

## ТОКОВЫЕ ВИХРИ И КРИТИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ В МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПОТОКЕ

Л. М. Алексеева, Л. С. Соловьев

(Москва)

В работе рассматривается стационарное аксиально-симметричное течение идеально проводящей плазмы поперек азимутального магнитного поля. Исследуется возможность появления особых точек (эллиптического, и гиперболического типа) семейства линий тока  $rH_\varphi = \text{const}$ . Рассчитывается форма критических поверхностей, на которых скорость потока  $v$  достигает скорости распространения сигнала

$$c_s = \sqrt{c_T^2 + H_\varphi^2 / 4\pi\rho}$$

Обсуждается устойчивость таких течений.

§ 1. Линии электрического тока. Если скорость жидкости имеет две компоненты  $v_r$  и  $v_z$ , а магнитное поле — только одну компоненту  $H = H_\varphi$ , то при условии аксиальной симметрии задачи уравнения магнитной гидродинамики для изэнтропического [ $S(\xi) = \text{const}$ ] течения сводятся к системе уравнений [1]

$$\frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\rho r^2}{2} \frac{dB^2}{d\xi} = \frac{dU}{d\xi} \quad (1.1)$$

$$W(\rho) = \frac{1}{2} v^2 + \rho r^2 B^2 = U(\xi) \quad (1.2)$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $W$  — энтальпия,  $\xi = \xi(r, z)$  — функция потока, определяющая компоненты скорости

$$v_r = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \xi}{\partial r} \quad (1.3)$$

Произвольные функции  $B(\xi)$  и  $U(\xi)$  зависят только от  $\xi$ . Кроме интеграла Бернулли (1.2), имеем интеграл в замороженности силовых линий магнитного поля

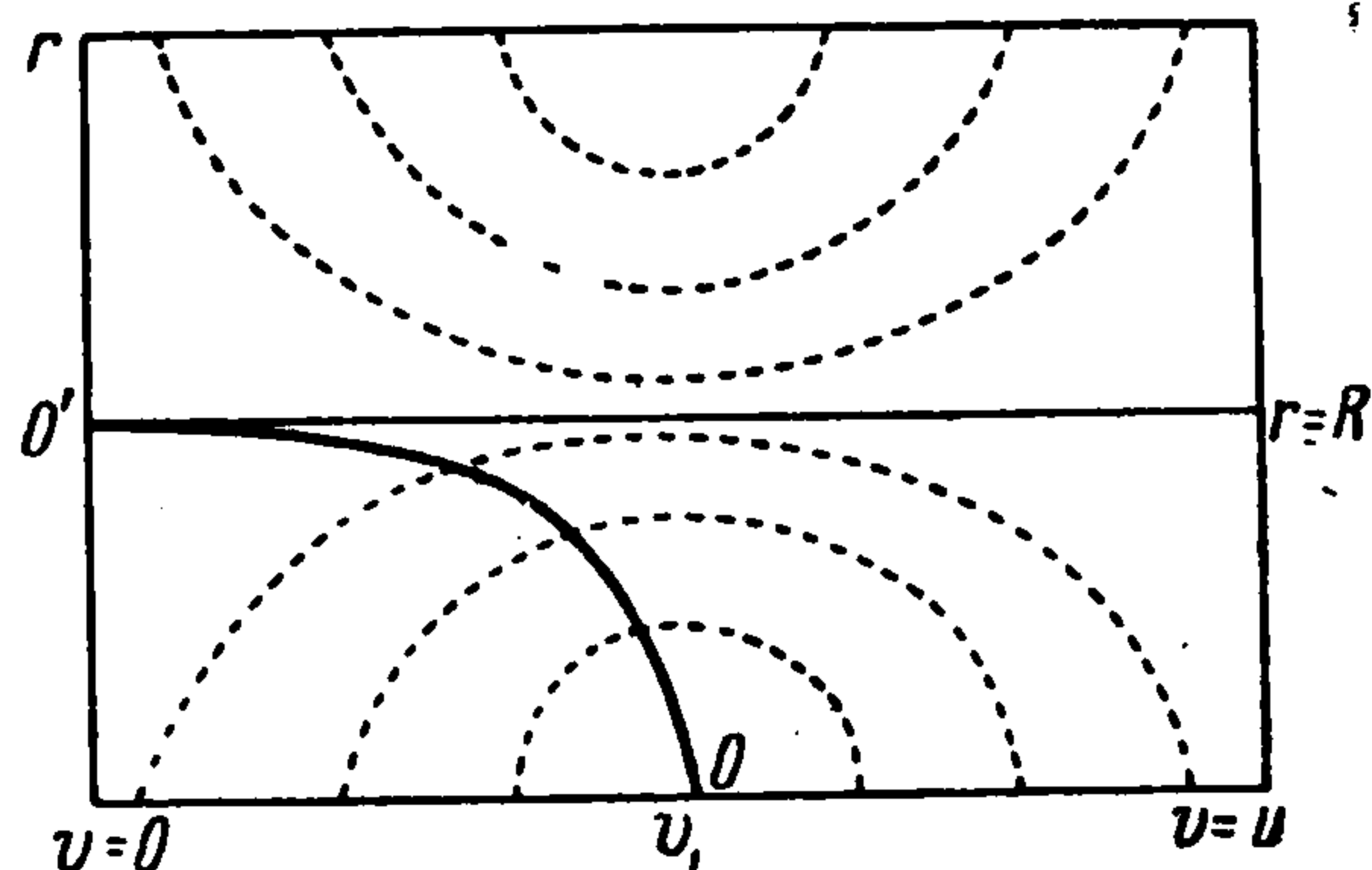
$$I / \rho r^2 = B(\xi) \quad (I \equiv rH_\varphi / \sqrt{4\pi}) \quad (1.4)$$

Линии потока жидкости определяются уравнением  $\xi(r, z) = \text{const}$ , а линии электрического тока — уравнением  $I(r, z) = \text{const}$ .

