \delta \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \delta} + \frac{\partial P}{\partial \delta} \right) + \left(\frac{N_0}{\theta_0} v - \vartheta \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial P}{\partial \vartheta} \right) + \\ + \frac{N_0}{M_0 \theta_0} \left[\frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{(k-1)v}{\vartheta} \right] - \frac{1}{\tau_0 \Delta_0^2 \tau} \frac{\partial^2 u}{\partial \delta^2} - \frac{\lambda_0}{\tau_0 \mu_0 \theta_0^2 \tau} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + \frac{k-1}{\vartheta} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right] - \\ - \frac{(\zeta_0 + 1/3 \lambda_0) N_0}{\tau_0 \mu_0 M_0 \Delta_0 \theta_0 \tau} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \delta \partial \vartheta} + \frac{k-1}{\vartheta} \frac{\partial v}{\partial \delta} \right] - \frac{\gamma_0 \gamma'}{\Delta_0} \frac{\partial P}{\partial \delta} + \frac{2M_0 A}{\Delta_0} \frac{\partial R}{\partial \delta} + \\ + \frac{\alpha_0 T_0 \alpha'}{\Delta_0} \frac{\partial \Omega}{\partial \delta} + \frac{2\alpha_0 T_0 M_0 A}{\Delta_0} \frac{\partial \Omega}{\partial \delta} - \frac{\alpha_0 T_0 c_p'}{\Delta_0} \frac{\partial \Omega}{\partial \delta} + \frac{M_0 (\gamma_0 - 1)}{\Delta_0} \Omega \frac{\partial P}{\partial \delta} + \\ + \frac{(\gamma_0 - 1) \alpha'}{\Delta_0} \frac{\partial P}{\partial \delta} - \frac{\kappa_0 \alpha_0 T_0}{\tau_0 \mu_0 \Delta_0^2 c_p \tau} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \delta^2} - \frac{\kappa_0 \alpha_0 T_0}{\tau_0 \mu_0 \theta_0^2 c_p \tau} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \vartheta^2} + \frac{k-1}{\vartheta} \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta} \right] - \\ - \frac{1}{2} \frac{N_0^2 \lambda_0 (\gamma_0 - 1)}{\tau_0 \mu_0 M_0 \Delta_0^2 \alpha_0 T_0 \tau} \left(\frac{\partial v}{\partial \delta} \right)^2 - \frac{N_0^2 (\gamma_0 - 1)}{\tau_0 M_0 \theta_0^2 \alpha_0 T_0 \tau} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)^2 + \left[\frac{(k-1)v}{\vartheta} \right]^2 \right\} - \\ - \frac{2N_0^2 (\gamma_0 - 1) (\zeta_0 - 2/3 \lambda_0) (k-1) v}{\tau_0 \mu_0 M_0 \theta_0^2 \alpha_0 T_0 \tau} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} = 0 \end{aligned}$$

Последнее уравнение системы (1.10) есть результат сложения первых двух уравнений (1.1) с уравнениями (1.5), (1.6) и подстановки в полученное соотношение формул (1.7)—(1.9). Такая процедура связана с тем, что в слабых волнах изменение энтропии, которое обусловлено членами в левой части уравнений (1.2) и (1.5), имеет более высокий порядок малости, чем приращения других параметров. Значит, чтобы из уравнения энергии получить нетривиальное уравнение для возмущений, надо исключить из него величины первого порядка малости, связанные с переносом массы вещества и его импульса.

Как и следовало ожидать, в силу существенного влияния вязкости и теплопроводности ни одна задача не может быть автомодельной, так как время τ входит в коэффициенты всех диссипативных членов уравнений (1.10), и производные по времени в этих уравнениях не могут обратиться в нуль одновременно.

Короткие волны характеризуются тем, что составляющая скорости и производные всех параметров потока в направлении движения волны превышают по величине составляющую скорости и соответствующие производные в поперечном направлении. Таким образом, можно принять [6,7]

$$N_0 \ll M_0, \quad \Delta_0 \ll \theta_0 \quad (1.11)$$

Как и в идеальном газе, будем считать, что выражения

$$\tau \partial R / \partial \tau, \quad \tau \partial u / \partial \tau, \dots \sim 1 \quad (1.12)$$

и поэтому в первых четырех уравнениях системы (1.10) члены, содержащие производные по времени, малы по сравнению с основными членами и их можно опустить. Отметим, что сохранение этих производных соответствует обычной линеаризации уравнений движения вязкого теплопроводящего газа.

