ОДНА ТЕОРЕМА ДИНАМИКИ

А. И. Лурье (Ленинград)

Рассматривается система двух твердых тел S_1, S_2, причем тело S_2 может вращаться вокруг своего центра инерции C_2, неподвижного в S_1. Система предполагается изолированной, т. е. главный вектор внешних сил $\mathbf{V}$ и их главный момент $\mathbf{m}^\circ$ относительно произвольно взятой точки O равны нулю. Тогда при движении системы главный вектор $\mathbf{Q}$ и главный момент количеств движения $\mathbf{K}^\circ$ системы будут неизменны в инерциальной системе осей.

Рассмотрим два движения: в первом ($1+2$) тела S_1, S_2 объединены, во втором (2) — тело S_2 приводится внутренними силами во вращение относительно S_1. При оговоренных условиях имеет место теорема: разность кинетических энергий

$$T_{(2)} - T_{(1+2)} \geqslant 0 \tag{1}$$

Иными словами, поддержание возникающего движения сопряжено с расходом энергии; поэтому идея «перекачивать» кинетическую энергию тела S_1 в тело S_2 и использовать ее для совершения полезной работы порочна [1].

Доказательство основывается на непосредственном подсчете разности (1) при неизменных $\mathbf{Q}$, $\mathbf{K}^\circ$. Пусть $\mathbf{r} = OC_1$ — вектор-радиус центра инерции C_1 тела S_1; $\mathbf{v}$ — вектор скорости этой точки, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости тела S_1. Тогда

$$\mathbf{Q}_1 = m_1\mathbf{v}, \qquad \mathbf{K}_1^\circ = \mathbf{r}\times\mathbf{Q}_1 + \theta^{C_1}\cdot\boldsymbol{\omega}, \qquad 2T_1 = m_1 v^2 + \boldsymbol{\omega}\cdot\theta^{C_1}\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{2}$$

причем m_1 — масса, θ^{C_1} — тензор инерции тела S_1 в точке C_1. Называя еще через $\boldsymbol{\rho} = C_1C_2$ вектор-радиус точки C_2 относительно C_1, имеем также

$$\begin{gathered}\mathbf{Q}_2 = m_2(\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})\\ \mathbf{K}_2^\circ = (\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho})\times\mathbf{Q}_2 + \theta^{C_2}\cdot(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}\\ 2T_2 = m_2|\mathbf{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}|^2 + (\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}_r)\cdot\theta^{C_2}\cdot(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}_r)\end{gathered} \tag{3}$$

причем $\boldsymbol{\omega}_r$ — вектор угловой скорости тела S_2 относительно S_1. При помощи соотношения $\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}$ определяем $\mathbf{v}$, а вслед затем $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$. После этого находим

$$\mathbf{K}^\circ = \mathbf{K}_1^\circ + \mathbf{K}_2^\circ = \mathbf{R}\times\mathbf{Q} + \theta_1\cdot\boldsymbol{\omega} + \theta_2\cdot(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}_r) \tag{4}$$

$$2T_{(2)} = 2(T_1+T_2) = \frac{Q^2}{m_1+m_2} + \boldsymbol{\omega}\cdot\theta_1\cdot\boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}_r)\cdot\theta_2\cdot(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}_r) \tag{5}$$

Здесь

$$\theta_1 = \theta^{C_1} + \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(E\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}), \qquad \theta_2 = \theta^{C_2}, \qquad \mathbf{R} = \mathbf{r} + \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{\rho} \tag{6}$$

($\mathbf{R}$ — вектор-радиус OC центра инерции C системы, E — единичный тензор, $\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}$ — скалярное, $\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}$ — диадное произведения).

Обозначая еще через $\boldsymbol{\omega}^\circ$ вектор угловой скорости системы тел S_1, S_2, когда $\boldsymbol{\omega}_r = 0$, имеем

$$\mathbf{K}^c = \mathbf{K}^\circ - \mathbf{R}\times\mathbf{Q} = (\theta_1+\theta_2)\cdot\boldsymbol{\omega}^\circ = \theta_1\cdot\boldsymbol{\omega} + \theta_2\cdot(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}_r) \tag{7}$$

и далее

$$2(T_{(2)} - T_{(1+2)}) = \boldsymbol{\omega}.(\theta_1+\theta_2)\cdot\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_r\cdot\theta_2\cdot\boldsymbol{\omega}_r + 2\boldsymbol{\omega}\cdot\theta_2\cdot\boldsymbol{\omega}_r - \boldsymbol{\omega}^\circ\cdot(\theta_1+\theta_2)\cdot\boldsymbol{\omega}^\circ \tag{8}$$

Но по (7) [2]

$$\boldsymbol{\omega}^\circ - \boldsymbol{\omega} = (\theta_1+\theta_2)^{-1}\cdot\theta_2\cdot\boldsymbol{\omega}_r = \boldsymbol{\omega}_r\cdot\theta_2\cdot(\theta_1+\theta_2)^{-1} \tag{9}$$

---

[1] Заметка возникла при рассмотрении изобретательского предложения на двигатель, в котором предполагалось при помощи некоторого гироскопического устройства использовать энергию вращения Земли.

[2] В матричных обозначениях эти равенства записываются в виде

$$\boldsymbol{\omega}^\circ - \boldsymbol{\omega} = (\theta_1+\theta_2)^{-1}\theta_2\boldsymbol{\omega}_r, \qquad (\boldsymbol{\omega}^\circ-\boldsymbol{\omega})' = \boldsymbol{\omega}_r'\theta_2(\theta_1+\theta_2)^{-1}$$

причем штрихом указано транспонирование матрицы.