Рассмотрим течение в пространстве между двумя электродами (фиг. 1). Ускорение плазмы в такой системе происходит как за счет тепловой энергии, так и под действием электродинамических сил. В случае, когда магнитное давление мало по сравнению с газокINETическим, т. е.

$$\beta \equiv 8\pi r H^{-2} \gg 1 \quad (1.5)$$

ускорение происходит в основном за счет тепловой энергии. В этом случае электрический ток подстраивается под течение, которое в первом прибли-



Фиг. 1

жении определяется законами обычной газодинамики, и поэтому может менять свое направление, будучи в одной части течения ускоряющим, а в другой части — тормозящим. Следовательно, при выполнении условия (1.5) можно ожидать появления вихрей тока. К. В. Брушлинским, Н. И. Герлах и А. И. Морозовым, путем численного счета при помощи электронной вычислительной машины, было обнаружено появление приэлектродных вихрей тока: ток, выходящий из одного электрода, возвращался на тот же электрод и не доходил до второго электрода. Ниже это явление рассчитывается аналитически.

Отметим, что обращение в нуль компоненты плотности тока, перпендикулярной линии потока, может быть только в точке, в которой

$$r \frac{dv^2}{ds} - 4\rho W'(\rho) \frac{dr}{ds} = 0 \quad (1.6)$$

Это равенство получается из условия  $j_{\perp} = r^{-1} \partial I / \partial s = 0$ , если продифференцировать (1.2) и (1.4) вдоль линии потока  $r = r(s)$ . Согласно (1.6), при условии ускорения потока  $dv^2 / ds > 0$  ток может образовать петлю только при  $dr / ds > 0$ , т. е. на расширяющейся части электрода.

При расчете течения ограничимся случаем  $U(\xi) = \text{const}$  и будем считать, что магнитное давление мало по сравнению с газовым ( $\beta \gg 1$ ). Кроме того, будем рассматривать течения, медленно изменяющиеся вдоль оси  $z$ . Пренебрегая в (1.1) и (1.2) величинами порядка  $B^2$ ,  $(\partial \xi / \partial z)^2$  и  $\partial^2 \xi / \partial z^2$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \xi}{\partial r} = 0, \quad W(\rho) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 = U \quad (1.7)$$

Интегрирование этих уравнений дает

$$\xi = \frac{\rho V}{2} (r^2 - R^2), \quad W(\rho) + \frac{1}{2} V^2 = U \quad (1.8)$$

Здесь  $V(z)$  и  $R(z)$  — произвольные медленные функции переменной  $z$ , задавая которые, можно определить соответствующие линии потока  $\xi(r, z) = \text{const}$ . Из второго уравнения (1.8) следует, что  $\rho$  также зависит только от  $z$ . Положим  $R = \text{const}$ , требуя тем самым, чтобы среди линий потока была прямая линия  $r = R$ . Картина линий потока изображена на фиг. 1, где по оси  $z$  отложена скорость  $V(z)$ . Линии потока будут эквипотенциалами и любая пара из них может быть принята за электроды. В окрестности плоскостей  $z = z_0$  и  $z = z_M$ , где скорость  $V$  равна нулю и максимальному значению  $\sqrt{2U} \equiv u$ , течение не удовлетворяет критерию медленности, и, следовательно, получаемые таким образом результаты применимы лишь в средней части сопла, где линии потока еще достаточно плавные.

Для определения особой точки семейства линий тока  $I(r, z) = \text{const}$  приравняем нулю производные  $\partial I / \partial r$  и  $\partial I / \partial z$  от  $I = \rho r^2 B(\xi)$ ; получим

$$\frac{\partial I}{\partial r} = \rho r [2B + \rho r^2 V B'] = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial z} = r^2 \left[ \frac{d\rho}{dz} B + \rho \frac{r^2 - R^2}{2} \frac{d(\rho V)}{dz} B' \right] = 0 \quad (1.9)$$

Отсюда видно, что для существования особой точки необходимо  $B' / B < 0$ , и в изомагнитном случае ( $B = \text{const}$ ) особых точек не суще-

ствуется. Исключая из равенств (1.9), величину  $B'(\xi)$  и используя второе уравнение (1.8), продифференцированное по  $z$ , а также соотношение  $\rho W'(\rho) = c_T^2$ , где  $c_T = \sqrt{\gamma p / \rho}$  — скорость звука, получим

$$r^2 = R^2 (1 - V^2 / c_T^2) \quad (1.10)$$

Это уравнение определяет кривую  $OO'$ , изображенную на фиг. 1. На ней обращается в нуль компонента плотности тока  $j_{\perp}$ , перпендикулярная к линии потока. Из (1.11) видно, что эта кривая соединяет точку  $(r = 0, V = c_T)$ , лежащую в наиболее узком сечении сопла, и точку  $(r = R, V = 0)$ . Особые точки семейства линий  $I = \text{const}$  могут лежать только на кривой  $OO'$  и, следовательно, расположены ниже прямой  $r = R$  на линиях потока с  $dr / ds > 0$ .

Для определения типа особой точки вычислим вторые производные от  $I(r, z)$ . Учитывая, что

$$W'' = \frac{\gamma - 2}{\rho} W' = \frac{\gamma - 2}{\rho^2} c_T^2 \quad \left( \begin{array}{l} \gamma \text{ — показатель} \\ \text{адиабаты} \end{array} \right) \quad (1.11)$$

и используя уравнения (1.8) — (1.10), получим

$$\frac{\partial^2 I}{\partial r^2} = -8\rho B + \rho^3 r^4 V^2 B'' \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial r \partial z} = -\frac{\rho r V' B}{V} \left( 1 - \frac{2V^2}{c_T^2} \right) - \frac{\rho^3}{2} r^5 \frac{V^3}{c_T^2} V' B'' \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = -\frac{\rho R^2 V'^2 B}{c_T^2} \left[ 1 + (\gamma + 2) \frac{V^2}{c_T^2} - \frac{2V^4}{c_T^4} \right] + \frac{\rho^3}{4} r^6 \frac{V^4}{c_T^4} V'^2 B'' \quad (1.14)$$

Знак инварианта  $\Sigma = I_{rr} I_{zz} - I_{rz}^2$  определяет тип особой точки. Ограничиваясь далее случаем линейной зависимости  $B(\xi)$ , найдем, что знак  $\Sigma$  совпадает со знаком выражения

$$-1 + 7 \frac{V^2}{c_T^2} + 2(\gamma - 2) \frac{V^4}{c_T^4} \quad (1.15)$$

Отсюда следует, что если особая точка лежит на участке кривой  $OO'$ , расположенном ниже точки

$$r_c = 0.92 R, \quad V_c = 0.22 u \quad (1.16)$$

то она эллиптического типа, если же

она находится выше  $r_c$  — то гиперболическая (фиг. 1).