Характерное значение времени τ_0 было определено формулами (1.8) как величина, обратно пропорциональная коэффициенту продольной вязкости μ_0 , который обычно пропорционален длине свободного пробега молекул [12]. Длина волны Δ_0 обычно значительно превышает длину свободного пробега молекул. Эти соображения приводят к неравенству

$$1 / \tau_0 \ll \Delta_0 \quad (1.13)$$

Соотношения (1.11) — (1.13) позволяют значительно упростить систему уравнений (1.10), которая после отбрасывания младших членов и интегрирования первого, второго и четвертого уравнений примет вид

$$\begin{aligned} R = u, \quad P = u, \quad \Omega = \frac{\gamma_0 - 1}{\alpha_0 T_0} u, \quad \frac{N_0}{\Delta_0} \frac{\partial v}{\partial \delta} = \frac{M_0}{\theta_0} \frac{\partial u}{\partial \delta} \\ \tau \frac{\partial u}{\partial \tau} + \left[\frac{M_0}{\Delta_0} (u + A) - \delta \right] \frac{\partial u}{\partial \delta} - \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{1}{2} \frac{N_0}{M_0 \theta_0} \left[\frac{\partial v}{\partial \delta} + \frac{(k-1)v}{\vartheta} \right] - \\ - \frac{1}{2\tau_0 \Delta_0^2 \tau} \left[1 + \frac{(\gamma_0 - 1) \kappa_0}{\mu_0 c_{p_0}} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial \delta^2} = 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

При интегрировании дополнительно предполагалось, что волна распространяется по однородной покоящейся среде. В последнем уравнении учтена также зависимость между возмущенными значениями параметров газа, вытекающая из последнего условия (1.4). Первые три соотношения (1.14) аналогичны связям между избыточными значениями параметров газа в акустической волне или в плоском бегущем импульсе малой амплитуды.

Предположим далее для простоты, что $\Delta_0 \sim M_0$. Тогда из последних двух уравнений системы (1.14) можно получить

$$\Delta_0 \sim M_0, \quad \frac{N_0 \theta_0}{M_0^2} \sim 1, \quad \tau_0 M_0^2 \sim 1, \quad \frac{N_0}{M_0 \theta_0} \cong 1 \quad (1.15)$$

Если $\theta_0 \sim 1$, то $N_0 \sim M_0^2$, а $N_0 / M_0 \theta_0 \sim M_0$. Этот случай, относящийся к квазиодномерным течениям, здесь не рассматривается.

Если же $\theta_0 \ll 1$, то из соотношений (1.15) следует

$$\theta_0 \sim \sqrt{M_0}, \quad N_0 \sim M_0 \sqrt{M_0}, \quad \tau_0 \sim 1 / M_0^2 \quad (1.16)$$

Первые два условия (1.16) аналогичны соотношениям между характерными значениями соответствующих величин в теории коротких волн для идеального газа [6,7]. В рассматриваемом приближении

$$A + u = m_0 u, \quad m = \frac{1}{2\rho^3 a^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial (1/\rho)^2} \right)_s$$

Для совершенного газа $m = 1/2 (\gamma + 1)$. Учитывая последнее соотношение и подставляя формулы (1.15) в последние два уравнения (1.14), приходим к уравнениям коротких волн, распространяющихся в вязком теплопроводящем газе

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} = \frac{\partial v}{\partial \delta}, \quad \tau \frac{\partial u}{\partial \tau} + (m_0 u - \delta) \frac{\partial u}{\partial \delta} - \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{(k-1)v}{\vartheta} \right] - \\ - \frac{1}{2\tau} \left(1 + \frac{\gamma_0 - 1}{N_{Pr_0}} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \delta^2} = 0 \quad \left(N_{Pr} = \frac{\mu c_p}{\kappa} = \frac{(4/3\lambda + \zeta) c_p}{\kappa} \right) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Здесь N_{Pr} — число Прандтля. Первое из уравнений (1.17), как и в идеальном газе, выражает условие отсутствия вихрей. Во втором же уравнении дополнительно появляется последний член, учитывающий влияние вязкости и теплопроводности реального газа.

