ОБ УРАВНЕНИЯХ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА

В. Н. Кошляков (Киев)

Настоящая статья является развитием работ [1, 2] в части, касающейся интегрирования уравнений, определяющих координаты движущегося по земной сфере объекта.

1. Задача автономного определения координат объекта, совершающего движение по поверхности Земли, может быть решена различными способами.

В работах [1, 2] рассмотрены два варианта инерциальных систем. В обоих вариантах на некоторое счетно-решающее устройство возлагается задача интегрирования системы нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$(U + \lambda^{\cdot}) \cos\varphi \sin\vartheta - \varphi^{\cdot} \cos\vartheta = \omega_x(t), \qquad (U + \lambda^{\cdot}) \cos\varphi \cos\vartheta + \varphi^{\cdot} \sin\vartheta = \omega_y(t)$$

$$(U + \lambda^{\cdot}) \sin\varphi + \vartheta^{\cdot} = \omega_z(t) \tag{1.1}$$

Здесь ω_x, ω_y, ω_z следует считать известными функциями t.

Будем иметь в виду второй из отмеченных выше вариантов инерциальной системы, состоящий из пространственного гирокомпаса, гироскопа направления и интегрирующего устройства [2]. В этом случае, как показано в [2, 3], можно всегда считать $\omega_x \equiv 0$, и тогда из (1.1) имеем

$$\varphi^{\cdot} = \omega_y \sin\vartheta, \qquad \vartheta^{\cdot} = \omega_z - \omega_y \cos\vartheta \operatorname{tg}\varphi, \qquad \lambda^{\cdot} = -U + \omega_y \cos\vartheta \sec\varphi$$

$$\left(\vartheta = \operatorname{arc\,tg} \frac{v_N}{RU\cos\varphi + v_E}\right) \tag{1.2}$$

Обозначения в (1.2) те же, что и в работах [2, 3]. Напомним, что φ и λ — текущие широта и долгота места, ϑ — текущее значение скоростной девиации гирогоризонткомпаса. Здесь v_N и v_E — соответственно северная и восточная составляющие скорости объекта относительно Земли. В рассматриваемой системе скоростная поправка к компасу вырабатывается автономно.

2. При исследовании систем типа (1.1) обычно используется в той или иной форме метод последовательных приближений. Представляя, например, первые два уравнения (1.2) в виде системы интегральных уравнений, получаем

$$\varphi = \varphi(0) + \int_0^t \omega_y(\tau) \sin\vartheta(\tau)\, d\tau, \qquad \vartheta = \vartheta(0) + \int_0^t \omega_z(\tau)\, d\tau - \int_0^t \omega_y(\tau) \cos\vartheta(\tau) \operatorname{tg}\varphi(\tau)\, d\tau \tag{2.1}$$

Здесь $\varphi(0)$ и $\vartheta(0)$ — начальные значения широты места и скоростной девиации.

По методу последовательных приближений можно полагать

$$\varphi^{(n)} = \varphi^{(0)} + \int_0^t \omega_y(\tau) \sin\vartheta^{(n-1)}(\tau)\, d\tau, \qquad \vartheta^{(n)} = \vartheta^{(0)} - \int_0^t \omega_y(\tau) \cos\vartheta^{(n-1)}(\tau) \operatorname{tg}\varphi^{(n-1)}(\tau)\, d\tau$$

$$\left(\varphi^{(0)} \equiv \varphi(0), \quad \vartheta^{(0)} \equiv \vartheta(0) + \int_0^t \omega_z(\tau)\, d\tau\right) \tag{2.2}$$

Применение этого метода к системе (2.1) имеет известное неудобство, состоящее в том, что фактическое выполнение квадратур быстро усложняется по мере вычисления приближений. Кроме того, строго говоря, следует установить промежуток изменения t, в котором решение системы (2.1) может быть получено по методу Пикара.

3. Положим в (1.1)

$$\lambda + Ut = \psi, \qquad {}^1\!/_2\,\pi - \varphi = \theta \tag{3.1}$$

и обозначим ϑ через φ_0. Тогда придем к уравнениям вида

$$\psi^{\cdot} \sin\theta \sin\varphi_0 + \theta^{\cdot} \cos\varphi_0 = \omega_x, \qquad \psi^{\cdot} \sin\theta \cos\varphi_0 - \theta^{\cdot} \sin\varphi_0 = \omega_y, \qquad \psi^{\cdot} \cos\theta + \varphi_0^{\cdot} = \omega_z \tag{3.2}$$

Система (3.2) имеет структуру кинематических уравнений Эйлера относительно переменных ψ, θ и φ_0. Таким образом, задача интегрирования системы (1.1) по заданным ω_x, ω_y и ω_z эквивалентна классической задаче определения положения твердого тела по его угловой скорости. В общем случае эта задача, приводящая к уравнению Риккати, к квадратурам не сводится [4]. Полагая в (3.2) $\omega_x = 0$ и, сверх того,

$$\gamma_1 = \sin\varphi_0 \sin\theta, \qquad \gamma_2 = \cos\varphi_0 \sin\theta, \qquad \gamma_3 = \cos\theta \tag{3.3}$$

