Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Т. К. Сиразетдинов

(Казань)

В работе рассматривается вероятностная устойчивость случайных процессов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Доказываются теоремы о вероятностной устойчивости по метрике, аналогичные теоремам второй методы Ляпунова.

Устойчивость решения систем обыкновенных уравнений со случайными параметрами была рассмотрена И. Я. Кацом и Н. Н. Красовским [1].

§ 1. Рассмотрим возмущенные случайные процессы, описываемые системой дифференциальных уравнений с частными производными

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = f_i \left(t, x, y, z, \varphi_s, \frac{\partial \varphi_s}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_s}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_s}{\partial z}, \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial z^2}, u_1, \ldots, u_\alpha \right) \qquad (i, s = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Здесь $\varphi_i = \varphi_i(t, x, y, z)$ — функции, характеризующие состояние процесса, x, y, z — координаты области τ, где протекает процесс, t — время, $u_q = u_q(t)$ $(q = 1, \ldots, \alpha)$ — случайные параметры, причем $\{u_1, \ldots, u_\alpha\} \in U$. При рассмотрении, например, течения жидкости или газа такими параметрами могут быть коэффициент вязкости, плотность набегающего потока и т. п. величины.

Предполагается, что

$$f_i(t, x, y, z, 0, \ldots, 0, u_1, \ldots, u_\alpha) = 0$$

$$\text{при } t \geqslant t_0, \qquad (x, y, z) \in \tau, \quad \{u_1, u_2, \ldots, u_\alpha\} \in U$$

и система (1.1) имеет решение при заданных начальных и граничных условиях и реализации $u_q^p = u_q^p(t)$ $(q = 1, \ldots, \alpha)$. Невозмущенному движению соответствует решение $\varphi_i \equiv 0$, $t \geqslant t_0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Возмущенное движение от невозмущенного отличается другими начальными условиями. Обозначим $\varphi \equiv (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ и $u \equiv (u_1, u_2, \ldots, u_\alpha)$.

Реализации случайного параметра $u^p(t)$ могут терпеть разрыв. Например, при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ имеет место $u^p = U_1$ и при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ $u^p = U_2$ и т. д., где величины $U_1, U_2, \ldots$ такие, что при подстановке их в систему (1.1) последняя имеет решение относительно φ_i $(i = 1, \ldots, n)$. В момент разрыва параметра $u^p(t)$ функции f_i, следовательно, производные $\partial \varphi_i / \partial t$ $(i = 1, \ldots, n)$ терпят разрыв, а решение φ_i $(i = 1, \ldots, n)$ остается непрерывной вектор-функцией. Например, пусть коэффициент вязкости ν некоторой жидкости с определенной вероятностью может принимать два значения ν_1 и ν_2. При переходе в момент времени $t = t_1$ из состояния ν_1 в ν_2 распределения скоростей и давления жидкости остаются непрерывными функциями. Распределения, полученные при $\nu = \nu_1$, в момент времени $t = t_1$ являются начальными условиями для течения жидкости с коэффициентом вязкости $\nu = \nu_2$.

Решением системы (1.1) будем называть случайную вектор-функцию

$$\{\varphi(\varphi_0, u_0, t_0; t, x, y, z),\ u(u_0, t_0; t)\} \equiv \{\varphi, u\}$$

реализации которой удовлетворяют системе уравнений (1.1).

Пусть в каждый момент времени t определены метрики (расстояния) $\rho_0 = \rho_0[\varphi, u, t]$ и $\rho = \rho[\varphi, u, t]$, которые представляют вещественные неотрицательные числа для любого решения системы (1.1) в области τ, причем $\rho_0[0, u, t] \equiv 0$ и $\rho[0, u, t] \equiv 0$.

Метрикой ρ_0 будем характеризовать начальное состояние при $t = t_0$, а метрикой ρ — в произвольный момент времени $t \geqslant t_0$.

Будем рассматривать решения системы (1.1), удовлетворяющие условию $\rho_0 < H_0$ при $t = t_0$, где H_0 — положительная постоянная.

Метрика $\rho = \rho[\varphi, u, t]$ называется непрерывной по метрике $\rho_0 = \rho_0[\varphi, u, t]$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ при $t = t_0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что неравенство $\rho < \varepsilon$ будет выполняться при $\rho_0 < \delta(\varepsilon)$ и $t = t_0$.

