ВЛИЯНИЕ ЛАРМОРОВСКОГО ВРАЩЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ НА НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Э. Г. Сахновский (Ленинград)

В работе [1] в предположении малости магнитного числа Рейнольдса получено точное решение задачи о неустановившемся плоскопараллельном течении ионизованной среды в поперечном магнитном поле с учетом эффекта ларморовского вращения электронов и ионов. В настоящей заметке на основании результатов работы [1] для случая постоянного перепада давлений найдено распределение температуры по сечению плоского канала в условиях постоянства температуры его стенок. Сохранены все предположения и обозначения, принятые в [1].

§ 1. В силу сделанных в [1] предположений о несжимаемости среды, постоянстве ее степени ионизации и малости магнитного числа Рейнольдса уравнение энергии можно записать в виде [2].

$$C_v{}^\circ (1 + Zs)\, \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla T\right) = -\operatorname{div}\mathbf{q} - \pi^{rm}\, \frac{\partial u^r}{\partial x_m} + \mathbf{j}\,(\mathbf{E}_0 + \mathbf{u}\times\mathbf{B}_0) \qquad (1.1)$$

где T — температура, $C_v{}^\circ$ — теплоемкость единицы массы нейтрального газа, $\mathbf{q}$ — вектор потока тепла, общее выражение для которого дается формулой (2.3) работы [2]. Остальные обозначения такие же, как в [1].

Считая, в силу характера задачи, $T = T\,(z,\, t)$ и выполнив, как в [1], переход к безразмерным переменным (вводя дополнительно T^* в качестве масштаба T), вместо (1.1) будем иметь

$$\frac{\partial T}{\partial t} = C^2\, \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + F\,(z,\, t) \qquad (1.2)$$

где

$$F\,(z,\, t) = \frac{\gamma\varkappa}{1 + Zs}\left\{\frac{1}{R^{(2)}}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)^2\right] + j_x\,(E_{0x} + u_y) + j_y\,(E_{0y} - u_x)\right\} \qquad (1.3)$$

$$\gamma = \frac{U_0{}^2}{C^\circ T^*{}_p}, \qquad C^2 = \frac{\varkappa}{R^{(2)}P^{(2)}(1 + Zs)}, \qquad \varkappa = \frac{C_p{}^\circ}{C_v{}^\circ}, \qquad P^{(2)} = \frac{\eta^{(2)}C_p{}^\circ}{\lambda^T}$$

Входящий в число Прандтля $P^{(2)}$ коэффициент теплопроводности λ^T совпадает с коэффициентом теплопроводности частично ионизованного газа в отсутствие магнитного поля [2] и при достаточно высоких степенях ионизации определяется только электронами (при $s \ll 1$ — нейтралами). Таким образом, в силу геометрии задачи магнитное поле не влияет на температурное поле через механизм теплопроводности ($\operatorname{div}\mathbf{q} = \partial q_z / \partial z$, но магнитное поле не влияет на перенос тепла вдоль него). Однако это влияние осуществляется действием внутренних источников тепла (1.3), связанных с вязкой диссипацией и джоулевым нагревом. Задача сводится к решению неоднородного уравнения теплопроводности (1.2) при начальном и граничном условиях

$$T\,(z,\, 0) = T_0 = \text{const}, \qquad T\,(\pm 1,\, t) = 0 \qquad (t > 0) \qquad (1.4)$$

Нетрудно проверить, что неоднородная часть уравнения — четная функция z. Поэтому

$$T\,(z,\, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n\,(t)\cos\lambda_n z \qquad \left(\lambda_n = \frac{2n+1}{2}\,\pi \quad (n = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, \ldots)\right) \qquad (1.5)$$

Представив

$$F\,(z,\, t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n\,(t)\cos\lambda_n z \qquad \left(F_n\,(t) = \int_{-1}^{+1} F\,(z,\, t)\cos\lambda_n z\, dz\right) \qquad (1.6)$$

и подставив (1.5) и (1.6) в (1.2), для определения $T_n\,(t)$ получим уравнение

$$\frac{dT_n}{dt} + C^2\lambda_n{}^2 T_n = F_n \qquad \left(T_n\,(0) = T_0\int_{-1}^{+1}\cos\lambda_n z\, dz = \frac{2T_0}{\lambda_n}(-1)^n\right) \qquad (1.7)$$

