Здесь $(\Theta_1 + \Theta_2)^{-1}$ — тензор с матрицей компонентов, равный обратной матрице компонентов тензора $\Theta_1 + \Theta_2$. Используя (7) и (8), получаем после подстановки в (8)

$$2(T_{(2)} - T_{(1+2)}) = \omega_r \cdot \Theta_2 \cdot \omega_r - (\omega^\circ - \omega) \cdot (\Theta_1 + \Theta_2) \cdot (\omega^\circ - \omega) =$$
$$= \omega_r \cdot [\Theta_2 - \Theta_2 \cdot (\Theta_1 + \Theta_2)^{-1} \cdot \Theta_2] \cdot \omega_r = \omega_r \cdot Q \cdot \omega_r \quad (10)$$

где Q — тензор, показанный в квадратных скобках. В матричных обозначениях имеем

$$Q = \Theta_2 - \Theta_2 (\Theta_1 + \Theta_2)^{-1} \Theta_2, \qquad (\Theta_1 + \Theta_2)\, \Theta_2^{-1} Q = \Theta_1 + \Theta_2 - \Theta_2 = \Theta_1 \quad (11)$$

и далее

$$Q = (\Theta_1^{-1} + \Theta_2^{-1})^{-1}$$

и, поскольку Θ_1, Θ_2 — положительно- определенные матрицы, таковой будет также Q. Теорема доказана. Она имеет место независимо от размеров тел — их угловых скоростей, а также от характера сил взаимодействия между телами. Представляет интерес простая формула

$$T_{(2)} - T_{(1+2)} = {}^1\!/_2 \omega_r \cdot (\Theta_1^{-1} + \Theta_2^{-1})^{-1} \cdot \omega_r \quad (12)$$

Поступила 10 VII 1964

ДВА ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ ТИПА ТРОЙНОЙ ВОЛНЫ

А. Ф. Сидоров (Свердловск)

В работах [1, 2] даны точные решения задачи о плоском нестационарном течении изотермического газа, возникающем при движении двух перпендикулярных поршней, и задачи об истечении в вакуум вдоль косой стенки политропного газа для $1 < \gamma < 3$ (где γ —показатель адиабаты); решения состоят из двойных и простых волн [1].

В предлагаемой заметке рассматриваются аналогичные задачи для пространственного случая. Дается точное решение задачи о течении изотермического газа, ограниченного тремя движущимися взаимно ортогональными плоскостями, а также задачи об истечении политропного газа в вакуум вдоль некоторого двугранного угла для $1 < \gamma < 2$. В этих решениях осуществляется последовательное примыкание волн ранга 0, 1, 2, и 3. Обобщение на пространственный случай не тривиально, так как тройные волны описываются переопределенной нелинейной системой уравнений в частных производных сложной структуры, исследование совместности которой весьма трудно.

1. В пространстве годографа u_1, u_2, u_3 (u_i — компоненты вектора скорости) система уравнений, описывающая тройные волны в предположении потенциальности и изэнтропичности течения, имеет вид [3]

$$\sum_{ik} A_{ik}^\circ L_{ik}^j = 0 \qquad \begin{pmatrix} j = 0, 1, 2 \\ i, k = 1, 2, 3 \end{pmatrix}, \quad A_{ik}^\circ = \delta_{ik}\theta - \varkappa^2 \theta_i \theta_k \qquad \left(\varkappa = \frac{1}{\gamma - 1}\right) \quad (1.1)$$

$$L_{ik}^\circ = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} \varkappa \Pi_{mp} + \delta_{mp} \varkappa \Pi_{np} + \delta_{np} \\ \varkappa \Pi_{mq} + \delta_{mq} \varkappa \Pi_{nq} + \delta_{nq} \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