В дальнейшем принимается, что метрика $\rho = \rho[\varphi, u, t]$ является непрерывной по метрике $\rho_0 = \rho_0[\varphi, u, t]$ при $t = t_0$.

Но обратное не предполагается, т. е. метрика ρ_0 может не быть непрерывной по метрике ρ. Например,

$$\rho = \left\{\int_\tau \sum_{i=1}^n \varphi_i^2\, d\tau\right\}^{1/2}, \qquad \rho_0 = \left\{\int_\tau \sum_{i=1}^n \left[\varphi_i^2 + \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\right)^2\right] d\tau\right\}^{1/2}$$

В данном случае для заданного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\rho < \varepsilon$, если $\rho_0 < \delta(\varepsilon)$.

Введем некоторый функционал $v = v[\varphi, u, t]$, который для заданной вектор-функции $\{\varphi(t, x, y, z), u(t)\}$ в фиксированный момент времени t устанавливает в соответствие вещественное число.

Будем предполагать, что при $\varphi = 0$ имеет место $v[0, u, t] = 0$. Например, ρ и ρ_0 являются такими функционалами.

Функционал $v = v[\varphi, u, t]$ называется определенно положительным (отрицательным) по метрике ρ, если $v[\varphi, u, t] \geqslant 0$ ($v[\varphi, u, t] \leqslant 0$) при $t \geqslant t_0$, и для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, зависящее только от ε, что неравенство $v[\varphi, u, t] \geqslant \delta(\varepsilon)$ ($v[\varphi, u, t] \leqslant -\delta(\varepsilon)$) выполняется при $\rho \geqslant \varepsilon$ и $t \geqslant t_0$.

Определенная положительность функционала зависит от граничных условий, наложенных на $\varphi(t, x, y, z)$. Например, функционал

$$v_1 = \int_a^b \left(\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi^2\right) dx$$

легко представить в виде

$$v_1 = \frac{1}{2}\,[\varphi^2(b) - \varphi^2(a)] + \int_a^b \varphi^2\,dx$$

Если $\varphi(a) = 0$, то функционал v_1 является определенно-положительным по метрике

$$\rho = \left\{\int_a^b \varphi^2\,dx\right\}^{1/2}$$

Если же $\varphi(a)$ может принимать произвольные значения, то v_1 не будет определенно-положительным.

Функционал $v = v[\varphi, u, t]$ называется непрерывным по метрике $\rho_0 = \rho_0[\varphi, u, t]$ при $t = t_0$, если для сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что оценка $|v| < \varepsilon$ выполняется при $\rho_0 < \delta(\varepsilon)$ и $t = t_0$.

Для фиксированного момента времени t функционал $v = v[\varphi, u, t]$ принимает случайные числовые значения.

Математическое ожидание функционала v в момент времени $t \geqslant t_0$ при условии, что $\{\varphi, u\}$ представляет решение системы (1.1), порожденное начальным распределением

$$\{\varphi_0 = \varphi(t_0, x, y, z),\ \ u_0 = u^p(t_0)\}$$

обозначим

$$M_t[v] = M\,[v[\varphi, u, t];\ \varphi, u, t/\varphi_0, u_0, t_0]$$

Кроме того, введем обозначения

$$M_t\,[v < \varepsilon] = \int_{V<\varepsilon} V dF(V), \qquad M_t\,[v \geqslant \varepsilon] = \int_{V\geqslant\varepsilon} V dF(V)$$

где $F(V) = p(v < V)$ — функция распределения вероятностей случайной величины v, так что будем иметь

$$M_t\,[v] = M_t\,[v < \varepsilon] + M_t\,[v \geqslant \varepsilon]$$

Здесь $u_0 = u^p(t_0)$ — конкретная реализация $u(t)$ в момент времени $t = t_0$, и при этом функционал v принимает конкретное числовое значение $v_0 = v[\varphi_0, u_0, t_0]$, поэтому

$$M_{t_0}\,[v] = M\,[v\,[\varphi_0, u_0, t_0];\ \varphi_0, u_0, t_0\,/\,\varphi_0, u_0, t_0] = v\,[\varphi_0, u_0, t_0]$$

Введем определение устойчивости.