получим уравнения Пуассона [5] для переменных γ_1, γ_2, γ_3

$$\gamma_1^{\cdot} = \omega_z\gamma_2 - \omega_y\gamma_3, \qquad \gamma_2^{\cdot} = -\omega_z\gamma_1, \qquad \gamma_3^{\cdot} = \omega_y\gamma_1 \tag{3.4}$$

Уравнения Родрига — Гамильтона для рассматриваемого случая будут

$$\begin{gathered} 2\lambda_0^{\cdot} = -\omega_y\lambda_2 - \omega_z\lambda_3, \qquad 2\lambda_1^{\cdot} = \omega_z\lambda_2 - \omega_y\lambda_3 \\ 2\lambda_2^{\cdot} = \omega_y\lambda_0 - \omega_z\lambda_1, \qquad 2\lambda_3^{\cdot} = \omega_z\lambda_0 + \omega_y\lambda_1 \end{gathered} \tag{3.5}$$

где

$$\begin{gathered} \lambda_0 = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi+\varphi_0}{2}, \qquad \lambda_1 = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi-\varphi_0}{2} \\ \lambda_2 = \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi-\varphi_0}{2}, \qquad \lambda_3 = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi+\varphi_0}{2} \end{gathered} \tag{3.6}$$

причем параметры λ_s удовлетворяют условию [4]

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \tag{3.7}$$

Представим (3.4) и (3.5) в виде эквивалентных систем интегральных уравнений:

$$\gamma_1 = \gamma_1(0) + \int_0^t (\omega_z\gamma_2 - \omega_y\gamma_3)\,d\tau, \qquad \gamma_2 = \gamma_2(0) - \int_0^t \omega_z\gamma_1\,d\tau, \qquad \gamma_3 = \gamma_3(0) + \int_0^t \omega_y\gamma_1\,d\tau \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered} \lambda_0 = \lambda_0(0) - \frac{1}{2}\int_0^t (\omega_y\lambda_2 + \omega_z\lambda_3)\,d\tau, \qquad \lambda_1 = \lambda_1(0) + \frac{1}{2}\int_0^t (\omega_z\lambda_2 - \omega_y\lambda_3)\,d\tau \\ \lambda_2 = \lambda_2(0) + \frac{1}{2}\int_0^t (\omega_y\lambda_0 - \omega_z\lambda_1)\,d\tau, \qquad \lambda_3 = \lambda_3(0) + \frac{1}{2}\int_0^t (\omega_z\lambda_0 + \omega_y\lambda_1)\,d\tau \end{gathered} \tag{3.9}$$

Здесь $\gamma_s(0)$ — начальные значения переменных γ_s, $\lambda_s(0)$ — начальные значения параметров Родрига — Гамильтона. Ввиду линейности систем (3.8) и (3.9), их симметричности и отсутствия тригонометрических функций от неизвестных величин, метод последовательных приближений проходит здесь более эффективно по сравнению с системой (1.1). В первом приближении имеем из (3.8) и (3.9)

$$\begin{aligned} \gamma_1^{(1)} &= \gamma_1(0) + \gamma_2(0)\,\Omega_z(t) - \gamma_3(0)\,\Omega_y(t) \\ \gamma_2^{(1)} &= \gamma_2(0) - \gamma_1(0)\,\Omega_z(t) \qquad \left(\Omega_{y,z}(t) = \int_0^t \omega_{y,z}(\tau)\,d\tau\right) \\ \gamma_3^{(1)} &= \gamma_3(0) + \gamma_1(0)\,\Omega_y(t) \end{aligned} \tag{3.10}$$

а также

$$\begin{aligned} \lambda_0^{(1)} &= \lambda_0(0) - {}^1/_2\,\lambda_2(0)\,\Omega_y(t) - {}^1/_2\,\lambda_3(0)\,\Omega_z(t) \\ \lambda_1^{(1)} &= \lambda_1(0) + {}^1/_2\,\lambda_2(0)\,\Omega_z(t) - {}^1/_2\,\lambda_3(0)\,\Omega_y(t) \\ \lambda_2^{(1)} &= \lambda_2(0) + {}^1/_2\,\lambda_0(0)\,\Omega_y(t) - {}^1/_2\,\lambda_1(0)\,\Omega_z(t) \\ \lambda_3^{(1)} &= \lambda_3(0) + {}^1/_2\,\lambda_0(0)\,\Omega_z(t) + {}^1/_2\,\lambda_1(0)\,\Omega_y(t) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Значения λ_s, определяемые формулами (3.11), удовлетворяют условию (3.7), если ограничиться членами лишь первого порядка относительно $\Omega_y(t)$ и $\Omega_z(t)$.