$$L_{ik}^1 = (-1)^{i+k} \left\{ \begin{vmatrix} \varkappa \Pi_{mp} + \delta_{mp} \varkappa \Pi_{np} + \delta_{np} \\ \varkappa \theta_{mq} + \delta_{mq} \varkappa \theta_{nq} + \delta_{nq} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varkappa \theta_{mq} + \delta_{mp} \varkappa \theta_{np} + \delta_{np} \\ \varkappa \Pi_{mq} + \delta_{mq} \varkappa \Pi_{nq} + \delta_{nq} \end{vmatrix} \right\} \quad (1.3)$$

$$L_{ik}^2 = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} \varkappa \theta_{mp} + \delta_{mp} & \varkappa \theta_{np} + \delta_{np} \\ \varkappa \theta_{mq} + \delta_{mq} & \varkappa \theta_{nq} + \delta_{nq} \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

$$\Pi = \Pi(u_1, u_2, u_3), \qquad \theta = \theta(u_1, u_2, u_3), \qquad \Pi_{ik} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i \partial u_k}, \qquad \theta_{ik} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_i \partial u_k} \quad (1.5)$$

$$(m, n \neq k;\ m < n;\ p, q \neq i;\ p < q)$$

Здесь γ — показатель адиабаты, θ — квадрат скорости звука, δ_{ik} — символ Кронекера После нахождения функций П и θ из системы трех уравнений (1.1) движение в физическом пространстве x_1, x_2, x_3, t определяется соотношениями

$$x_i = \varkappa \Pi_i + u_i + t\,(\varkappa\theta_i + u_i) \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad \left(\Pi_i = \frac{\partial \Pi}{\partial u_i}, \qquad \theta_i = \frac{\partial \theta}{\partial u_i}\right) \tag{1.6}$$

Уравнения для изотермического газа можно получить, положив формально $\varkappa = 1$ в (1.2) — (1.6), введя вместо θ функцию $q = \ln \rho$ (где ρ — плотность газа) и вместо $\overset{\circ}{A}_{ik}$ выражения

$$A_{ik}^1 = \delta_{ik} - q_i q_k, \quad q_i = \partial q / \partial u_i \tag{1.7}$$

Рассмотрим уравнения для тройных волн в изотермическом газе с уравнением состояния $p = \rho$ (где p — давление, изотермическую скорость звука полагаем равной 1). Последнему уравнению системы (1.1) для $j = 2$ удовлетворяет функция вида

$$q = u_1 + u_2 + u_3 + C \qquad (C = \text{const}) \tag{1.8}$$

Два остальных уравнения системы (1.1) для q из (1.8) принимают вид

$$\begin{vmatrix} \Pi_{21} & \Pi_{31} \\ \Pi_{23} & \Pi_{33}+1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Pi_{21} & \Pi_{31} \\ \Pi_{22}+1 & \Pi_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Pi_{11}+1 & \Pi_{31} \\ \Pi_{12} & \Pi_{32} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{для } j = 0 \tag{1.9}$$

$$\Pi_{21} + \Pi_{31} + \Pi_{32} = 0 \qquad \text{для } j = 1 \tag{1.10}$$

При помощи (1.10) уравнение (1.9) представим так:

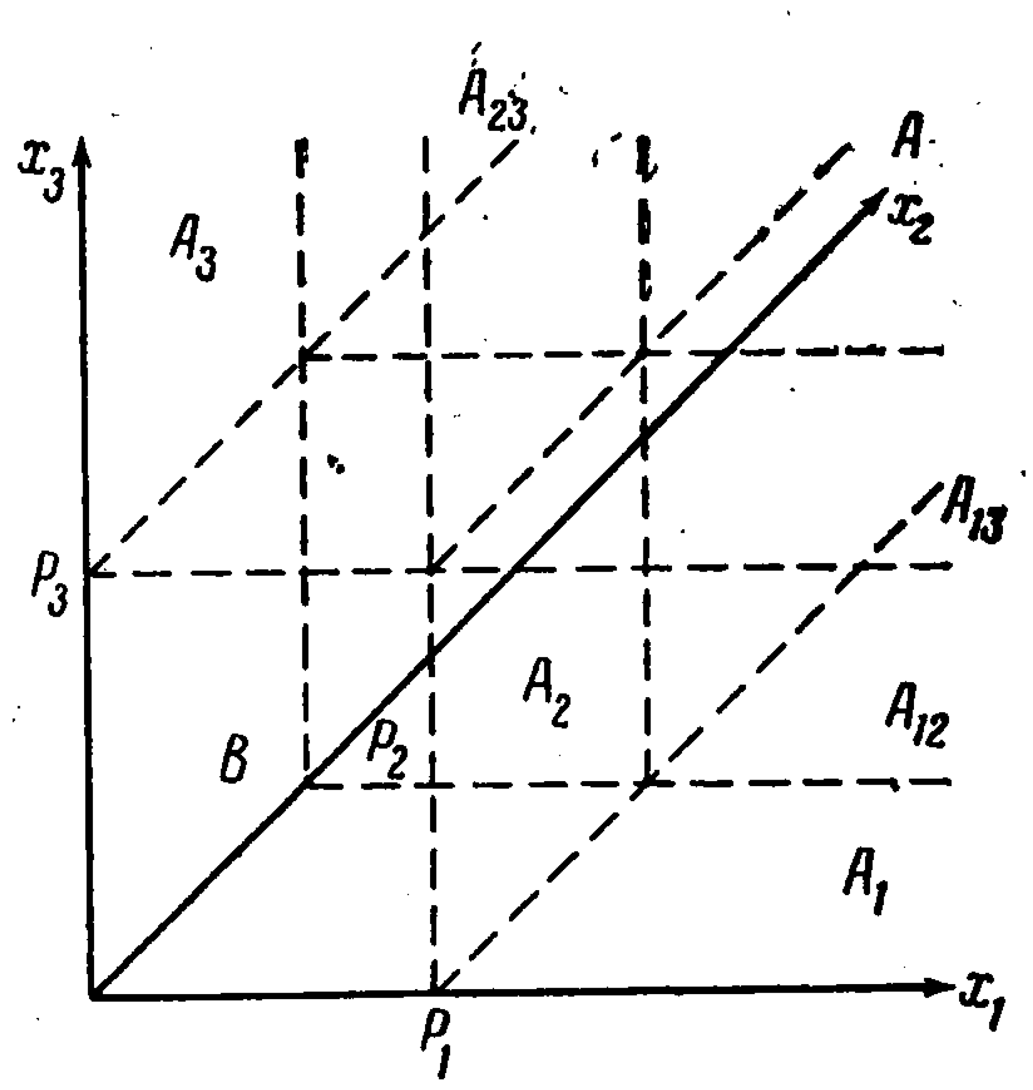
$$\begin{vmatrix} \Pi_{21} & \Pi_{31} \\ \Pi_{23} & \Pi_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Pi_{21} & \Pi_{31} \\ \Pi_{22} & \Pi_{32} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{31} \\ \Pi_{12} & \Pi_{32} \end{vmatrix} = 0 \tag{1.11}$$

Система уравнений (1.10), (1.11) для функции Π имеет решение вида

$$\Pi = f_1(u_1) + f_2(u_2) + f_3(u_3) \tag{1.12}$$

Здесь функции f_i произвольны.

Таким образом, для изотермического газа найдено решение системы уравнений для тройных волн, зависящее от трех произвольных функций одного независимого переменного, с функцией q, определяемой (1.8).



Фиг. 1

Используем полученное решение для нахождения течения газа, ограниченного тремя взаимно ортогональными движущимися плоскостями.

Пусть изотермический газ в начальный момент времени $t = 0$ заключен внутри пространственного трехгранного угла, ограниченного плоскостями $x_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, и покоится. В момент времени $t = 0$ плоскости начинают двигаться по закону

$$x_i = F_i(t) \tag{1.13}$$

причем $F_i(t)$ таковы, что до некоторого момента T в движении не появляются сильные разрывы. Случай с разрывами может быть рассмотрен совершенно аналогично. Подробно для двумерной задачи это сделано в [1].