Невозмущенный процесс $\varphi \equiv 0$ называется вероятностно устойчивым по метрикам ρ и ρ_0, если для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$ и $p\,(0 < p < 1)$ можно указать число $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ такое, что для всякого решения системы (1.1), которое в начальный момент времени $t = t_0$ удовлетворяет неравенству $\rho_0 < \delta(\varepsilon, p)$, будет при всех $t \geqslant t_0$ выполняться неравенство $p_t(\rho < \varepsilon) > 1 - p$.

Здесь $p_t(\rho < \varepsilon)$ — вероятность того, что в момент времени t выполняется неравенство $\rho < \varepsilon$.

Если имеет место вероятностная устойчивость по метрикам ρ и ρ_0 и, кроме того, при любом $\gamma > 0$ выполняется условие

$$\lim p_t (\rho < \gamma) = 1 \quad \text{при } t \to \infty$$

для всех решений с начальными условиями, удовлетворяющими неравенству

$$\rho_0 < H_1 \tag{1.2}$$

где H_1 — положительная постоянная, то этот невозмущенный процесс $\varphi \equiv 0$ называется вероятностно асимптотически устойчивым по метрикам ρ и ρ_0, и область (1.2) лежит в области притяжения невозмущенного движения.

Таким образом, при вероятностно асимптотической устойчивости процесса вероятность того, что ρ сколь угодно близко к нулю, равняется единице при $t \to \infty$.

§ 2. Ниже докажем теоремы, аналогичные теоремам об устойчивости второй методы Ляпунова.

Теорема 2.1. Для вероятностной устойчивости по метрикам ρ и ρ_0 процесса $\varphi \equiv 0$ достаточно, чтобы существовал определенно-положительный по метрике ρ и непрерывный по метрике ρ_0 при $t = t_0$ функционал $v = v\,[\varphi, u, t]$ и чтобы математическое ожидание $M_t\,[v]$ этого функционала v в силу системы (1.1) было не возрастающим по времени t.

Доказательство. Пусть заранее заданы два положительных числа ε и p $(0 < p < 1)$. Так как функционал v — определенно-положительный по метрике ρ, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon)$, что $v \geqslant \varepsilon_1(\varepsilon)$ при любом значении $\rho \geqslant \varepsilon$ для любого $t \geqslant t_0$ или, если $v < \varepsilon_1(\varepsilon)$, то $\rho < \varepsilon$. Выберем число $\delta > 0$ следующим образом.

а) Метрика ρ непрерывна по метрике ρ_0 в момент времени $t = t_0$, т. е. для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, что неравенство $\rho < \varepsilon$ выполняется, если ρ_0 удовлетворяет условию $\rho_0 < \delta_1(\varepsilon)$ в момент времени $t = t_0$.

б) Функционал v непрерывен по ρ_0 в момент времени $t = t_0$, т. е. для любого заданного $\varepsilon_2 > 0$ найдется такое число $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon_2) > 0$, что оценка $v < \varepsilon_2$ выполняется, если ρ_0 удовлетворяет условию $\rho_0 < \delta_2(\varepsilon_2)$ в момент времени $t = t_0$.

Число ε_2 выберем равным $\varepsilon_2 = p\varepsilon_1(\varepsilon) = \varepsilon_2(\varepsilon, p)$. Пусть $\delta = \delta(\varepsilon, p) = \min(\delta_1, \delta_2)$. Таким образом, для заданных $\varepsilon > 0$ и $p > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$, что неравенства $v < \varepsilon_2(\varepsilon, p)$ и $\rho < \varepsilon$ выполняются в начальный момент времени $t = t_0$ при всяком $\rho_0 < \delta(\varepsilon, p)$.

Убедимся, что если для заданных ε и p определить величину $\delta = \delta(\varepsilon, p)$ вышеописанным способом и в начальный момент времени $t = t_0$ решение $\{\varphi, u\}$ системы (1.1) удовлетворяет условию $\rho_0 < \delta(\varepsilon, p)$, то в любой момент времени $t \geqslant t_0$ выполняется неравенство $p_t(\rho < \varepsilon) > 1 - p$. Но если $v < \varepsilon_1(\varepsilon)$, то $\rho < \varepsilon$. Следовательно, вероятность того, что $\rho < \varepsilon$ не меньше вероятности $p_t(v < \varepsilon_1)$, т. е.