Решением уравнения (1.7) будет

$$T_n(t) = \exp(-C^2\lambda_n^2 t)\left[\int_0^t F_n(\tau)\exp(C^2\lambda_n^2\tau)\,d\tau + \frac{2T_0}{\lambda_n}(-1)^n\right] \tag{1.8}$$

Отсюда искомое общее решение принимает вид

$$T(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2T_0}{\lambda_n}(-1)^n + \int_0^t F_n(\tau)\exp(c^2\lambda_n^2\tau)\,d\tau\right]\exp(-C^2\lambda_n^2 t)\cos\lambda_n z \tag{1.9}$$

Остается при помощи полученных в [1] выражений для комплексных скорости $v(z, t) = u_x - iu_y$ и тока $J = j_x - ij_y$ построить $F(z, t)$ и выполнить входящие в (1.9) квадратуры.

§ 2. В дальнейшем для простоты считаем, что перепад давлений приложен только вдоль оси x и внешнее электрическое поле отсутствует, т. е. [1]

$$\psi_0 = P_x, \qquad P_y = \varphi_0 = E_{0x} - iE_{0y} \equiv 0 \tag{2.1}$$

Тогда после больших выкладок, включающих интегрирование и суммирование тригонометрических рядов, приведение которых здесь не представляется возможным, окончательное решение задачи запишем в виде

$$T(z, t) = T_\eta(z) + T_\sigma(z) + T_t(z, t) \tag{2.2}$$

Первые два слагаемых дают стационарный температурный режим и учитывают соответственно T_η — вязкое трение, T_σ — джоулев нагрев

$$T_\eta = \frac{\gamma P^{(2)}(\Delta_1^2 + \Delta_2^2)(r_1^2 + r_2^2)}{8(\operatorname{ch}^2 r_1\cos^2 r_2 + \operatorname{sh}^2 r_1\sin^2 r_2)}\left(\frac{\cos 2r_2 - \cos 2r_2 z}{r_2^2} + \frac{\operatorname{ch} 2r_1 - \operatorname{ch} 2r_1 z}{r_1^2}\right) \tag{2.3}$$

$$T_\sigma = \frac{\Delta_1\gamma P_x R^{(2)}P^{(2)}}{2}(1 - z^2) - \frac{\gamma R^{(2)}P^{(2)}(\Delta_1^2 + \Delta_2^2)}{\operatorname{ch}^2 r_1\cos^2 r_2 + \operatorname{sh}^2 r_1\sin^2 r_2}\times \tag{2.4}$$

$$\times\left[\frac{1}{8(m_1^2 + m_2^2)}\left(\frac{m_1}{R^{(2)}} + \frac{m_2}{R^{(4)}}\right)\left(\frac{\cos 2r_2 - \cos 2r_2 z}{r_2^2} - \frac{\operatorname{ch} 2r_1 - \operatorname{ch} 2r_1 z}{r_1^2}\right) + \right.$$

$$\left. + A^*(\operatorname{ch} r_1\cos r_2 - \operatorname{ch} r_1 z\cos r_2 z) - A^{**}(\operatorname{sh} r_1\sin r_2 - \operatorname{sh} r_1 z\sin r_2 z)\right]$$

Здесь

$$r_{1,2} = \left(\frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2} \pm m_1}{2(m_1^2 + m_2^2)}\right)^{1/2} \tag{2.5}$$

$$m_1 = \frac{1}{M^{(2)2}} - \omega_e\tau_0\left[\frac{1}{M^{(4)2}} - 2(1 - s)\,\omega_i\tau_{ia}\left(\frac{1}{M^{(2)2}} - \frac{1}{M_i^{(2)2}}\right)\right]$$
$$m_2 = \frac{1}{M^{(4)2}} + \omega_e\tau_0\left[\frac{1}{M^{(2)2}} + 2(1 - s)\,\omega_i\tau_{ia}\left(\frac{1}{M^{(4)2}} - \frac{1}{M_i^{(4)2}}\right)\right] \tag{2.6}$$