Тогда для $0 < t < T$ в пространстве x_1, x_2, x_3 будем иметь следующую картину движения (фиг. 1). Плоскости P_i являются плоскостями слабых разрывов, уравнения их движения можно записать в виде $x_i = t$ (скорость звука считаем равной 1).

В целом движение будет трехмерным. В области A, ограниченной плоскостями P_i, будет покой. В областях A_{ik} $(i \neq k)$, ограниченных плоскостями $x_j = 0$ $(j \neq i, j \neq k)$ и P_l $(l = 1, 2, 3)$, будем иметь одномерное движение, являющееся бегущей волной Римана.

В областях A_i $(i = 1, 2, 3)$, ограниченных плоскостями $x_k = 0$, $x_j = 0$ $(k, j \neq i)$ и P_i, будем иметь двумерное движение типа двойной волны, аналогичное рассмотренному в [1]. Наконец, в области B, ограниченной плоскостями $x_i = 0$ и P_i, будет иметь место движение типа волны ранга три.

Из условия непрерывного примыкания решения в областях A_i к бегущим волнам Римана на плоскостях P_j, P_k ($j \neq i$, $k \neq i$ для A_i) вытекают соотношения

$$q = u_k + q_0 \quad \text{при } u_i = 0,\ u_j = 0; \qquad q = u_j + q_0 \quad \text{при } u_i = 0, \quad u_k = 0 \tag{1.14}$$

Из аналогичных соображений для области B на плоскостях P_i ставятся следующие краевые условия (при помощи уже известного решения для двойной волны):

$$q = u_k + u_j + q_0 \quad (i = 1, 2, 3;\ k, j \neq i) \quad \text{при } u_i = 0 \tag{1.15}$$

Таким образом, можно удовлетворить условиям (1.14) и (1.15), если в (1.8) положить $C = q_0$. Вопрос об единственности этого решения остается открытым. Окончательно приводим следующую сводку для решения поставленной задачи:

$$u_i = 0 \qquad \text{в обл. } A \tag{1.16}$$

$$u_j = u_k = 0 \quad (k, j \neq i), \quad u_i = u_i(x_i, t), \quad q = u_i + q_0 \quad \text{в обл. } A_i$$

$$u_i = 0, \quad u_j = u_j(x_j, t), \quad u_k = u_k(x_k, t) \quad (k, j \neq i), \quad q = u_j + u_k + q_0 \quad \text{в обл. } A_{jk}$$

$$u_i = u_i(x_i, t), \quad q = u_1 + u_2 + u_3 + q_0 \quad \text{в обл. } B$$

Здесь $i = 1, 2, 3$, причем функции $u_i(x_i, t)$ находятся из уравнений

$$x_i = f_i'(u_i) + u_i + t(1 + u_i) \tag{1.17}$$

вытекающих из (1.6), а f_i, в соответствии с (1.13), определяются из уравнений

$$F_i'(t)\, t + F_i'(t) + f_i'[F_i'(t)] = F_i(t) - t \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.18}$$

Аналогичные формулы справедливы и для решений с различного типа разрывами.

2. Рассмотрим газ, для которого уравнение состояния $p = a^2\rho^\gamma$ ($a^2 = \text{const}$). Будем искать решение системы (1.1) в виде

$$\Pi = \theta = \theta(r) = \theta(a_0 + a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3) \qquad (a_0, a_1, a_2, a_3 = \text{const}) \tag{2.1}$$

В этом случае все три уравнения системы (1.1) одинаковы и имеют вид

$$3\theta + 2\varkappa A\theta\theta'' - \varkappa^2A\theta'^2 = 0 \qquad (A = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \tag{2.2}$$

Интегрируя (2.2), получим

$$r = \int\left(C_1\theta^\varkappa + \frac{3\theta}{\varkappa A(\varkappa - 1)}\right)^{-1/2} d\theta + C_2 \tag{2.3}$$

Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные. При $C_1 \neq 0$ под знаком интеграла (2.3) стоит полиномиальное выражение, и по известным критериям интеграл (2.3) выражается через элементарные функции лишь для $\gamma = 2 \pm (2k + 1)^{-1}$, где k — целое. При помощи (2.3) и (1.6) можно получить семейство точных решений уравнений гидродинамики типа тройных волн, зависящее от постоянных C_1 и a_i ($i = 0, 1, 2, 3$).