Согласно (1.17), можно ввести потенциал φ (δ , ϑ , τ) для составляющих скорости u и v , который должен удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau \partial \delta} + \left(m_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} - \delta \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \delta^2} - \vartheta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \delta \partial \vartheta} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} + \frac{k-1}{\vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right] - \\ - \frac{1}{2\tau} \left(1 + \frac{\gamma_0 - 1}{N_{Pr_0}} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \delta^3} = 0 \quad \left(u = \frac{\partial \varphi}{\partial \delta}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

В переменных

$$\begin{aligned} \delta^\circ = \delta, \quad \vartheta^\circ = \sqrt{2}\vartheta, \quad \tau^\circ = 2 [1 + (\gamma_0 - 1) / N_{Pr_0}]^{-1} \tau \\ u^\circ = m_0 u, \quad v^\circ = (m_0 / \sqrt{2}) v, \quad \varphi^\circ = m_0 \varphi \end{aligned}$$

уравнения (1.17) и (1.18) принимают соответственно вид (верхние индексы $^\circ$ у переменных в дальнейшем опущены)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} = \frac{\partial v}{\partial \delta}, \quad \tau \frac{\partial u}{\partial \tau} + (u - \delta) \frac{\partial u}{\partial \delta} - \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{(k-1)v}{\vartheta} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial \delta^2} = 0 \\ \tau \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau \partial \delta} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \delta} - \delta \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \delta^2} - \vartheta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \delta \partial \vartheta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} + \frac{k-1}{\vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \delta^3} = 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

При помощи полученных уравнений можно провести асимптотическую оценку размеров зоны, в которой диссипативные процессы играют существенную роль.

При $\tau \rightarrow \infty$ все основные члены уравнения (1.19) должны быть сравнимы по порядку величины.

Отсюда для размеров δ^x и ϑ^x и продолжительности τ^x негюгониевской волны имеем соотношения

$$\delta^x \tau \sim \eta^x \tau \sim \tau^x \sim \text{const}$$

или

$$\delta^x \sim \eta^x \sim \text{const} / \tau, \quad \tau^x \sim \text{const} \quad (1.21)$$

Согласно формулам (1.7) и (1.8)

$$\delta^x = x^x / \tau, \quad \vartheta^x = y^x / \tau \quad (x^x = (x - a_0 t) / a_0)$$

Здесь x^x и y^x представляют собой размеры негюгониевской зоны в физическом пространстве x, y .

Условия (1.21) приводят теперь к важным асимптотическим оценкам

$$x^x \sim y^x \sim \tau^x \sim \text{const} \quad (1.22)$$

Это означает, что размеры и продолжительность негюгониевской волны стремятся к постоянным величинам при больших значениях времени.

Уравнения (1.19) в приложении к задаче о маховском отражении слабой ударной волны от клина или конического острия описывают переходный процесс от момента образования тройной конфигурации до выхода течения на некоторый квазистационарный режим в негюгониевской волне, имеющей асимптотически постоянные размеры и продолжительность. Известные автомодельные решения уравнений коротких волн в идеальном газе [6,7] при $\tau \rightarrow \infty$ описывают всю область потока, за исключением непосредственной окрестности тройной точки. В самой тройной точке в этих уравнениях следует допустить наличие особенности.

В течениях газа со скоростями, близкими к скорости звука, вдали от обтекаемых тел изменение параметров потока происходит достаточно плавно, но как и в коротких волнах, составляющая вектора возмущенной скорости и производные всех параметров среды в направлении набегающего потока значительно превышают по величине составляющую скорости и соответствующие производные в перпендикулярном направлении, иначе говоря, верны условия, аналогичные (1.11) [9]. При этом, как будет показано ниже, при достаточно малых числах Рейнольдса и Пекле диссипативные процессы в реальном газе также могут оказывать существенное влияние на всю картину течения.

2. Рассмотрим задачу об обтекании тела звуковым на бесконечности потоком вязкого теплопроводящего газа. Вывод уравнений двумерного нестационарного околосзвукового течения аналогичен выводу уравнений коротких волн, приведенному в п. 1. В качестве исходной избирается та же система уравнений (1.1), (1.5), (1.6), только параметры потока относятся теперь не к начальным, а к критическим значениям, которые в дальнейшем будут обозначаться звездочкой.