$$p_t(v < \varepsilon_1) \leqslant p_t(\rho < \varepsilon)$$

Поэтому для установления вероятностной устойчивости достаточно проверить

$$p_t(v < \varepsilon_1) > 1 - p \qquad \text{при } t \geqslant t_0$$

Пусть начальные условия удовлетворяют неравенству $\rho_0 < \delta(\varepsilon, p)$, следовательно, $v < \varepsilon_2$ при $t = t_0$. Математическое ожидание функционала v — невозрастающая переменная, поэтому

$$M_t\,[v] \leqslant M_{t_0}\,[v] = v|_{t_0} \leqslant \varepsilon_2(\varepsilon, p) = p\,\varepsilon_1(\varepsilon) \tag{2.1}$$

Допустим, что при $t = T$ имеем $p_T(v < \varepsilon_1) \leqslant 1 - p$; тогда $p_1 = p_T(v \geqslant \varepsilon_1)$ — вероятность выхода реализации из области $v < \varepsilon_1$ в момент времени $t = T$ — больше или равняется p, т. е. $p_1 \geqslant p$.

Учитывая неравенства $M_T[v < \varepsilon_1] \geqslant 0$ и $M_T[v \geqslant \varepsilon_1] \geqslant \varepsilon_1 p$, получим оценку

$$M_T[v] = M_T[v < \varepsilon_1] + M_T[v \geqslant \varepsilon_1] \geqslant M_T[v \geqslant \varepsilon_1] \geqslant \varepsilon_1 p_1 \geqslant p\varepsilon_1(\varepsilon) = \varepsilon_2 \qquad (2.2)$$

что противоречит (2.1) — условию невозрастания математического ожидания. Следовательно, должно быть $p_t(v < \varepsilon_1) > 1 - p$ и $p_t(\rho < \varepsilon) > 1 - p$ при $t \geqslant t_0$. Теорема доказана.

Теорема 2. 2. **Для вероятностно асимптотической устойчивости по метрикам ρ и ρ_0 процесса $\varphi \equiv 0$ достаточно, чтобы существовал непрерывный по метрике ρ_0 при $t = t_0$ и определенно положительный по метрике ρ функционал $v = v[\varphi, u, t]$, математическое ожидание которого было не возрастающим по времени в силу системы (1.1) и $\lim M_t[v] = 0$ при $t \to \infty$.**

Доказательство. Условия теоремы 2.1 выполняются, следовательно, решение $\varphi \equiv 0$ вероятностно устойчиво по метрикам ρ и ρ_0. Убедимся в вероятностно асимптотической устойчивости решения $\varphi \equiv 0$. Для этого дополнительно к вероятностной устойчивости нужно проверить равенство $\lim p_t(\rho < \gamma) = 1$, при $t \to \infty$, где γ — любое сколь угодно малое положительное число.

Введем функцию распределения вероятностей случайной величины v:

$$F(V) = p_t(v < V)$$

для рассматриваемого момента времени t.

Учитывая, что v может принимать только положительные значения, математическое ожидание $M_t[v]$ представим в виде

$$M_t[v] = \int_0^\infty [1 - F(V)]\, dV .$$

Здесь подынтегральная функция неотрицательная и невозрастающая. Согласно условиям теоремы, имеет место

$$\lim_{t\to\infty} M_t[v] = \lim_{t\to\infty} \int_0^\infty [1 - F(V)]\, dV = 0 .$$

Отсюда следует, что почти всюду

$$\lim [1 - F(V)] = 0 \quad \text{или} \quad \lim F(V) = \lim p_t(v \leqslant V) = 1 \quad \text{при } t \to \infty$$

Функционал v определенно положительный, т. е. для любого положительного числа γ существует другое положительное число $\delta(\gamma)$ такое, что при $\rho \geqslant \gamma$ имеет место $v \geqslant \delta(\gamma)$. Поэтому $p_t(v < \delta(\gamma)) \leqslant p_t(\rho < \gamma)$. Но $\lim p_t(v < \delta(\gamma)) = 1$ при $t \to \infty$. Таким образом, для любого положительного числа γ будем иметь $\lim p_t(\rho < \gamma) = 1$ при $t \to \infty$, т. е. процесс $\varphi \equiv 0$ обладает вероятностной асимптотической устойчивостью.