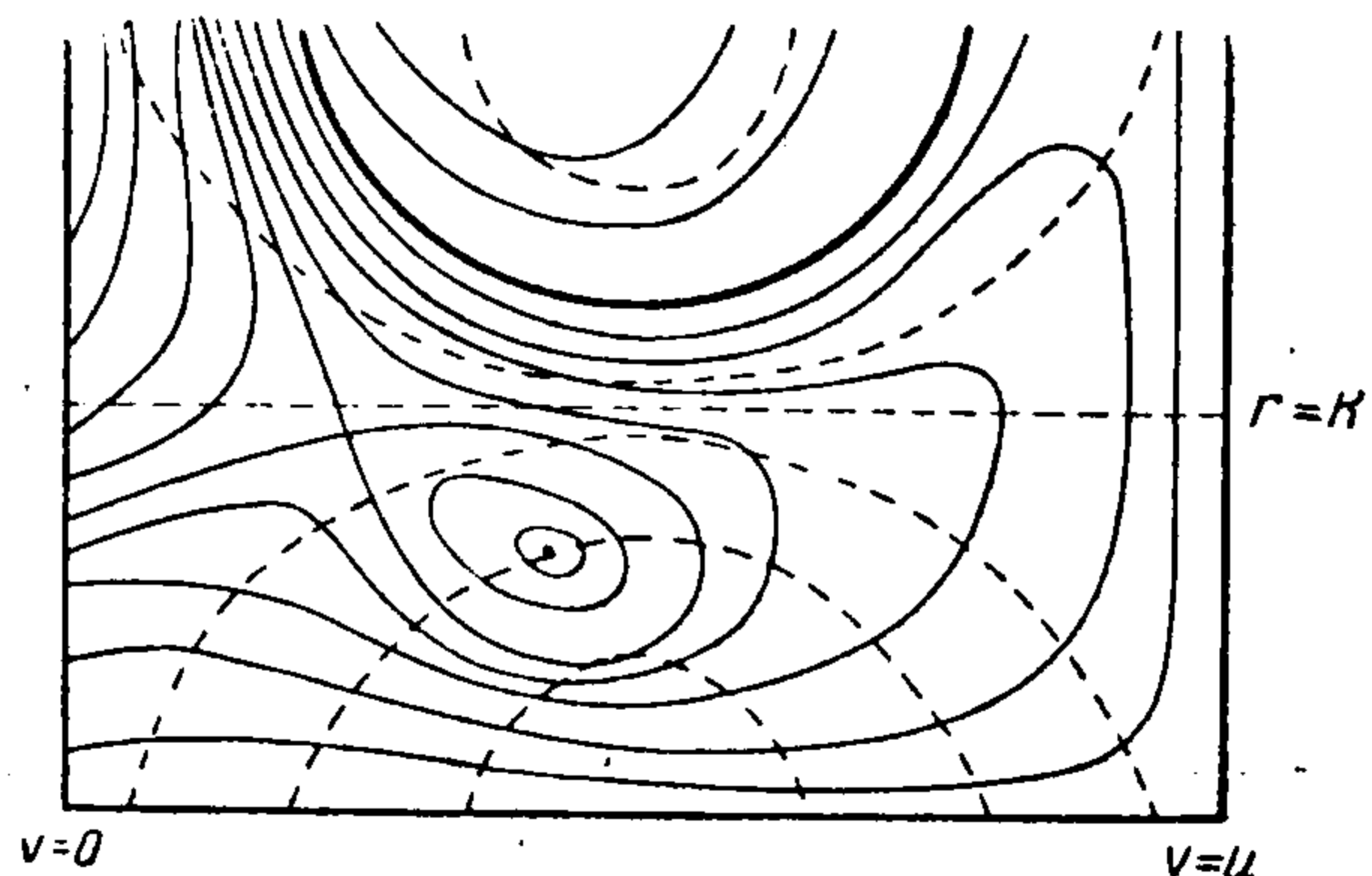
Отметим, что в рассматриваемом случае

$$B = b(\xi + c), \quad I = \rho r^2 b (\xi + c) \quad (1.17)$$

одна из линий потока  $\xi = -c$  будет одновременно и линией тока. На этой линии обращается в нуль магнитное поле  $H_{\phi}$ . Если подставить в (1.17) выражения для  $\rho$  и  $\xi$ , то получим уравнение линий электрического тока

$$V(u^2 - V^2)^{\frac{2}{\gamma-1}} r^2 (r^2 - R^2) + C(u^2 - V^2)^{\frac{1}{\gamma-1}} r^2 = \text{const}$$