Немного иначе вводятся безразмерные координаты и время

$$x = \frac{\mu_* \Delta_0}{\rho_* a_*} x^\circ, \quad y = \frac{\mu_* \theta_0}{\rho_* a_*} y^\circ, \quad t = \frac{\mu_* t_0}{\rho_* a_*^2} t^\circ \quad (2.1)$$

а также составляющие вектора скорости возмущенного движения

$$v_x = a_* (1 + M_0 u), \quad v_y = a_* N_0 v \quad (2.2)$$

Здесь опять безразмерные параметры $x^\circ, y^\circ, t^\circ, u, v$ сравнимы по порядку величины с единицей, M_0 и N_0 малы, а величины Δ_0, θ_0, t_0 могут

быть велики. Все остальные безразмерные параметры и их возмущения вводятся по аналогии с формулами (1.8), (1.9).

Подставляя новые переменные в уравнения (1.1), (1.5), (1.6), учитывая условия (1.11) и сохраняя старшие члены в полученных соотношениях, по аналогии с п. 1, имеем

$$R = -u, \quad P = -u, \quad \Omega = -\frac{(\gamma_* - 1)}{\alpha_* T_*} u, \quad \frac{N_0}{\Delta_0} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{M_0}{\theta_0} \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{M_0}{t_0} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{M_0^2}{\Delta_0} m_* u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{N_0}{2\theta_0} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{(k-1)v}{y} \right] - \frac{M_0}{2\Delta_0^2} \left(1 + \frac{\gamma_* - 1}{N_{Pr_*}} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.3)$$

Здесь индексы $^{\circ}$ у безразмерных переменных опущены.

Первые три уравнения проинтегрированы в предположении об однородности набегающего потока. Последнее уравнение есть следствие первых двух уравнений (1.1) и уравнений (1.5), (1.6). Как и в п. 1, принято, что характерное время t_0 достаточно велико, чтобы во всех уравнениях (2.3), кроме последнего, можно было опустить производные по времени, иначе получилась бы линеаризованная система уравнений акустики с учетом вязкости и теплопроводности.

Нелинейные уравнения нестационарных околзвуковых течений вязкого теплопроводящего газа получаются из системы (2.3) при условиях

$$\Delta_0 \sim 1 / M_0, \quad \theta_0 \sim 1 / M_0^{3/2}, \quad N_0 \sim M_0^{3/2}, \quad t_0 \sim 1 / M_0^2 \quad (2.4)$$

В новых переменных

$$x' = x, \quad y' = [1 + (\gamma_* - 1) / N_{Pr_*}]^{1/2} y, \quad t' = 1/2 [1 + (\gamma_* - 1) / N_{Pr_*}] t$$

$$u' = 2m_* [1 + (\gamma_* - 1) / N_{Pr_*}]^{-1} u, \quad v' = 2m_* [1 + (\gamma_* - 1) / N_{Pr_*}]^{-3/2} v$$

они имеют вид (штрихи в дальнейшем всюду опускаем)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{(k-1)v}{y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.5)$$

Как и в п. 1, можно показать, что изменение энтропии есть величина более высокого порядка малости, чем возмущения других параметров потока.

Околзвуковое течение, подчиняющееся уравнениям (2.5), является безвихревым. Для потенциала возмущенного течения $\Phi(x, y, t)$ справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{k-1}{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} = 0 \quad \left(u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \quad (2.6)$$

В работах Ф. И. Франкля [8] и Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [12] решается стационарная задача об обтекании звуковым на бесконечности потоком идеального газа профилей, аналогичная задача об обтекании тел вращения; рассмотрена Гудерлеем, Йошихарой и Баришем [9,16,17] и С. В. Фальковичем и И. А. Черновым [10]. В обоих случаях течение вдали от тела описывается автомодельным решением

$$\Phi(x, y) = y^{3n-2} \Phi(\xi) \quad (\xi = x/y^n) \quad (2.7)$$

причем обтеканию конечного тела соответствуют значения $n = 4/5$ для профилей и $n = 4/7$ для тел вращения.

В решении (2.7) при меньших значениях n в обоих случаях возникает предельная линия. Если показатель автомодельности изменяется в пределах $4/5 < n < 1$ для плоского потока и $4/7 < n < 1$ для осесимметричного течения, то получается задача обтекания расширяющегося до бесконечности полутела.