$$\Delta_1 = \frac{P_x}{N}\left[1 + \frac{2(1 - s)^2}{1 + Zs}\,\omega_i\tau_{ia}\omega_e\tau_0\right], \qquad \Delta_2 = \frac{P_x\omega_e\tau_0}{N(1 + Zs)} \tag{2.7}$$

$$A^* = \frac{1}{R^{(4)}}\operatorname{sh} r_1\sin r_2 - \frac{1}{R^{(2)}}\operatorname{ch} r_1\cos r_2 + \frac{P_x}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}[\operatorname{ch} r_1\cos r_2(m_2\Delta_2 - m_1\Delta_1) +$$
$$+ \operatorname{sh} r_1\sin r_2(m_2\Delta_1 + m_1\Delta_2)] \tag{2.8}$$

$$A^{**} = \frac{1}{R^{(4)}}\operatorname{ch} r_1\cos r_2 + \frac{1}{R^{(2)}}\operatorname{sh} r_1\sin r_2 + \frac{P_x}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}[\operatorname{ch} r_1\cos r_2(m_2\Delta_1 +$$
$$+ m_1\Delta_2) - \operatorname{sh} r_1\sin r_2(m_2\Delta_2 - m_1\Delta_1)]$$

Здесь отметим, что учет ларморовского вращения заряженных частиц приводит к колебательному характеру установившейся температуры. Если в полученных выражениях положить $\omega_e\tau_0 \ll 1$, то получим апериодическое решение, соответствующее тепловому режиму задачи Гартмана, когда электрическое поле равно нулю (2.9)

$$T_\eta+T_\sigma=\frac{\gamma R^{(0)2}P^{(0)}P_x^2}{M^{(0)2}}\left[\frac{1-z^2}{2}\,\frac{2(\operatorname{ch}M^{(0)}-\operatorname{ch}M^{(0)}z)}{M^{(0)2}\operatorname{ch}M^{(0)}}+\frac{\operatorname{ch}2M^{(0)}-\operatorname{ch}2M^{(0)}z}{4M^{(0)2}\operatorname{ch}^2M^{(0)}}\right.$$

Профиль температуры, соответствующий другому режиму задачи Гартмана, был получен в работах [3–5]. Запишем выражение для переходного режима

$$T_t(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2T_0}{\lambda_n}(-1)^n-\int_{-1}^{+1}(T_\eta+T_\sigma)\cos\lambda_n z\,dz-\sum_{k=0}^{\infty}W_{kn}^{(1)}-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}W_{kln}^{(3)}\right]\times$$
$$\times\exp(-C^2\lambda_n^2t)\cos\lambda_n z+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(Wk_n^{(1)}\cos\Omega k^{(2)}t+Wk_n^{(2)}\sin\Omega k^{(2)}t)\times\right.$$
$$\times\exp(-\Omega k^{(1)}t)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}[W_{kln}^{(3)}\cos(\Omega k^{(2)}-\Omega_l^{(2)})t+W_{kln}^{(4)}\sin(\Omega k^{(2)}-\Omega_l^{(2)})t]\times$$
$$\left.\times\exp[-(\Omega k^{(1)}+\Omega l^{(1)})t]\right\}\cos\lambda_n z \qquad (2.10)$$

Постоянные $W_{kn}^{(1)}$, $W_{kn}^{(2)}$, $W_{kln}^{(3)}$ и $W_{kln}^{(4)}$ имеют вид