Здесь $(\Theta_1 + \Theta_2)^{-1}$ — тензор с матрицей компонентов, равный обратной матрице компонентов тензора $\Theta_1 + \Theta_2$. Используя (7) и (8), получаем после подстановки в (8)

$$2\left(T_{(2)} - T_{(1+2)}\right) = \omega_r \cdot \Theta_2 \cdot \omega_r - (\omega^\circ - \omega) \cdot (\Theta_1 + \Theta_2) \cdot (\omega^\circ - \omega) =$$
$$= \omega_r \cdot [\Theta_2 - \Theta_2 \cdot (\Theta_1 + \Theta_2)^{-1} \cdot \Theta_2] \cdot \omega_r = \omega_r \cdot Q \cdot \omega_r \tag{10}$$

где Q — тензор, показанный в квадратных скобках. В матричных обозначениях имеем

$$Q = \Theta_2 - \Theta_2 (\Theta_1 + \Theta_2)^{-1} \Theta_2, \qquad (\Theta_1 + \Theta_2)\, \Theta_2^{-1} Q = \Theta_1 + \Theta_2 - \Theta_2 = \Theta_1 \tag{11}$$

и далее

$$Q = (\Theta_1^{-1} + \Theta_2^{-1})^{-1}$$

и, поскольку Θ_1, Θ_2 — положительно- определенные матрицы, таковой будет также Q. Теорема доказана. Она имеет место независимо от размеров тел — их угловых скоростей, а также от характера сил взаимодействия между телами. Представляет интерес простая формула

$$T_{(2)} - T_{(1+2)} = \tfrac{1}{2}\omega_r \cdot (\Theta_1^{-1} + \Theta_2^{-1})^{-1} \cdot \omega_r \tag{12}$$

Поступила 10 VII 1964

ДВА ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ ТИПА ТРОЙНОЙ ВОЛНЫ

А. Ф. Сидоров (Свердловск)

В работах [1, 2] даны точные решения задачи о плоском нестационарном течении изотермического газа, возникающем при движении двух перпендикулярных поршней, и задачи об истечении в вакуум вдоль косой стенки политропного газа для $1 < \gamma < 3$ (где γ —показатель адиабаты); решения состоят из двойных и простых волн [1].

В предлагаемой заметке рассматриваются аналогичные задачи для пространственного случая. Дается точное решение задачи о течении изотермического газа, ограниченного тремя движущимися взаимно ортогональными плоскостями, а также задачи об истечении политропного газа в вакуум вдоль некоторого двугранного угла для $1 < \gamma < 2$. В этих решениях осуществляется последовательное примыкание волн ранга 0, 1, 2, и 3. Обобщение на пространственный случай не тривиально, так как тройные волны описываются переопределенной нелинейной системой уравнений в частных производных сложной структуры, исследование совместности которой весьма трудно.

1. В пространстве годографа u_1, u_2, u_3 (u_i — компоненты вектора скорости) система уравнений, описывающая тройные волны в предположении потенциальности и изэнтропичности течения, имеет вид [3]

$$\sum_{ik} A_{ik}^{\circ} L_{ik}^{j} = 0 \qquad \begin{pmatrix} j = 0, 1, 2 \\ i, k = 1, 2, 3 \end{pmatrix}, \quad A_{ik}^{\circ} = \delta_{ik}\theta - \varkappa^2 \theta_i \theta_k \qquad \left(\varkappa = \frac{1}{\gamma - 1}\right) \tag{1.1}$$

$$L_{ik}^{\circ} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} \varkappa\Pi_{mp} + \delta_{mp} & \varkappa\Pi_{np} + \delta_{np} \\ \varkappa\Pi_{mq} + \delta_{mq} & \varkappa\Pi_{nq} + \delta_{nq} \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

$$L_{ik}^{1} = (-1)^{i+k} \left\{ \begin{vmatrix} \varkappa\Pi_{mp} + \delta_{mp} & \varkappa\Pi_{np} + \delta_{np} \\ \varkappa\theta_{mq} + \delta_{mq} & \varkappa\theta_{nq} + \delta_{nq} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varkappa\theta_{mq} + \delta_{mp} & \varkappa\theta_{np} + \delta_{np} \\ \varkappa\Pi_{mq} + \delta_{mq} & \varkappa\Pi_{nq} + \delta_{nq} \end{vmatrix} \right\} \tag{1.3}$$

$$L_{ik}^{2} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} \varkappa\theta_{mp} + \delta_{mp} & \varkappa\theta_{np} + \delta_{np} \\ \varkappa\theta_{mq} + \delta_{mq} & \varkappa\theta_{nq} + \delta_{nq} \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

$$\Pi = \Pi(u_1, u_2, u_3), \qquad \theta = \theta(u_1, u_2, u_3), \qquad \Pi_{ik} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i \partial u_k}, \qquad \theta_{ik} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_i \partial u_k} \tag{1.5}$$

$$(m,\ n \neq k;\ m < n;\ p,\ q \neq i;\ p < q)$$

Здесь γ — показатель адиабаты, θ — квадрат скорости звука, δ_{ik} — символ Кронекера После нахождения функций Π и θ из системы трех уравнений (1.1) дви-