Пример околосзвукового течения идеального газа около полутела вращения вида $Y \sim \sqrt{x}$ дан М. Д. Ладыженским [18], который нашел точное решение уравнения для потенциала $\Phi(\xi)$ в случае $n = 2/3$.

Течения реальных газов можно описывать решениями уравнений движения идеальной сжимаемой жидкости только в том случае, если они являются асимптотическими для уравнений движения реальных газов (1.1), (1.5), (1.6) при малых значениях коэффициентов вязкости и теплопроводности. С этой точки зрения интересно рассмотреть автомодельные решения (2.7).

Если подставить выражение (2.7) в уравнение (2.6), которое для стационарного случая имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{k-1}{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} = 0 \quad (2.8)$$

и устремить в бесконечность y при конечных значениях x , то члены уравнения (2.8) будут убывать как различные степени y

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \dots \sim y^{3n-4}, \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \sim y^{-2} \quad (2.9)$$

Отсюда видно, что при $n > 2/3$ диссипативный член в (2.8) мал по сравнению с остальными членами, и можно пользоваться уравнениями движения идеального газа. Если же $n \leq 2/3$, то последний член в уравнении (2.8) становится сравним по величине с первыми или даже больше их. К такому же результату приводит подстановка выражения (2.7) в исходные уравнения (1.1), (1.5), (1.6).

Для течения (2.7) можно рассмотреть число Рейнольдса N_{Re} и число Пекле N_{Pe} , характеризующие влияние вязкости и теплопроводности

$$N_{Re} = \rho_* U X / \mu_*, \quad N_{Pe} = \rho_* U X / \kappa_* \quad (2.10)$$

где U и X — характерные значения скорости и длины. В стационарной задаче (2.6), (2.7) об асимптотических законах затухания возмущений вдали от обтекаемых тел характерной скоростью является скорость возмущенного движения. Из соотношений (2.6), (2.7) для составляющих скорости U и V вдали от тела вытекает

$$U \sim y^{2(n-1)}, \quad V \sim y^{3(n-1)} \quad (2.11)$$

а характерная длина $X \sim y^n$.

С учетом этих зависимостей справедливы асимптотические оценки

$$N_{Re}, N_{Pe} \sim y^{3n-2} \quad (2.12)$$

При $n > 2/3$ числа Рейнольдса и Пекле велики, и диссипативными процессами можно пренебрегать, но при $n \leq 2/3$ они конечны или даже

малы. Это означает, что даже при достаточно плавном изменении параметров потока необходимо учитывать вязкость и теплопроводность.

Таким образом, решение Ф. И. Франкля плоской задачи [8] околозвукового обтекания конечных тел идеальным газом ($n = 4/5$) может быть использовано в случае реального газа, за исключением описания самой структуры ударного фронта, введенного в это решение Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем [12]. Асимптотическая картина обтекания звуковым на бесконечности потоком газа конечных тел вращения ($n = 4/7$) качественно отлична от той, которая получается в рамках уравнений движения идеального газа, и должна быть установлена на основе решения полного уравнения (2.8).

Важно подчеркнуть также, что, как видно из соотношений (2.11), учет вязкости и теплопроводности при обтекании конечных тел вращения приводит к понижению степени затухания составляющих скорости с расстоянием.

Изменение асимптотической картины обтекания и уменьшение степени затухания возмущений по сравнению с идеальным газом будет происходить и при обтекании полутел вращения, соответствующих значениям в интервале $4/7 < n < 2/3$.

Уравнения (2.5) для стационарных движений принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{(k-1)v}{y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.13)$$

Система уравнений (2.13) допускает автомодельное решение вида (2.7) при единственном значении $n = 2/3$. Для исследования этого случая введем новые переменные

$$u(x, y) = y^{-2/3} f(\xi), \quad v(x, y) = y^{-1} g(\xi) \quad (\xi = x/y^{2/3}) \quad (2.14)$$

Функции $f(\xi)$ и $g(\xi)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} - f \frac{df}{d\xi} - \frac{2}{3} \xi \frac{dg}{d\xi} + (k-2)g = 0, \quad \frac{dg}{d\xi} = -\frac{2}{3}f - \frac{2}{3}\xi \frac{df}{d\xi} \quad (2.15)$$