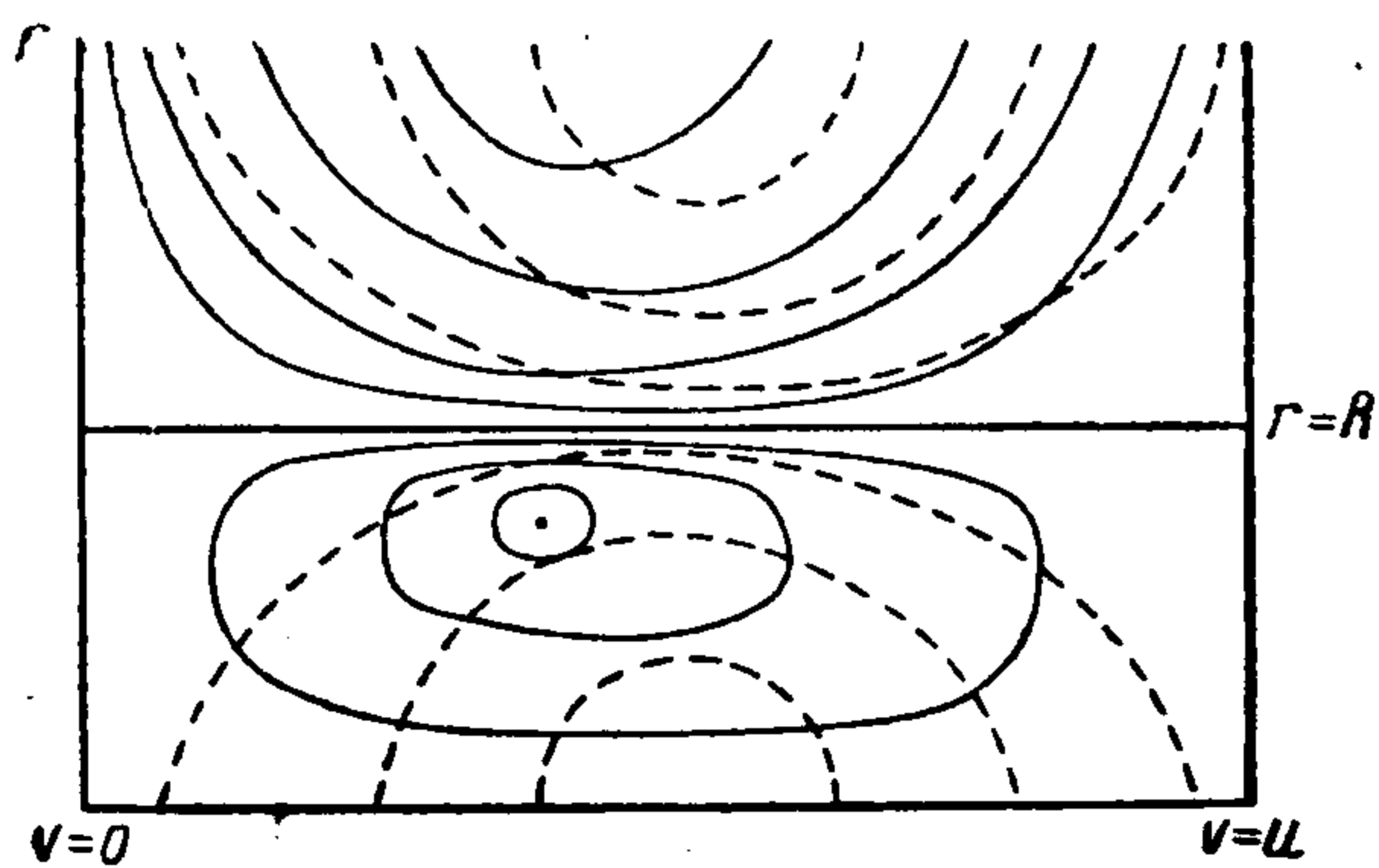
которое можно разрешить относительно  $r^2$ .