Замечание. Отметим, что при доказательстве теорем 2.1 и 2.2 конкретный вид уравнений (1.1) не использован. Поэтому теоремы 2.1 и 2.2 применимы и для процессов, описываемых уравнениями, отличными от (1.1), например, уравнениями движения жидкости

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j}, \qquad \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

где не все уравнения содержат производные по времени t (v_i — компоненты скорости, ρ — плотность, p — давление, x_j — координаты).

§ 3. В этом параграфе будем рассматривать случайные процессы $u(t, x, y, z)$, которые представляют собой однородные марковские процессы с конечным числом или бесконечным числом состояний. Предел

$$\frac{dM_t[v]}{dt} = \lim_{t\to t_1+0} \frac{M[v[\varphi, u, t]; \varphi, u, t / \varphi_1, u_1, t_1] - v[\varphi_1, u_1, t_1]}{t - t_1} \tag{3.1}$$

будем называть осредненной производной функционала v в силу системы (1.1) в точке $\varphi|_{t=t_1} = \varphi_1$, $u|_{t=t_1} = u_1$, $t = t_1$.

В случае функционалов

$$v = v[\varphi, u, t] = \int\limits_\tau w(\varphi, u, t)\, d\tau \tag{3.2}$$

где $w = w(\varphi, u, t)$ — некоторая функция от φ, u, t, осредненную производную можно записать в виде

$$\frac{dM_t[v]}{dt} = \lim_{t\to t_1+0} \int\limits_\tau \frac{M[w; \varphi, u, t / \varphi_1, u_1, t_1] - w(\varphi_1, u_1, t_1)}{t - t_1}\, d\tau \tag{3.3}$$

Пусть правые части системы (1.1) зависят только от одного случайного параметра $u = u(t)$, который представляет однородную марковскую цепь с конечным числом состояний. Функция $u = u(t)$ в каждый момент времени t может принимать одно значение u_i из конечного множества $U(u_1, \ldots, u_m)$, причем вероятность $p_{ij} = p_{ij}(\Delta t)$ смены значений $u_i \to u_j$ за время Δt удовлетворяет условию

$$p_{ij} = \alpha_{ij}\Delta t + o(\Delta t), \qquad p_{ii} = 1 - \sum_{j\neq i} \alpha_{ij}\Delta t + o(\Delta t) \tag{3.4}$$

где $o(\Delta t)$ означает бесконечно малую величину более высокого порядка малости, чем Δt. Тогда осредненная производная (3.3) будет равняться

$$\frac{dM_t[v]}{dt} = \int\limits_\tau \left\{\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial w}{\partial \varphi_k} f_k\left(t, x, y, z, \varphi_s, \frac{\partial \varphi_s}{\partial x}, \ldots, u_i\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{j\neq i} [w(\varphi, u_j, t) - w(\varphi, u_i, t)]\, \alpha_{ij}\right\} d\tau \tag{3.5}$$

В случае бесконечного числа состояний $u = u(t)$ вероятность перехода от значения $u = \alpha$ на значение $u \leqslant \beta$ за время Δt обозначим

$$\begin{gathered} p(u \leqslant \beta \neq \alpha,\ t < t_1 < t + \Delta t / u = \alpha, t) = q(\alpha, \beta)\Delta t + o(\Delta t) \\ p(u = \alpha, t < t_1 < t + \Delta t / u = \alpha, t) = 1 - q(\alpha)\Delta t + o(\Delta t) \end{gathered} \tag{3.6}$$

где

$$q(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} q(\alpha, \beta)\, d\beta \tag{3.7}$$

Тогда для осредненной производной (3.5) будем иметь формулу

$$\frac{dM_t[v]}{dt} = \int\limits_\tau \left\{\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial w}{\partial \varphi_k} f_k\left(t, x, y, z, \varphi_s, \frac{\partial \varphi_s}{\partial x}, \ldots, u_i\right) + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{-\infty}^{\infty} w(\varphi, \beta, t) \frac{\partial q(\alpha, \beta)}{\partial \beta}\, d\beta - w(\varphi, \alpha, t)\, q(\alpha)\right\} d\tau \tag{3.8}$$

Следующая теорема 3.1 будет следствием теоремы 2.1, когда u представляет марковский процесс.

Теорема 3.1. Если для системы дифференциальных уравнений (1.1) возможно найти непрерывный по метрике ρ_0 при $t = t_0$ и определенно положительный по метрике ρ функционал v, осредненная производная которого

$$\frac{dM_t[v]}{dt} \quad \text{при } t \geqslant t_0$$

в силу этих уравнений есть величина неположительная, то решение $\varphi \equiv 0$ обладает вероятностной устойчивостью по метрикам ρ и ρ_0.