4. Пользуясь формулами (3.10) и принимая во внимание (3.3), получаем

$$\cos\theta = \cos\theta(0) + \sin\varphi_0(0)\sin\theta(0)\,\Omega_y(t)$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\sin\varphi_0(0)\sin\theta(0) + \cos\varphi_0(0)\sin\theta(0)\,\Omega_z(t) - \cos\theta(0)\,\Omega_y(t)}{\cos\varphi_0(0)\sin\theta(0) - \sin\varphi_0(0)\sin\theta(0)\,\Omega_z(t)} \tag{4.1}$$

Возвращаясь к старым переменным по (3.1), имеем

$$\sin\varphi = \sin\varphi(0) + \cos\varphi(0)\sin\vartheta(0)\,\Omega_y(t)$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sin\vartheta(0) + \cos\vartheta(0)\,\Omega_z(t) - \operatorname{tg}\varphi(0)\,\Omega_y(t)}{\cos\vartheta(0) - \sin\vartheta(0)\,\Omega_z(t)} \tag{4.2}$$

Для долготы из третьего уравнения системы (1.2) имеем

$$\lambda = \lambda(0) - Ut + \int_0^t \omega_y(\tau)\cos\vartheta(\tau)\sec\varphi(\tau)\,d\tau \tag{4.3}$$

Здесь φ и ϑ определяются по выражениям (4.2). Для первой оценки, заменяя ϑ и φ в (4.3) их начальными значениями, имеем

$$\lambda = \lambda(0) - Ut + \cos\vartheta(0)\sec\varphi(0)\,\Omega_y(t) \tag{4.4}$$

Более точную формулу для λ можно получить при помощи параметров Родрига — Гамильтона. Имеем из (3.6)

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2}{\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3} \tag{4.5}$$

Пользуясь формулами (3.11) и ограничиваясь членами лишь первого порядка относительно интегралов от ω_y и ω_z, имеем (4.6)

$$\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3 = \lambda_0(0)\lambda_1(0) - \lambda_2(0)\lambda_3(0) - [\lambda_0(0)\lambda_3(0) + \lambda_1(0)\lambda_2(0)]\,\Omega_y(t)$$

$$\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2 = \lambda_1(0)\lambda_3(0) + \lambda_0(0)\lambda_2(0) + {}^1/_2\,[\lambda_0^2(0) + \lambda_1^2(0) - \lambda_2^2(0) - \lambda_3^2(0)]\,\Omega_y(t)$$

Здесь в силу (3.6)

$$\lambda_0(0)\lambda_1(0) - \lambda_2(0)\lambda_3(0) = {}^1/_2\sin\theta(0)\cos\psi(0)$$

$$\lambda_1(0)\lambda_3(0) + \lambda_0(0)\lambda_2(0) = {}^1/_2\sin\theta(0)\sin\psi(0)$$

$$\lambda_0(0)\lambda_3(0) + \lambda_1(0)\lambda_2(0) = {}^1/_2\,[\sin\psi(0)\cos\varphi_0(0) + \cos\psi(0)\sin\varphi_0(0)\cos\theta(0)] \tag{4.7}$$

$$\lambda_0^2(0) + \lambda_1^2(0) - \lambda_2^2(0) - \lambda_3^2(0) = \cos\psi(0)\cos\varphi_0(0) - \sin\psi(0)\sin\varphi_0(0)\cos\theta(0)$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\sin\theta(0)\sin\psi(0) + [\cos\psi(0)\cos\varphi_0(0) - \sin\psi(0)\sin\varphi_0(0)\cos\theta(0)]\;\Omega_y(t)}{\sin\theta(0)\cos\psi(0) - [\sin\psi(0)\cos\varphi_0(0) + \cos\psi(0)\sin\varphi_0(0)\cos\theta(0)]\;\Omega_y(t)} \tag{4.8}$$

Возвращаясь к старым переменным, имеем окончательно (4.9)

$$\lambda = -Ut + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\lambda(0) + [\cos\lambda(0)\cos\vartheta(0)\sec\varphi(0) - \sin\lambda(0)\sin\vartheta(0)\operatorname{tg}\varphi(0)]\,\Omega_y(t)}{\cos\lambda(0) - [\sin\lambda(0)\cos\vartheta(0)\sec\varphi(0) + \cos\lambda(0)\sin\vartheta(0)\operatorname{tg}\varphi(0)]\,\Omega_y(t)}$$

5. По формулам (4.2), (4.3) и (4.9) можно оценить точность, с которой данная инерциальная система вырабатывает координаты местоположения при наличии погрешностей в показаниях гирокомпаса и гироазимута. В частности, при необходимости учета малых движений гирокомпаса (практически они всегда имеют место) в указанных формулах для ω_y и ω_z следует взять выражения

$$\omega_y = v/R + \omega\beta + \gamma^{\cdot}, \qquad \omega_z = -v/R\beta + \omega + \alpha^{\cdot}$$

где α, β и γ — углы, определяющие положение гирокомпаса [3].

Поступила 17 VI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Определение местоположения движущегося объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.
2. Ишлинский А. Ю. Об автономном определении местоположения движущегося объекта посредством пространственного гироскопического компаса, гироскопа направления и интегрирующего устройства. ПММ, 1959, т. 23, вып. I.
3. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
4. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, М., 1961.
5. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Гостехиздат, М., 1953.