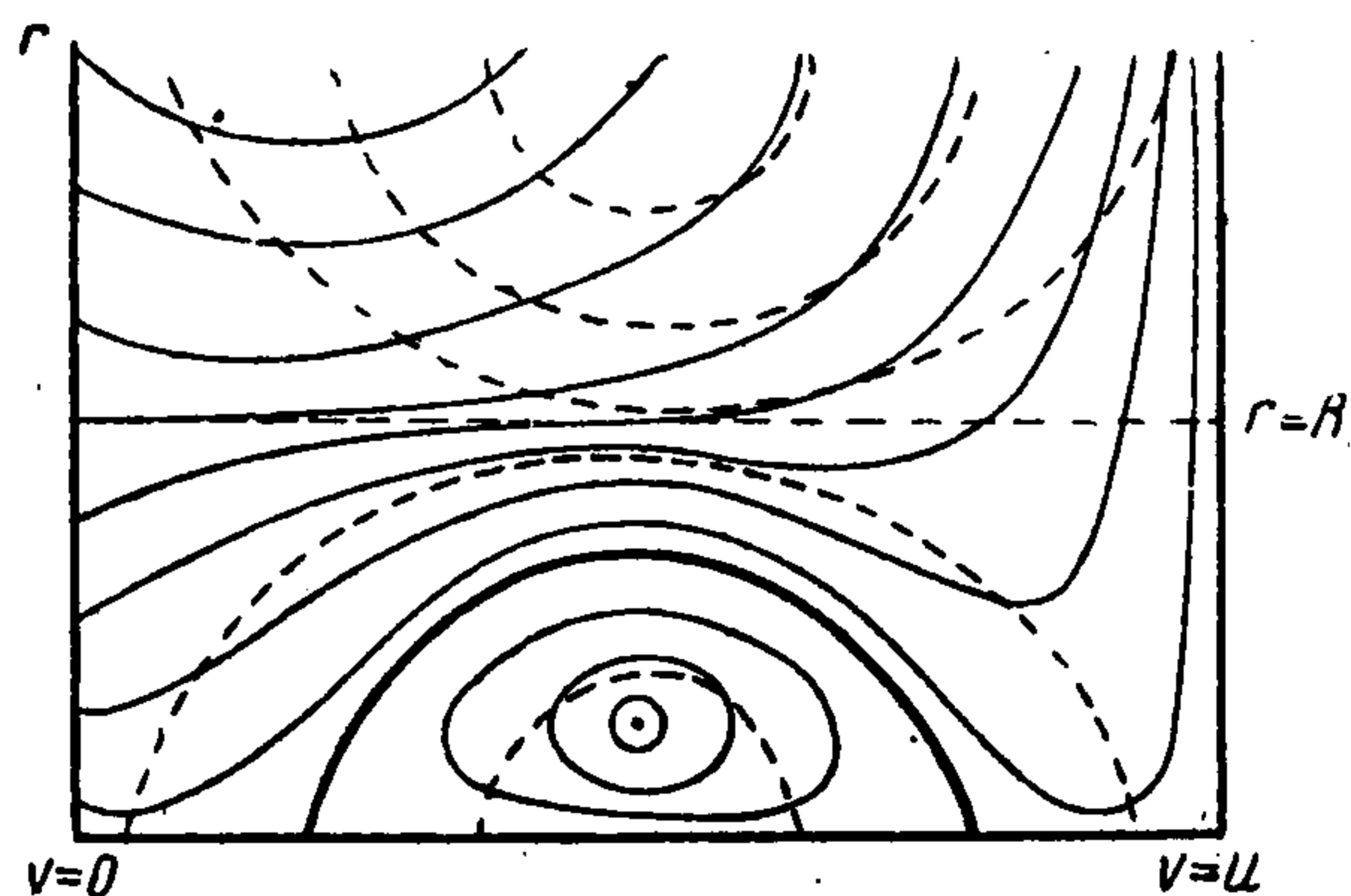
Фиг. 2

При отрицательных значениях  $c$  (фиг. 2) семейство линий тока имеет две особые точки — эллиптическую и гиперболическую. Когда  $c = 0$ , гиперболическая точка сдвигается ко входу в канал (фиг. 3), где  $V = 0$ , а эллиптическая точка лежит при  $r = R/\sqrt{2}$ . При  $c > 0$  остается только особая точка эллиптического типа.

На фиг. 2—4 показаны линии электрического тока для линейной зависимости  $B = b(\xi + c)$ . Пунктиром показаны линии потока жидкости,



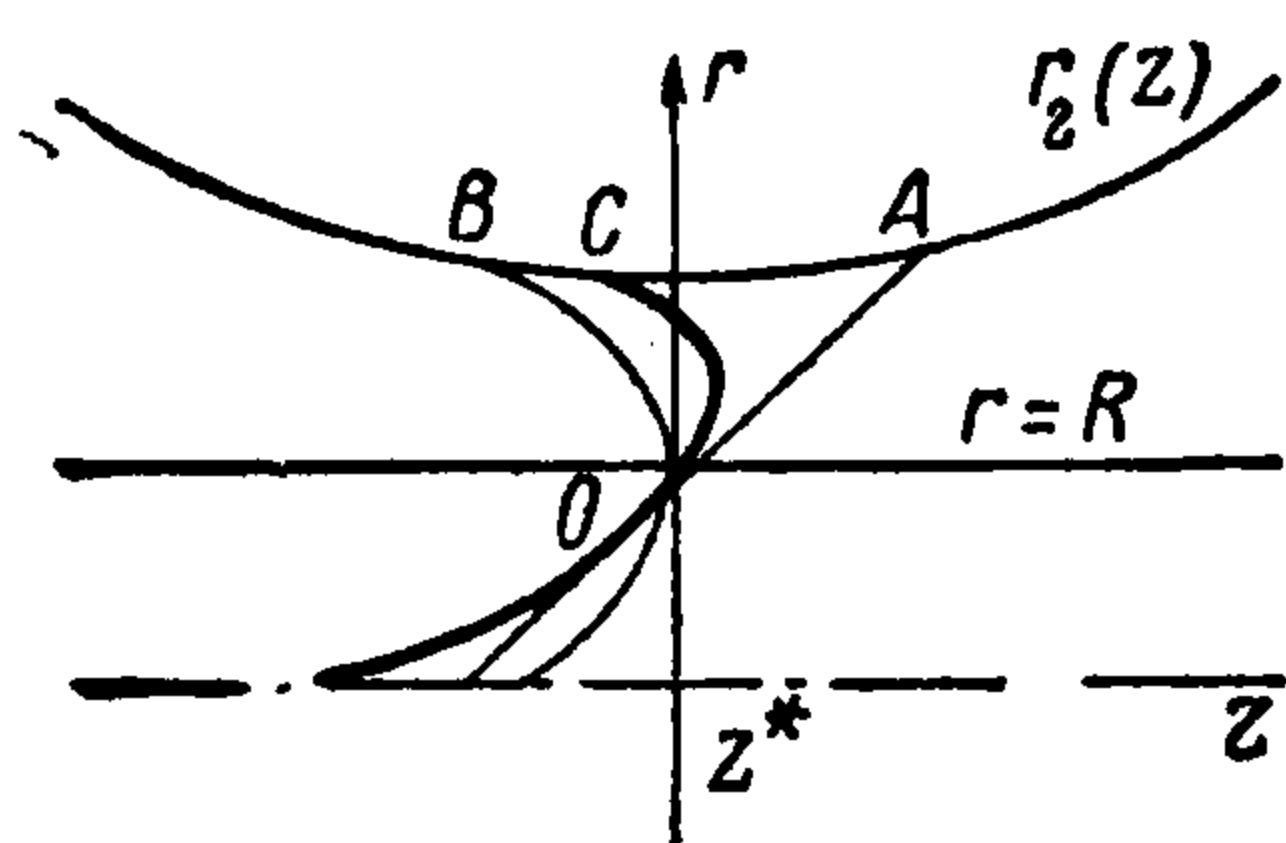
Фиг. 3



Фиг. 4

каждая из которых может быть принята за электрод. Жирными линиями изображены линии потока  $\xi = -c$ , на которых магнитное поле  $H\phi$  меняет знак. Фиг. 2 соответствует  $c < 0$ , здесь имеется как эллиптическая, так и гиперболическая особые точки. Фиг. 3 и 4 соответствуют  $c = 0$  и  $c > 0$ , когда имеются только эллиптические особые точки.

§ 2. Критические поверхности. Течения, медленно изменяющиеся вдоль координаты  $z$ , могут быть полностью рассчитаны в предельных случаях слабого и сильного магнитного поля  $\beta \gg 1$  и  $\beta \ll 1$ .