$$W_{kn}^{(1)}+iW_{kn}^{(2)}=\frac{(-1)^{n+1}\gamma\varkappa}{(1+Zs)(C^2\lambda_n^2-\Omega_k^{(1)}-i\Omega_k^{(2)})}\left\{\left[P_x(d_k^{(1)}-id_k^{(2)})+\right.\right.$$
$$+(\beta_k^{(1)}-i\beta_k^{(2)})(\Delta_1-i\Delta_2)\varepsilon^{kn}-\frac{\lambda_n(\Delta_1-i\Delta_2)(\operatorname{sh}r_1\cos r_2+i\operatorname{ch}r_1\sin r_2)}{\operatorname{ch}r_1\cos r_2+i\operatorname{sh}r_1\sin r_2}\times$$
$$\times\left\langle\left[(\beta_k^{(1)}-i\beta_k^{(2)})+\frac{d_k^{(1)}-id_k^{(2)}}{m_1-im_2}\left(\frac{1}{R^{(2)}}-i\frac{1}{R^{(4)}}\right)\right][2r_1(I_{kn}^{(1)}+I_{kn}^{(2)})-\right.$$
$$\left.\left.-i(I_{kn}^{(3)}-I_{kn}^{(4)})]+\frac{2\lambda_k}{R^{(2)}}(r_2-ir_1)(d_k^{(1)}-id_k^{(2)})[2r_1(I_{kn}^{(1)}-I_{kn}^{(2)})-i(I_{kn}^{(3)}+I_{kn}^{(4)})]\right\rangle\right\} \qquad (2.11)$$

$$W_{kln}^{(3)}+iW_{kln}^{(4)}=\frac{2(-1)^{n+1}\gamma\varkappa\lambda_k\lambda_l\lambda_n}{(1+Zs)[C^2\lambda_n^2-\Omega_k^{(1)}-\Omega_l^{(1)}-i(\Omega_k^{(2)}-\Omega_l^{(2)})]}\times$$
$$\times[\beta_k^{(1)}d_l^{(1)}+\beta_k^{(2)}d_l^{(2)}+\frac{1}{R^{(2)}}(d_k^{(1)}d_l^{(1)}+d_k^{(2)}d_l^{(2)})(\lambda_k^2+\lambda_l^2-\lambda_n^2)]\times$$
$$\times\frac{1}{(\lambda_k^2+\lambda_l^2-\lambda_n^2))^2-4\lambda_k^2\lambda_l^2} \qquad (2.12)$$

$$\beta_k^{(1)}-i\beta_k^{(2)}=\frac{2(\Delta_1+i\Delta_2)N^*}{\lambda_k(\lambda_k^2/M_\delta^{*2}+1)}\left[1+\lambda_k^2\left(\frac{1}{R_\delta^*}-\frac{1}{R^*}\right)\right]$$

$$d_k^{(1)}-id_k^{(2)}=\frac{2(\Delta_1+i\Delta_2)}{\lambda_k(\lambda_k^2/M_\delta^{*2}+1)},\quad \varepsilon^{kn}=\begin{cases}1 & \text{при } k=n\\ 0 & \text{при } k\neq n\end{cases}\quad (i=\sqrt{-1}) \qquad (2.13)$$

$$I_{kn}^{(1,2)}=\frac{\lambda_k\mp r_2}{[r_1^2+(\lambda_k\mp r_2)^2+\lambda_n^2]^2-4(\lambda_k\mp r_2)^2\lambda_n^2}$$

$$I_{kn}^{(3,4)}=\frac{r_1^2-(\lambda_k\mp r_2)^2+\lambda_n^2}{[r_1^2+(\lambda_k\mp r_2)^2+\lambda_n^2]^2-4(\lambda_k\mp r_2)^2\lambda_n^2} \qquad (2.14)$$

$$\Omega_k^{(1)}=\frac{N\{(1+m_1\lambda_k^2)[1+2(1-s)^2\omega_i\tau_{ia}\omega_e\tau_0]+m_2\omega_e\tau_0\lambda_k^2\}}{[1+2(1-s)^2\omega_i\tau_{ia}\omega_e\tau_0]^2+(\omega_e\tau_0)^2}$$

$$\Omega_k^{(2)}=\frac{N\{m_2\lambda_k^2[1+2(1-s)^2\omega_i\tau_{ia}\omega_e\tau_0]-\omega_e\tau_0(1+m_1\lambda_k^2)\}}{[1+2(1-s)^2\omega_i\tau_{ia}\omega_e\tau_0]^2+(\omega_e\tau_0)^2} \qquad (2.15)$$