Рассматриваемые решения будут трехмерными автомодельными течениями с независимыми автомодельными переменными $\xi_i = (1 + t)^{-1}x_i$ ($i = 1, 2, 3$).

При $C_1 = 0$ для скорости звука c из (2.3) будем иметь

$$c = \alpha_0 + \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \alpha_3u_3 \qquad (\theta = c^2) \tag{2.4}$$

При этом

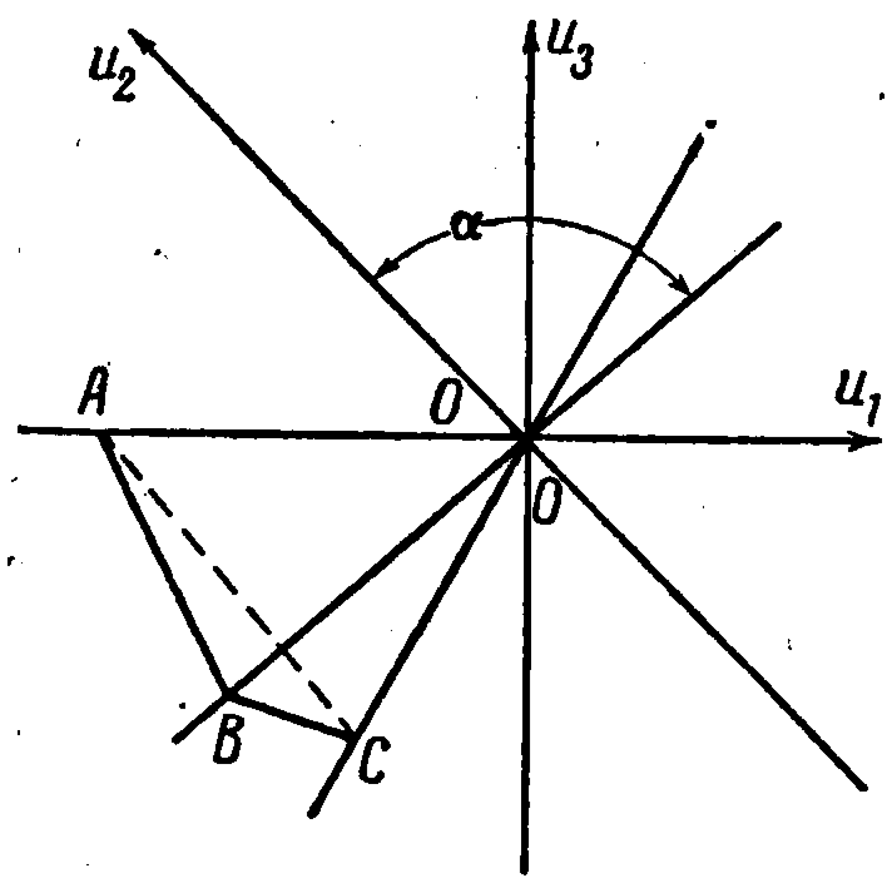
$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_2^3 = \frac{3}{4\varkappa(\varkappa - 1)} \tag{2.5}$$

Покажем, что при помощи (2.4) можно решить задачу об истечении газа в вакуум из некоторого бесконечного трехгранного угла, одна из граней которого мгновенно убирается, а истечение происходит вдоль продолжений плоскостей двух других граней. Пусть в покоящемся газе $c = 1$. В (2.4) положим