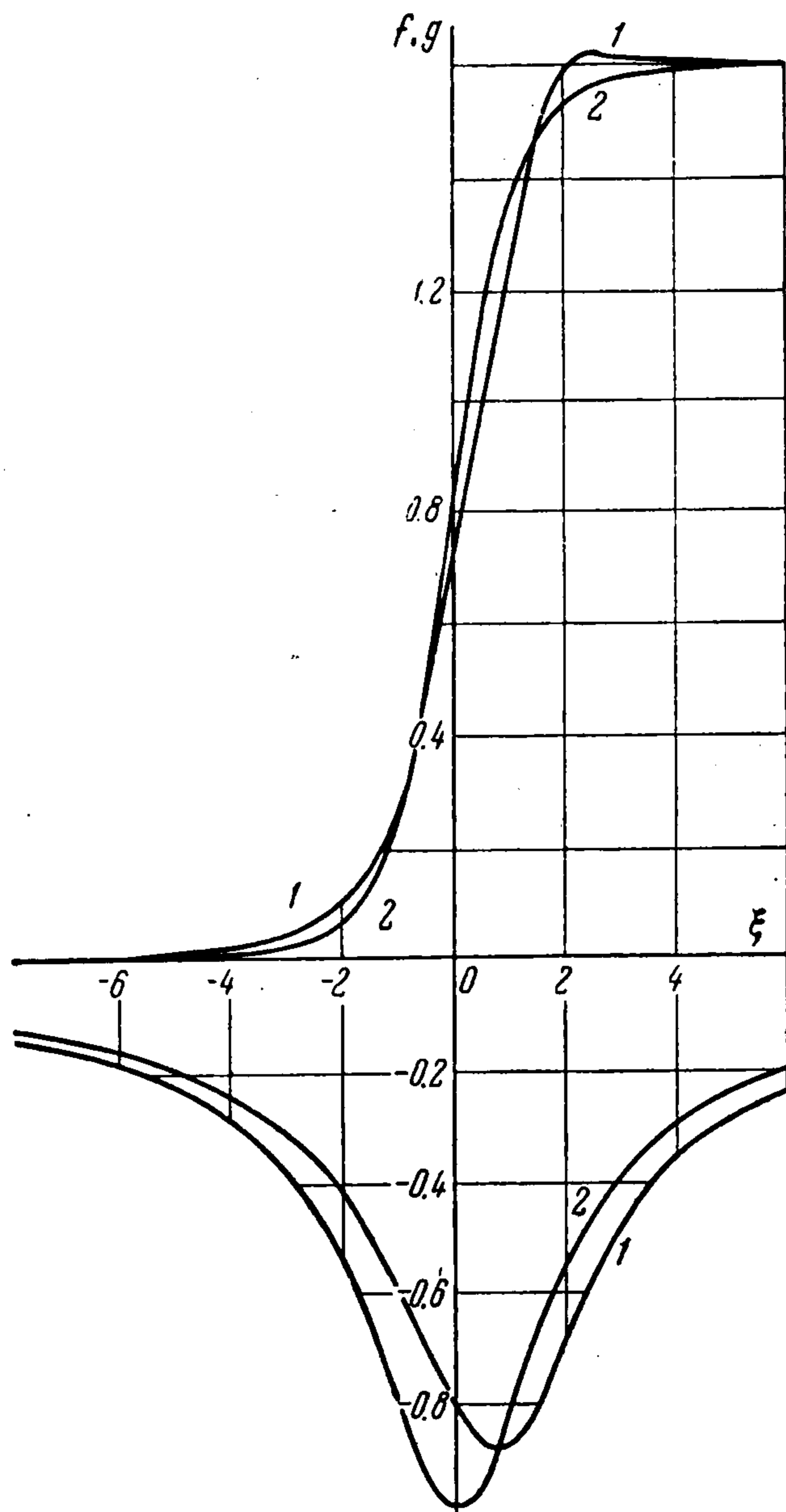
Интегрируя последнее уравнение и подставляя полученное выражение в первое, систему (2.15) можно представить в виде