В случае обыкновенных дифференциальных уравнений со случайными параметрами теорема 3.1 доказана в статье [1].

Теорема 3.2. Если для системы дифференциальных уравнений (1.1) возможно найти непрерывный по метрике ρ_0 при $t = t_0$ и определенно положительный по метрике ρ функционал v, осредненная производная которого удовлетворяет неравенству

$$\frac{dM_t[v]}{dt} \leqslant -cv \tag{3.9}$$

где c — положительная постоянная, то решение $\varphi \equiv 0$ системы (1.1) вероятностно асимптотически устойчиво по метрикам ρ и ρ_0.

Доказательство. Условия теоремы 3.1 выполняются, следовательно, процесс $\varphi \equiv 0$ вероятностно устойчив по метрикам ρ и ρ_0. Для доказательства вероятностно асимптотической устойчивости достаточно убедиться, что $\lim M_t[v] = 0$ при $t \to \infty$.

Найдем математическое ожидание выражения (3.9)

$$M\left[\frac{dM_t[v]}{dt};\ \varphi, u, t / \varphi_0, u_0, t_0\right] \leqslant -cM_t[v] \tag{3.10}$$

Но имеет место формула

$$\lim_{t\to t_1+0} \frac{M_t[v] - M_{t_1}[v]}{t - t_1} = \frac{dM[v; \varphi_1, u_1, t_1 / \varphi_0, u_0, t_0]}{dt_1} = M_{t_1}\left[\frac{dM_{t_1}[v]}{dt_1}\right] \tag{3.11}$$

Проинтегрируем (3.10) в пределах от $t = t_0$ до $t = T$; учитывая (3.11), получим

$$M_{t_0}[v] - M_T[v] \geqslant c\int_0^T M_t[v]\,dt$$

Математическое ожидание $M_{t_0}[v]$ положительное и невозрастающее, следовательно, ограниченное. Отсюда следует сходимость интеграла в правой части при $T \to \infty$. Тогда подынтегральная функция при $T \to \infty$ должна неограниченно убывать до нуля,

$$\lim M_t[v] = 0 \quad \text{при } t \to \infty$$

Таким образом, выполняются условия теоремы 2.2. Следовательно, имеет место вероятностная асимптотическая сходимость процесса $\varphi \equiv 0$.

§ 4. Рассмотрим примеры. 1°. Пусть некоторый вероятностный процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = a(x, u)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b(x, u)\varphi \tag{4.1}$$

где $a(x, u)$, $b(x, u)$ — случайные функции, которые могут принимать по два состояния соответственно

$$a(x, u_1) = a_1(x), \quad a(x, u_2) = a_2(x), \quad b(x, u_1) = b_1(x), \quad b(x, u_2) = b_2(x)$$

Вероятность смены значений $u_i \to u_j$ представим $p_{ij} = \alpha_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$. Получим достаточные условия вероятностной устойчивости по метрике

$$\rho \equiv \rho_0 \equiv \left\{\int_0^l \varphi^2 dx\right\}^{1/2}$$

решения системы $\varphi \equiv 0$ в отрезке $[0, l]$.

Введем определенно-положительный по метрике ρ функционал

$$v = \int_0^l \frac{1}{2} Q(x, u)\varphi^2 dx$$

Величина $Q(x, u) \geqslant \varepsilon^0 > 0$ является некоторой случайной функцией. Обозначим $Q(x, u_1) = Q_1(x)$, $Q(x, u_2) = Q_2(x)$.

Для вероятностной устойчивости осредненная производная

$$\frac{dM_t[v]}{dt} = \frac{1}{2}[a_i(l)\, Q_i(l)\,\varphi^2(l) - a_i(0)\, Q_i(0)\,\varphi^2(0)] - \int_0^l A_i(x)\,\varphi^2 dx$$

где

$$A_i(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial a_i(x)\, Q_i(x)}{\partial x} - b_i(x)\, Q_i(x) - \frac{1}{2}\alpha_{ij}[Q_j(x) - Q_i(x)] \qquad (j \neq i)$$

должна быть неположительной при $i, j = 1, 2$.