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = h, \quad \alpha_2 = h \operatorname{ctg}\alpha, \quad \alpha_3 = h \operatorname{ctg}\beta$$

$$h = \frac{\gamma - 1}{2}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \left(\frac{1+\gamma}{3-\gamma}\right)^{1/2}, \qquad \operatorname{ctg}\beta = \left(\frac{1+\gamma}{(3-\gamma)(2-\gamma)}\right)^{1/2} \tag{2.6}$$

При этом α_1 и α_2 определены так, чтобы при $u_3 = 0$ осуществлялась двойная волна, решающая задачу о плоском истечении в вакуум вдоль косой стенки (см. [2]), а α_3 определено из условия (2.5). Из (2.5) следует, что рассмотрение справедливо лишь для $\gamma < 2$. Течение в пространстве автомодельных переменных ξ_i находится из линейной системы



Фиг. 2

$$\begin{aligned} 1 + hu_1 + h\operatorname{ctg}\alpha u_2 + h\operatorname{ctg}\beta u_3 + u_1 &= \xi_1 \\ \operatorname{ctg}\alpha\,(1 + hu_1 + h\operatorname{ctg}\alpha u_2 + h\operatorname{ctg}\beta u_3) + u_2 &= \xi_2 \qquad (2.7) \\ \operatorname{ctg}\beta\,(1 + hu_1 + h\operatorname{ctg}\alpha\, u_2 + h\operatorname{ctg}\beta u_3) + u_3 &= \xi_3 \end{aligned}$$

определитель которой зависит от γ и не обращается тождественно в нуль. На фиг. 2 и 3 даны области течения в пространстве годографа и пространстве ξ_1, ξ_2, ξ_3, когда газ в начальный момент времени заполнял трехгранный угол, ограниченный плоскостями

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = x_1 \operatorname{ctg}\alpha, \qquad x_3 \operatorname{ctg}\alpha = x_2 \operatorname{ctg}\beta \qquad (2.8)$$

для $x_i \geqslant 0$, а затем грань $x_1 = 0$ убиралась.

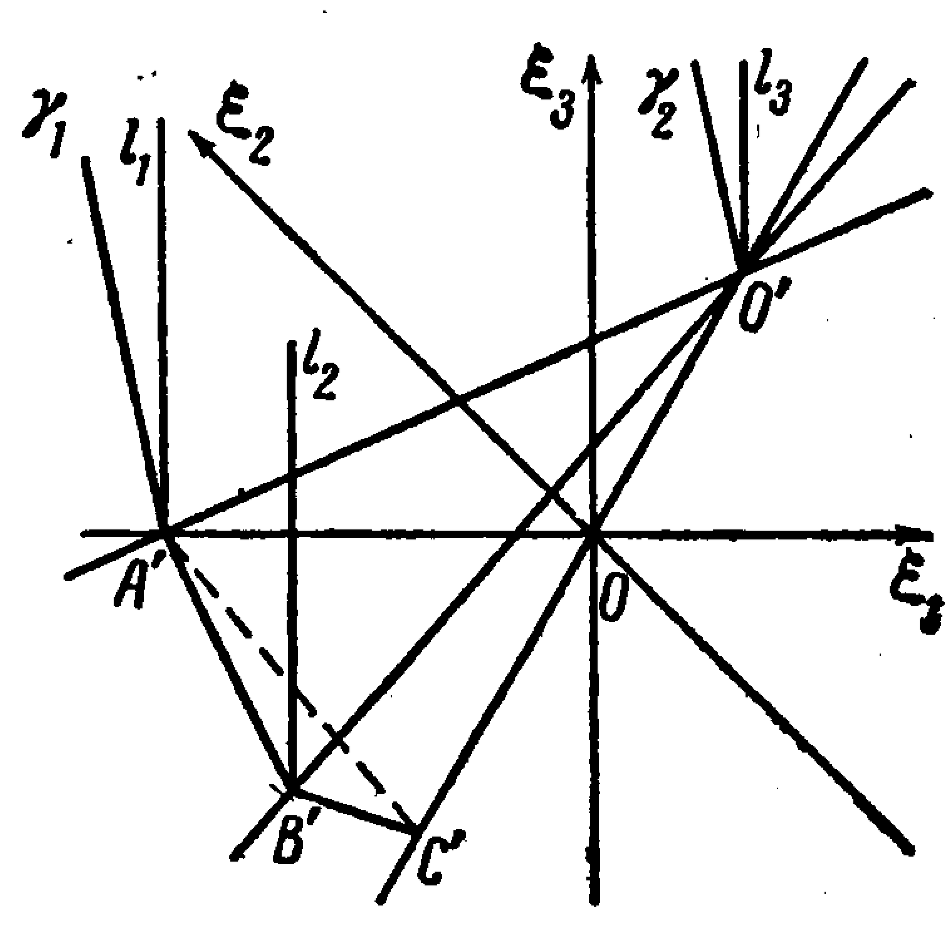
В пространстве годографа области течения соответствует тетраэдр $ABCO$, ограниченный плоскостями