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \left(\frac{4}{9} \xi^2 - f \right) \frac{df}{d\xi} + \frac{4}{9} \xi f + \frac{2}{3} (k-2) (c - f\xi) = 0, \quad g = \frac{2}{3} (c - f\xi) \quad (2.16)$$

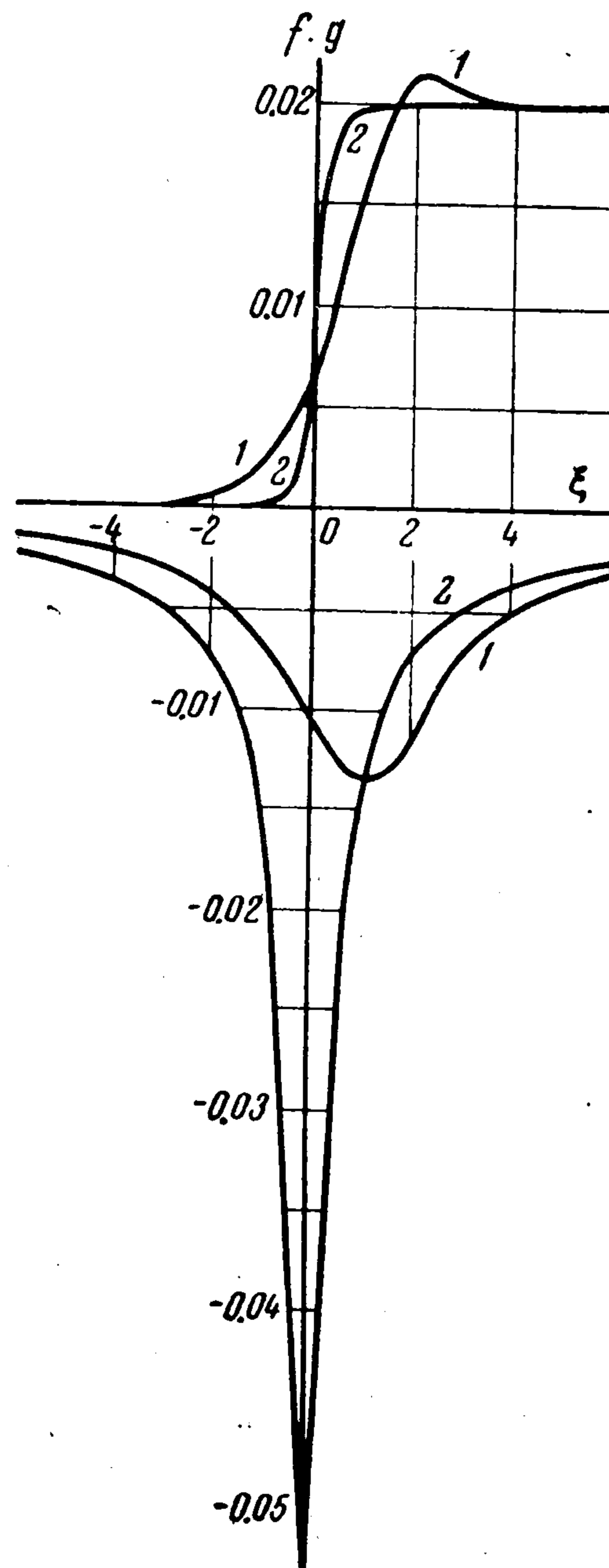
Для решения обыкновенного дифференциального уравнения (2.16) в осесимметричном случае ($k = 2$) были применены численные методы. Результаты интегрирования сравнивались с решением [18] задачи об обтекании полутел вращения звуковым на бесконечности потоком идеального газа. Граничные условия выбирались так, чтобы внешняя граница пограничного слоя при решении уравнения (2.16) совпадала со стенками полутела $Y = Y(x)$ в идеальном газе. Зависимость $Y(x)$ определяется показателем автомодельности $n = 2/3$ и значением постоянной c в (2.16)

$$Y = \sqrt[8/3]{cx}$$

На фиг. 1, 2 соответственно в нижней и верхней полуплоскостях приведены графики зависимости функций f и g от автомодельной переменной ξ . Линии, помеченные индексом 1, соответствуют решениям уравнений (2.16), индексом 2 — результатам работы [18]. При обтекании «толстых» полутел, соответствующих сравнительно большим значениям c ($c = 1.2$; фиг. 1), различия между реальным и идеальным газами невелики, можно только заметить, что пик функции f немного срезается и сдви-