Фиг. 5

Такой расчет при учете только первых производных по  $z$  был сделан в работе [2,3], где показано, что в каналах соответствующего профиля плазма ускоряется, причем скорость, равная скорости распространения сигнала, достигается в наиболее узкой части канала. Поверхность перехода скорости через скорость сигнала оказалась наклоненной в сторону движения вещества (кривая  $QA$  на фиг. 5).

Однако учет членов основных уравнений (1.1) — (1.2), содержащих  $d^2\xi/dz^2$  и  $(d\xi/dz)^2$ , приводит к отклонению «звуковой поверхности» в противоположную сторону.

Проведем здесь соответствующие вычисления для слабого и сильного магнитного поля, ограничиваясь случаем  $U = \text{const}$  и учитывая в первом приближении непостоянство  $B(\xi)$ .

При  $U(\xi) = \text{const}$  течение описывается уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\rho^2 r^3}{2} \frac{dB^2}{d\xi} = 0, \quad W(\rho) + \frac{v^2}{2} + \rho r^2 B^2 = U \quad (2.1)$$

Здесь компоненты скорости и магнитное поле равны

$$v_z = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \xi}{\partial r}, \quad v_r = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad H_\phi = \sqrt{4\pi} \rho r B \quad (2.2)$$

Как видно из (2.1), при  $B = \text{const}$  течения будут безвихревыми ( $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ ). Ограничиваясь рассмотрением течений, медленно изменяющихся вдоль оси  $z$ , будем искать решение системы (2.1) в виде

$$\xi = \xi_0(\varepsilon z, r) + \xi_1(\varepsilon z, r) + \dots \quad (\xi_1 \sim \varepsilon^2 \ll 1) \quad (2.3)$$

Соответственно,  $v_r \sim \varepsilon$ , а  $v_z = V + v_{1z}$ , где  $v_{1z} \sim \varepsilon^2$ . Кроме того, будем считать, что  $B = B_0 + B'\xi$ , где  $B'\xi \ll B_0$ , и будем учитывать везде только величины первого порядка по  $B'$  и отбрасывать члены, содержащие произведения  $B'$  на все другие малые параметры.

В первом приближении, пренебрегая членами  $\sim \varepsilon^2$  из уравнения (2.1), получим  $V = V(z)$ .

Будем считать далее  $V(z)$  заданной скоростью на электроде  $r = R = \text{const}$ . Решая уравнения (2.1), можно найти с заданной точностью функцию  $\xi(r, z)$  и из условия  $\xi(r, z) = \text{const}$  определить систему электродов, соответствующую заданной скорости  $V(z)$ . Ограничимся здесь лишь определением звуковых поверхностей. Для этого достаточно знать только скорость  $v$ , т. е. найти первый интеграл уравнений (2.1).

В первом приближении

$$\xi_0 = \int_R^r \rho V(z) r dr \quad (2.4)$$

Подставляя это выражение в (2.1), найдем поправку к продольной скорости, пропорциональную  $\varepsilon^2$

$$v_{1z} = - \int_R^r dr' \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\rho r'} \int_R^{r'} \frac{\partial}{\partial z} (\rho V) r dr \right] \quad (2.5)$$

Квадрат радиальной скорости  $v_r$  с нужной точностью определяется дифференцированием (2.4). Чтобы продвинуться дальше, необходимо знать функцию  $\rho(r, z)$ , которая различна для случаев слабого ( $\beta \gg 1$ ) и сильного ( $\beta \ll 1$ ) магнитного поля. В нулевом приближении получим

$$W(\rho) + \frac{V^2}{2} = U, \quad \rho = \rho(z) \quad \text{при } B^2 \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{V^2}{2} + \rho r^2 B^2 = U, \quad \rho r^2 = \frac{U - 1/2 V^2}{B^2} \equiv f(z) \quad \text{при } W \rightarrow 0 \quad (2.7)$$

Подставляя эти выражения в (2.4) и (2.5), найдем для рассматриваемых случаев

$$v_r = -\frac{(\rho V)' r^2 - R^2}{\rho} \frac{1}{2r}, \quad v_{1z} = -\frac{1}{4} \left( \frac{(\rho V)'}{\rho} \right)' \left( r^2 - R^2 - R^2 \ln \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (2.8)$$

$$v_r = -\frac{(fV)'}{f} r \ln \frac{r}{R}, \quad v_{1z} = \frac{1}{4} \left( \frac{(fV)'}{f} \right)' \left( r^2 - R^2 - r^2 \ln \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (2.9)$$

Поверхность перехода скорости через местную скорость распространения сигнала [4]

$$c_s = \sqrt{c_T^2 + c_A^2} \quad (c_A^2 = H_\phi^2 / 4\pi\rho) \quad (2.10)$$

находится из уравнения  $v^2 = c_s^2$ . Согласно (2.2), имеем

$$c_s^2 = c_T^2 + \rho r^2 B^2 \equiv (\gamma - 1) W + \rho r^2 B^2 \quad (2.11)$$

Скорость в нужном приближении определяется выражением

$$v^2 = V^2 + 2Vv_{1z} + v_r^2 \quad (2.12)$$

Обозначая через  $u$  скорость на выходе, где  $\rho \rightarrow 0$  ( $u^2 = 2U$ ), и используя (2.1), представим уравнение звуковой поверхности для случаев слабого и сильного поля соответственно в виде

$$v^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} u^2 + 2 \frac{2 - \gamma}{\gamma + 1} \rho r^2 B^2, \quad v^2 = \frac{u^2}{3} - 2 \frac{2 - \gamma}{3} W(\rho) \quad (2.13)$$

Здесь в обоих выражениях второй член является малым, и в него можно подставлять  $\rho$  из (2.6) или (2.8) соответственно.

В первом приближении по  $\varepsilon$  в предельных случаях  $B^2 \rightarrow 0$  или  $W \rightarrow 0$  звуковая поверхность является плоскостью и определяется уравнениями

$$V^2(z) = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} u^2, \quad V^2(z) = \frac{1}{3} u^2 \quad (2.14)$$

Члены порядка  $B^2$  в первом равенстве (2.13) и порядка  $W$  во втором обуславливают наклон этой поверхности (при  $r > R$ ) в сторону увеличения  $V(z)$ .