Полученное выражение очень громоздко, причем включает в себя как апериодическую, так и периодическую во времени части. Появление последней обязано ларморовскому вращению заряженных частиц. Действительно. полагая $\omega_e\tau_0 \ll 1$, имеем для циклических частот

$$\Omega_k^{(2)} = 0, \qquad \Omega_k^{(2)} - \Omega_l^{(2)} = 0 \tag{2.16}$$

Полагая же $\omega_i\tau_i\theta \ll 1$ $(\omega_i\tau_{ia} \ll 1)$, получим

$$\Omega_k^{(2)} = -N\frac{\omega_e\tau_0}{1+(\omega_e\tau_0)^2}, \qquad \Omega_k^{(2)} - \Omega_l^{(2)} = 0 \tag{2.17}$$

Таким образом, ларморовское вращение ионов приводит как к периодичности последней суммы в (2.10), так и к спектру частот колебаний в отличие от случая $\omega_i\tau_i\theta \ll 1$. Интересно также проследить влияние магнитного поля на коэффициент затухания периодической части переходного режима $\Omega_k^{(1)}$ и $\Omega_k^{(1)} + \Omega_l^{(1)}$ (коэффициент затухания апериодической части $C^2\lambda_n^2$ не зависит от магнитного поля). Полагая в (2.15) значение $B_0 = 0$, получим для чисто гидродинамического течения

$$\Omega_k^{(1)} = \lambda_k^2 / R^{(0)} \tag{2.18}$$

Для изотропного магнитогидродинамического случая $(\omega_e\tau_0 \ll 1)$!

$$\Omega_k^{(1)} = N + \lambda_k^2 / R^{(0)} \tag{2.19}$$

т. е. наблюдается увеличение коэффициента затухания.

Учет влияния анизотропии проводимости ($\omega_e\tau_0$ — конечное, $\omega_i\tau_i\theta \ll 1$) дает

$$\Omega_k^{(1)} = \frac{N}{1+(\omega_e\tau_0)^2} + \frac{\lambda_k^2}{R^{(0)}} \tag{2.20}$$

т. е. для одинаковых параметров магнитного взаимодействия N имеем уменьшение $\Omega_k^{(1)}$ по сравнению с изотропным случаем (вообще говоря, N тоже растет с ростом магнитного поля, как B_0^2). Наконец, учет ларморовского вращения ионов ($\omega_i\tau_i\theta$ и $\omega_i\tau_{ia}$ — конечные величины) дает

$$\Omega_k^{(1)} = \frac{N}{1+(\omega_e\tau_{ei})^2} + \frac{\lambda_k^2}{R^{(0)}\,[1+{}^4/_9(\omega_i\tau_i)^2]} \tag{2.21}$$

для полностью ионизованной среды ($s = 1$), и

$$\Omega_k^{(1)} = \frac{N(1+2\omega_i\tau_{ia}\omega_e\tau_{ea})}{(1+2\omega_i\tau_{ia}\omega_e\tau_{ea})^2+(\omega_e\tau_{ea})^2} + \frac{\lambda_k^2}{R^{(0)}} \tag{2.22}$$

для слабо ионизованной среды ($s \ll 1$). Сравнивая (2.21) и (2.20), видим, что для полностью ионизованной среды учет ларморовского вращения ионов снижает коэффициент затухания. Наконец, сравнивая (2.22) и (2.20) и учитывая, что

$$\omega_i\tau_{ia} \sim \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}\omega_e\tau_{ea} \qquad \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \ll 1 \qquad \left(\begin{matrix} m_e \text{ — масса электрона} \\ m_i \text{ — масса иона}\end{matrix}\right)$$

имеем аналогичную картину и для слабо ионизованной среды.

Поступила 17 VII 1964

Физико-технический институт
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Сахновский Э. Г. Неустановившееся плоскопараллельное течение частично ионизованного газа в сильном магнитном поле. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
2. Сахновский Э. Г. Одножидкостные уравнения динамики частично ионизованного газа в сильном магнитном поле. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
3. Регирер С. А. О тепловом эффекте при течении электропроводной жидкости между параллельными стенками. ПММ, 1959, т. 26, вып. 5.
4. Регирер С. А. Неустановившееся течение электропроводной жидкости в присутствии магнитного поля. Инж.-физ. ж., 1959, т. 2, № 8.
5. Jagadeesan K. Heat transfer due to hydromagnetic channel flow with conducting walls. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 4