Фиг. 1



Фиг. 2

гается в направлении течения, а в профиле функции g возникает еще пока слабо выраженный максимум. С уменьшением относительной «толщины» полутела ($c = 0.0149$; фиг. 2) эти различия становятся существенными, диссипативные процессы играют все большую роль. Усиление влияния вязкости и теплопроводности при обтекании более тонких полутел связано с тем, что при уменьшении величины c значения чисел Рейнольдса и Пекле (2.10) также убывают. Действительно, из групповых свойств решения (2.14) для идеального газа следует, что функции

$$u = K^2 y^{-2/3} f(K\xi), \quad v = K^3 y^{-1} g(K\xi) \quad (2.17)$$

где K — произвольная постоянная, также представляют собой решение уравнений околзвукowego движения идеального газа. Граничные условия позволяют установить для рассматриваемых полутел связь между постоянными K и c

$$K = (4/3c)^{1/3}$$

Теперь можно найти зависимость между числами Рейнольдса и Пекле и величиной c

$$N_{Re}, N_{Pe} \sim K^2 y^{-2/3} K^{-1} y^{2/3} \sim K \sim c^{1/3} \quad (2.18)$$

Из соотношения (2.18) легко видеть, что чем тоньше полутело (т. е. чем меньше величина c), тем меньше асимптотические значения чисел N_{Re} и N_{Pe} и тем существеннее влияние вязкости и теплопроводности. Как и следовало ожидать, после оценок (2.9), при обтекании полутел вида $Y \sim \sqrt{x}$ (отвечающих показателю автомодельности $n = 2/3$) поправки к решению [18] за счет вязкости и теплопроводности имеют такой же порядок, как и само решение.

Авторы приносят искреннюю благодарность С. А. Христиановичу за постановку и обсуждение рассмотренных задач.

Поступила 20 VII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Hilton W. F. High-speed Aerodynamics. London, New York, Toronto, 1952 (русс. перев.: Хилтон У. Ф. Аэродинамика больших скоростей. Изд. иностр. лит., М., 1955, гл. V, § 5).
2. Sternberg J. Triple-Shock Wave Intersections. Phys. Fluids, 1959, vol. 2, No. 2.
3. Sichel M. Leading Edge of a Shock-Induced Boundary Layer. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 1).
4. Sichel M. Structure on Weak Non-Hugoniot Shocks. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 5.
5. Szaniawsky A. Equations of Transonic Flow of a Heat Conducting Fluid. Arch. Mech. Stosowanej, 1962, vol. 14, No. 6
6. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
7. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
8. Франкль Ф. И. Исследования по теории крыла бесконечного размаха, движущегося со скоростью звука. Докл. АН СССР, 1947, т. 57, № 7.
9. Guderley K. G. Theorie schallnaher Strömungen. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1957 (русс. перев. Гудерлей К. Г. Теория околзвукowych течений. Изд. иностр. лит., М., 1960).
10. Фалькович С. В., Чернов И. А. Обтекание тела вращения звуковым потоком газа. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
11. Зельдович Я. Б. Теория ударных волн и введение в газодинамику. Изд-во АН СССР, М., 1946.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехтеоретиздат, М., 1953.
13. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. Физматгиз, М., 1962.
14. Зоммерфельд А. Термодинамика и статистическая физика. Изд. иностр. лит., М., 1955.
15. Хейз У. Д. Основы теории газодинамических разрывов (в сб. «Основы газовой динамики», под ред. Г. Эммонса, Изд. иностр. лит., М., 1963).
16. Guderley K., Yoshihara H. An Axial-Symmetric Transonic Flow Patterns Quart. Appl. Math., 1951, vol. VIII, No. 4 (русс. перев.: Гудерлей К. и Йосихара Х. Осесимметричные трансзвуковые течения. Сб. «Механика», Изд. иностр. лит., 1953, вып. 2).
17. Varish D. T., Guderley K. G. Asymptotic Forms of Shock Waves in Flows over Symmetrical Bodies at Mach one. J. Aeronaut. Sci. 1953, vol. 20, No. 7.
18. Ладженский М. Д. О некоторых интегралах уравнений околзвукowych течений газа. Инж. ж., 1962, т. 2, № 1.