Достаточным условием вероятностной устойчивости является

$$a_i(l) \leqslant 0, \qquad a_i(0) \geqslant 0, \qquad A_i(x) \geqslant 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{4.2}$$

При выполнении условий

$$a_i(l) \leqslant 0, \qquad a_i(0) \geqslant 0, \qquad A_i(x) \geqslant \varepsilon > 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{4.3}$$

будем иметь вероятностную асимптотическую устойчивость процесса $\varphi \equiv 0$.

Пусть

$$\varphi(l) = 0, \qquad a_1(x) = a_1 = \text{const} \geqslant 0, \qquad a_2(x) = a_2 = \text{const} \geqslant 0$$
$$Q_1(x) = Q_1 = \text{const} > 0, \qquad Q_2(x) = Q_2 = \text{const} > 0$$

Тогда условия (4.3) запишутся в виде

$$[-b_1(x) + {}^1/_2\alpha_{12}]\, Q_1 - {}^1/_2\alpha_{12}Q_2 = 1 > 0$$
$$[-b_2(x) + {}^1/_2\alpha_{21}]\, Q_2 - {}^1/_2\alpha_{21}Q_1 = 1 > 0$$

или, учитывая $Q_1 > 0$ и $Q_2 > 0$, получим

$$b_1(x)\, b_2(x) - {}^1/_2[\alpha_{12}b_2(x) + \alpha_{21}b_1(x)] > 0, \quad b_1(x) < {}^1/_2[\alpha_{12} + \alpha_{21}]$$
$$b_2(x) < {}^1/_2[\alpha_{12} + \alpha_{21}] \tag{4.4}$$

Уравнение (4.1) описывает стохастический процесс. Сравним этот процесс с двумя детерминированными процессами, которые соответствуют реализациям $u = u_1$ и $u = u_2$. Для простоты положим

$$a(x, u) \equiv 0, \qquad b_1 \equiv -{}^1/_3, \qquad b_2 \equiv {}^1/_8, \qquad \alpha_{12} \equiv \alpha_{21} \equiv {}^1/_2$$

Если рассматривать детерминированные процессы

$$d\varphi / dt = -{}^1/_3\varphi, \qquad d\varphi / dt = {}^1/_8\varphi$$

то первый из них устойчив по Ляпунову, а второй неустойчив.

Если же рассматривать стохастический процесс

$$d\varphi / dt = b(u)\,\varphi$$

причем $b(u_1) = -1/_3$, $b(u_2) = 1/_8$, $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 1/_2$, то этот процесс вероятностно-асимптотически устойчив, так как выполняются условия (4.4)

2°. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = a(x, u)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + b(x, u)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + c(x, u)\varphi \tag{4.5}$$

где случайный параметр u может принимать два дискретных значения u_1 и u_2. Граничные условия $\varphi(0, t) = \varphi(l, t) = 0$.

Рассмотрим вероятностную устойчивость по метрике

$$\rho \equiv \rho_0 \equiv \left\{\int_0^l \varphi^2 dx\right\}^{1/2}$$

Пусть

$$v = \frac{1}{2}\int_0^l Q(x, u)\varphi^2 dx, \qquad Q(x, u) \geqslant \varepsilon > 0$$

Учитывая граничные условия, для осредненной производной получим

$$\frac{dM_t[v]}{dt} = -\frac{1}{2}\int_0^l \left[2a(x, u_i)Q(x, u_i)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + B_i(x)\varphi^2\right]dx$$

Здесь

$$B_i(x) = \frac{\partial b(x, u_i)Q(x, u_i)}{\partial x} - \frac{\partial^2 a(x, u_i)Q(x, u_i)}{\partial x^2} -$$
$$- 2C(x, u_i)Q(x, u_i) - \alpha_{ij}[Q(x, u_j) - Q(x, u_i)]$$

Неравенства

$$a(x, u_i) \geqslant 0, \qquad B_i(x) \geqslant 0 \qquad (i = 1,2) \tag{4.6}$$

дают достаточные условия вероятностной устойчивости.

3°. Пусть профиль скоростей основного движения жидкости прямолинейный $v_0 = a(u) + b(u)y$, где u — случайный параметр, который может принимать значения u_1 и u_2. Плоское возмущенное движение жидкости описывается уравнением [2].