Для определения эффекта, связанного с учетом величин  $\sim \varepsilon^2$ , необходимо в левые части равенств (2.13) подставить  $v^2$  из второго равенства (2.1).

Заметим, что, согласно соотношениям (2.6) и (2.7), для случаев  $\beta \gg 1$  и  $\beta \ll 1$  можно записать

$$\frac{(\rho V)'}{\rho} = \left(1 - \frac{V^2}{c_T^2}\right) V', \quad \frac{(fV)'}{f} = \frac{u^2 - 3V^2}{u^2 - V^2} V' \quad (2.15)$$

Эти величины, а следовательно, и радиальные компоненты скорости обращаются в нуль на звуковой поверхности нулевого приближения. Последнее очевидно из того факта, что звуковая поверхность нулевого приближения совпадает с плоскостью минимального сечения сопла.

Для получения полного выражения для скорости учтем также поправку к  $V$ , связанную с переменностью  $B(\xi)$ . Согласно (2.1), эта поправка

$$\delta V = -B_0 B' \int_R^r \rho^2 r^3 dr \quad (2.16)$$

где вместо  $\rho$  в случаях  $\beta \gg 1$  и  $\beta \ll 1$  можно соответственно подставить выражения из (2.6) и (2.7). Таким образом, уравнения звуковых поверхностей примут вид

$$V^2 + \frac{\gamma + 1}{2} V'^2 \left( r^2 - R^2 - R^2 \ln \frac{r^2}{R^2} \right) = c_T^{*2} + 2 \frac{2 - \gamma}{\gamma + 1} \rho r^2 B^2 - \frac{BB' \rho^2 V}{2} (r^4 - R^4) \quad (2.17)$$

$$V^2 - \frac{3}{2} V'^2 \left( r^2 - R^2 - r^2 \ln \frac{r^2}{R^2} \right) = c_A^{*2} - 2 \frac{2 - \gamma}{3} W - \frac{B' c_A^3}{B^3} \ln \frac{r}{R} \quad (2.18)$$

Если ограничиться разложением  $V(z)$  с точностью до линейного члена, то, принимая звуковую поверхность нулевого приближения за плоскость  $z = 0$ , найдем

$$V'_z = \frac{2-\gamma}{\gamma+1} \frac{\rho B^2}{c_T^2} (r^2 - R^2) + \frac{\gamma+1}{4c_T} V'^2 \left( r^2 - R^2 - R^2 \ln \frac{r^2}{R^2} \right) + BB' \rho^2 \frac{r^4 - R^4}{4} \quad (2.19)$$

$$V'_z = -\frac{2-\gamma}{3} \frac{W_R}{c_A} \left[ \left( \frac{R^2}{r^2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] + \frac{3}{4c_A} V'^2 \left( r^2 - R^2 - r^2 \ln \frac{r^2}{R^2} \right) + \frac{B'c_A^2}{2B^3} \ln \frac{r}{R} \quad (2.20)$$

Здесь члены  $\sim V'^2$  как для (2.19), так и для (2.20) дают искривление звуковой поверхности в сторону, противоположную движению вещества ( $z < 0$ ). Действительно, разлагая функции от  $r$  по степеням  $(r - R)$ , получим

$$V'_z = \frac{2-\gamma}{\gamma+1} \frac{2\rho B^2 R}{c_T} (r - R) - \frac{\gamma+1}{2c_T} V'^2 (r - R)^2 + BB' \rho^2 R^3 (r - R) \quad (2.21)$$

$$V'_z = \frac{2-\gamma}{3} \frac{2(\gamma-1)W_R}{c_A R} (r - R) - \frac{3}{2c_A} V'^2 (r - R)^2 + \frac{B'c_A^2}{2B^3 R} (r - R) \quad (2.22)$$

Как показывают уравнения (2.21) и (2.22), влияние членов  $\sim V'^2$  возрастает при удалении от линии потока  $r = R$ . Члены  $\sim B'$  частично компенсируют основные линейные по  $(r - R)$  члены, если  $BB' < 0$ , и усиливают их в случае  $BB' > 0$ .

В обоих случаях как слабого, так и сильного магнитного поля звуковые поверхности имеют вид, схематически показанный на фиг. 5, где линия  $OA$  соответствует пренебрежению членами  $\sim V'^2$ , а линия  $OB$  показывает форму звуковой поверхности для случаев предельно слабого или предельно сильного поля, когда в (2.21) или (2.22) можно пренебречь членами  $\sim B^2$  или  $\sim W$  (а также  $\sim B'$ ). При  $B = 0$  из (2.21) вытекает известное выражение для звуковой поверхности в обычной газодинамике [5].

§ 3. Об устойчивости течений. Ограничиваясь нулевым приближением по параметру медленности  $\varepsilon$ , рассмотрим задачу об устойчивости цилиндрической плазменной струи в магнитном поле, имеющем только азимутальную компоненту  $H = H_\phi$ . В системе координат, движущейся со скоростью жидкости  $V$ , жидкость покоится, и можно применить критерий отсутствия конвективной неустойчивости [6]

$$-\frac{d \ln p}{d \ln r} < \frac{4\gamma}{2 + \gamma\beta} \quad \left( \beta \equiv \frac{8\pi p}{H^2} \right) \quad (3.1)$$

С учетом условия равновесия вдоль радиуса

$$p' = -\frac{H}{4\pi r} (rH)' \quad (3.2)$$

(которое выполняется в первом приближении по  $\varepsilon$ ) критерий (3.1) можно

представить в виде

$$\left(\frac{H^2}{r^2}\right)' + \frac{H^2}{\pi r^3 c_s^2} < 0 \quad \left(c_s^2 \equiv c_T^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho}\right) \quad (3.3)$$

Условие устойчивости (3.3) получено в работе [7]<sup>1</sup> на основе анализа баланса сил, действующих на кольцевую плазменную трубку. Оно будет локальным условием устойчивости для тонких плазменных колец, и при его нарушении кольца смещаются по радиусу. В нашем случае они одновременно сносятся вместе с потоком вдоль оси  $z$ .