$$(S_1)\ u_3 = 0, \qquad (S_2)\ u_2 = u_1 \operatorname{ctg}\alpha, \qquad (S_3)\ u_3 \operatorname{ctg}\alpha = u_2 \operatorname{ctg}\beta \qquad (2.9)$$
$$(S_4)\ 1 + hu_1 + h\operatorname{ctg}\alpha\, u_2 + h\operatorname{ctg}\beta\, u_3 = 0$$

В пространстве ξ_1, ξ_2, ξ_3 тетраэдр $A'B'C'O'$, ограниченный плоскостями

$$(S_1')\quad \operatorname{ctg}\beta + h\operatorname{ctg}\beta\,\xi_1 + h\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\,\xi_2 - (1 + h + h\operatorname{ctg}^2\alpha)\,\xi_3 = 0$$
$$(S_2')\ \xi_2 = \xi_1 \operatorname{ctg}\alpha, \qquad (S_3')\ \xi_3 \operatorname{ctg}\alpha = \xi_2 \operatorname{ctg}\beta \qquad (2.10)$$
$$(S_4')\ 1 + h\xi_1 + h\operatorname{ctg}\alpha\,\xi_2 + h\operatorname{ctg}\beta\,\xi_3 = 0$$

соответствует тройной волне. Область, лежащая над плоскостью (S_1') и ограниченная тремя плоскостями, проходящими через каждые две прямые l_i $(i = 1, 2, 3)$, параллельные оси ξ_3, соответствует двойной волне; в пространстве годографа этой области соответствует плоскость (S_1).



Фиг. 3

Наконец, область, ограниченная плоскостью (S_3'), плоскостью, проходящей через прямые l_1 и l_3, плоскостями $\gamma_1 l_1$, $\gamma_2 l_3$, проходящими через l_1 и l_3 ортогонально к оси ξ_1, является областью бегущей волны Римана с $u_2 = u_3 = 0$. В пространстве годографа она отображается на прямую AO. Отметим, что угол между плоскостями (S_2') и (S_3'), вдоль которых происходит истечение, не зависит от γ и равен $^1/_3\,\pi$. Фронт истечения в вакуум $(c = 0)$ образован тремя плоскостями: (S_4'), $l_1\gamma_1$ и $l_1 l_2$, пересекающимися в точке A'. При этом (S_4') ортогональна плоскостям (S_2') и (S_3'), плоскость $l_1\gamma_1$ ортогональна (S_3') и плоскость $l_1 l_2$ ортогональна (S_2'). Плоскость $\gamma_2 l_3$ соответствует фронту слабого разрыва, распространяющемуся по неподвижному газу.

Поступила 14 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Погодин Ю. Я., Сучков В. А. и Яненко Н. Н. О бегущих волнах уравнений газовой динамики. Докл. АН СССР, 1958, т. 119, № 3.
2. Сучков В. А. Истечение в вакуум на косой стенке. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
3. Сидоров А. Ф. О нестационарных потенциальных движениях политропного газа с вырожденным годографом. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.