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right) - v_0\frac{\partial\omega}{\partial x}, \quad \left(\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)\right) \tag{4.7}$$

Здесь v_1, v_2 — компоненты возмущений вектора скорости, ψ — функция тока возмущений. Введем метрику

$$\rho \equiv \rho_0 \equiv \left\{\int_\tau \omega^2 d\tau\right\}^{1/2}$$

и функционал

$$v = \frac{1}{2}\int_\tau Q(u)\omega^2 d\tau$$

Область τ примем в виде прямоугольника $l_1 \leqslant x \leqslant l_2$, $h_1 \leqslant y \leqslant h_2$. Тогда для осредненной производной получим

$$\frac{dM_t[v]}{dt} = \nu(u_i)Q(u_i)\int_{l_1}^{l_2}\left[\left(\omega\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)_{h_2} - \left(\omega\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)_{h_1}\right]dx +$$
$$+ \nu(u_i)Q(u_i)\int_{h_1}^{h_2}\left[\left(\omega\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)_{l_2} - \left(\omega\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)_{l_1}\right]dy - \int_{h_1}^{h_2}\frac{v_0(u_i)Q(u_i)}{2}[(\omega^2)_{l_2} - (\omega^2)_{l_1}]dy -$$
$$- \int_\tau\left\{\nu(u_i)Q(u_i)\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\right] - \alpha_{ij}[Q(u_j) - Q(u_i)]\omega^2\right\}d\tau \quad (i, j = 1, 2;\ j \neq i)$$

Пусть $Q(u_j) = Q(u_i) = 1 > 0$. Если область, занятая возмущениями, полностью находится внутри области τ, а на границе и вне τ возмущения отсутствуют, т. е. $\omega = 0$, то

$$\frac{dM_t[v]}{dt} = -\nu(u_i)\int_\tau\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\right]d\tau \qquad (i = 1, 2)$$

Коэффициент вязкости $\nu = \nu(u_i)$ — всегда положительная величина, поэтому $dM_t[v]/dt \leqslant 0$.

Таким образом, процесс $\omega \equiv 0$ вероятностно устойчив.

Частный случай $v_0 \equiv 0$ соответствует рассеиванию вихрей в безграничной вязкой жидкости [3] при случайном изменении коэффициента вязкости.

4°. Дифференциальные уравнения возмущений плоско-параллельного изотермического движения газа с основной скоростью v_0, не зависящей от координат x и y, записываются

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -v_0\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0'}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}\frac{1}{3}\frac{\partial^2 v_2}{\partial x\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = -v_0\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0'}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{4}{3}\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} = -\rho_0'\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) - v_0\frac{\partial\rho'}{\partial x}, \qquad P = RT_0\rho' \tag{4.8}$$

где v_1, v_2 — компоненты возмущений скорости, P, ρ' — соответственно возмущения давления и плотности, v_0, ρ_0', T_0 — соответственно скорость, плотность и температура невозмущенного движения, не зависящие от координат x, y.

Величины $v_0 = v_0(u)$, $\rho_0' = \rho_0'(u)$, $T_0 = T_0(u)$, $\nu = \nu(u)$ зависят от случайного параметра u, который может принимать значения $u_1, \ldots, u_m$. Пусть

$$\rho \equiv \rho_0 \equiv \left\{\int_\tau (v_1^2 + v_2^2 + \rho'^2)\,d\tau\right\}^{1/2}$$

$$v = \frac{1}{2}\int_\tau Q(u)\left(v_1^2 + v_2^2 + \frac{RT_0}{\rho_0'^2}\rho'^2\right)d\tau$$

Тогда, учитывая, что на границе области $v_1 = v_2 = 0$ и полагая

$$\int_{h_1}^{h_2}[(\rho^2)_{l_2} - (\rho^2)_{l_1}]\,dx, \qquad Q(u_i) = Q(u_j) = 1 > 0$$

для осредненной произвольной получим (4.9)

$$\frac{dM_t[v]}{dt} = -\nu(u_i)\int_\tau\left[\frac{4}{3}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)^2 + \frac{2}{3}\frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial v_2}{\partial y} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)^2\right]d\tau$$

При $\nu(u_i) \geqslant 0$ стохастический процесс, описываемый системой (4.8), обладает вероятностной устойчивостью.

Поступила 30 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Кац И. Я., Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
2. Слезкин Н. А. Динамика вязкой жидкости. Гостехтеоретиздат, 1955.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Гостехтеоретиздат, 1955.