Если выполнено условие (3.1), то для отсутствия винтовой неустойчивости требуется еще выполнение критерия [6]

$$\frac{d \ln p}{d \ln r} < \frac{1}{\beta} \quad \text{или} \quad (rH_\phi^2)' < 0 \quad (3.4)$$

При невыполнении неравенства (3.4) развиваются винтовые неустойчивости моды  $m = 1$  с малым шагом винта. Из выражений (3.3) и (3.4) следует, что для устойчивости относительно аксиально-симметричных возмущений, по крайней мере, необходимо, чтобы была отрицательной производная  $(H^2 / r^2)'$ , а для устойчивости возмущений винтового типа требуется отрицательность производной  $(rH^2)'$ .

Оказывается, что в изэнтропическом случае [ $S(\xi) = \text{const}$ ] критерий (3.3) выражается только через интеграл замороженности  $B(\xi) = H / 4\pi\rho r$ . Действительно выражая  $H$  через  $B$ , можно (3.2) и (3.3) представить в виде

$$c_s^2 \rho' = -\rho^2 B (r^2 B)', \quad c_s^2 (\rho B^2)' + 4\rho^3 r B^4 < 0 \quad (3.5)$$

где штрихи обозначают производные по  $r$ . Исключая отсюда  $c_s$ , получим

$$dB^2 / dr < 0 \quad (3.6)$$

Так как  $dB^2 / dr = \rho r V dB^2 / d\xi$ , а  $V > 0$ , то для устойчивости аксиально-симметричных возмущений необходимо  $dB^2 / d\xi < 0$ . В § 1 были рассмотрены течения при линейной зависимости  $B = b(\xi + c)$ . В этом случае

$$H = \sqrt{4\pi} \rho r b \left[ \frac{1}{2} \rho V (r^2 - R^2) + c \right] \quad (3.7)$$

причем при исследовании устойчивости входящие сюда медленные функции  $\rho(z)$  и  $V(z)$  можно считать постоянными. Из условия (3.6) следует, что устойчивой является область  $\xi < -c$ , расположенная на фиг. 2—4 ниже кривой (изображенной жирной линией), на которой  $\xi = -c$ .

Для случая  $c = 0$  (см. фиг. 2) условие (3.6) приводит к требованию  $r < R$ . Критерий (3.4) сужает устойчивую область до интервала  $\frac{3}{7} R^2 < r^2 < R^2$ , так что особая точка линий электрического тока, лежащая при  $r^2 = \frac{1}{2} R^2$ , попадает в устойчивую область.

Аналогично и в случаях  $c \geq 0$  условие (3.6) показывает, что устойчивой будет область  $\xi < -c$  или при  $b > 0$  область отрицательных  $H_\phi$ .

<sup>1</sup> См. также [1], стр. 286.

Координаты  $(r, V)$  особой точки семейства линий тока  $I = \text{const}$  связаны соотношением

$$r_c^2 = \frac{R^2}{2} - \frac{c}{\rho V} \quad (3.8)$$

Это соотношение получается из требования  $\partial I / \partial r = 0$  при условии, что  $B(\xi) = b(\xi + c)$ . Критерий (3.4) в этом случае дает

$$r^2 > \frac{6}{7} \left( \frac{R^2}{2} - \frac{c}{\rho V} \right) \quad (3.9)$$

т. е. особая точка также попадает внутрь устойчивой области. Однако она лежит в непосредственной близости от внутреннего электрода.

Отметим, что в случае слабого магнитного поля  $H \sim rB(\xi)$ , и при  $B = \text{const}$  не выполняются оба критерия устойчивости (3.6) и (3.4). Для сильного магнитного поля случай  $B = \text{const}$  соответствует устойчивости относительно винтовых возмущений, так как  $H \sim 1/r$ . Однако условие (3.6), общее для слабого и сильного полей, при этом не выполнено.

В случае предельно сильного магнитного поля  $\beta^2 \ll 1$  (при  $B \neq \text{const}$ ) для медленно изменяющихся вдоль  $z$  течений существует интеграл [2]

$$\rho r^2 B(\xi) = F(z) \quad (3.10)$$

а линии потока определяются выражением

$$\int_0^{\xi} \frac{B(\xi) d\xi}{\sqrt{U - F(z)B}} = \sqrt{2} F(z) \ln \frac{r}{R} \quad (3.11)$$

Из (3.10) следует, что  $H = \rho r B = r^{-1} F(z)$ , и критерий (3.4) выполняется везде. Исследование (3.11) при  $B = b(\xi + c)$  показывает, что картина линий потока получается похожей на изображенную на фиг. 2—4. Критерий (3.6) также приводит к требованию  $\xi < -c$ , так что устойчивые области лежат ниже соответствующих кривых, где  $H$  меняет знак.

Авторы приносят благодарность А. И. Морозову и К. В. Брушлинскому за дискуссию и ценные советы.

Поступила 25 III 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Соловьев Л. С. Симметричные магнитогидродинамические течения. В кн. «Вопросы теории плазмы», вып. 3, Госатомиздат, М., 1963.
2. Морозов А. И., Соловьев Л. С. О симметричных магнитогидродинамических течениях. Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 3.
3. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Стационарные аксиально-симметричные течения плазмы поперек азимутального магнитного поля. Ж. техн. физ., 1964, т. XXXVI, вып. 3.
4. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. Физматгиз, М., 1962.
5. Кибель И. А., Кочин И. Е., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II. Гостехиздат, М., 1948.
6. Кадомцев Б. Б. Гидромагнитная устойчивость плазмы. В кн. «Вопросы теории плазмы», вып. 2, Госатомиздат, Л., стр. 143—146.
7. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Устойчивость плазмы. Успехи физ. наук, 1961, т. 73, № 4.