Ее рассмотрение показывает, что при $C = A$ вращение с течением времени не меняется (динамическая симметрия), при $C > A$ тело в конце концов приходит во вращение относительно оси z ($r \to l / C$). При $C > A$ из (3.5) следует, что $r \to 0$ и $P \to l/A$, причем угловая скорость прецессии стремится к нулю, т. е. существует предельное положение оси вращения и оно лежит в плоскости xy.

Кроме того, следует заметить, что (как видно из (3.5)) при достаточно малом $\varkappa$ полученное решение медленно меняется со временем, что подтверждает справедливость сделанных предположений.

Автор благодарит Н. Н. Моисеева за внимание к работе и ценные замечания.

Поступила 6 V 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. Гостехиздат, М.— Л., 1947.
2. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. Гостехтеоретиздат, М., 1955.
3. Краснощеков П. С. О колебаниях физического маятника, имеющего полости, заполненные вязкой жидкостью. ПММ, 1963, 27, № 2, стр. 193—202.
4. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд-во АН СССР, М., 1951.

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МАЯТНИКА СО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

О. Б. Иевлева (Воронеж)

Рассматриваются колебания вокруг неподвижной оси осесимметрического тела со сферической полостью, наполненной вязкой несжимаемой жидкостью. Предполагается, что центр полости лежит на оси симметрии тела и ось вращения пересекает ось симметрии.

Выводится уравнение частот для малых колебаний.

1. Введем неподвижную систему координат XYZ, за начало которой примем точку O пересечения осей симметрии и вращения тела. Ось Z направим вертикально вниз, ось Y — по неподвижной оси. С телом свяжем жестко систему координат xyz, начало которой поместим в центре o сферической полости. Ось z направим по оси симметрии вниз, а оси x и y расположим в перпендикулярной плоскости так, чтобы в положении равновесия они были параллельны соответствующим осям неподвижной системы (фиг. 1). Положение тела определяется углом δ_1 между осями Z и z.

Пусть $\mathbf{V}$ — абсолютная скорость жидкой частицы, $\mathbf{U}$ — ее скорость относительно тела, тогда

$$\mathbf{V} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{U}$$

где $\mathbf{\Omega}$ — вектор угловой скорости тела, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор жидкой частицы относительно неподвижной точки. Линеаризованное уравнение кинетического момента системы тело + жидкость относительно оси Y имеет вид

$$A\delta_1'' + Qa\delta_1 + \gamma \frac{d}{dt} \int\limits_{\tau} (zU_x - xU_z)\, d\tau + \gamma b \frac{d}{dt} \int\limits_{\tau} U_x\, d\tau = 0$$

$$(A = A_1 + A_2) \qquad (1)$$

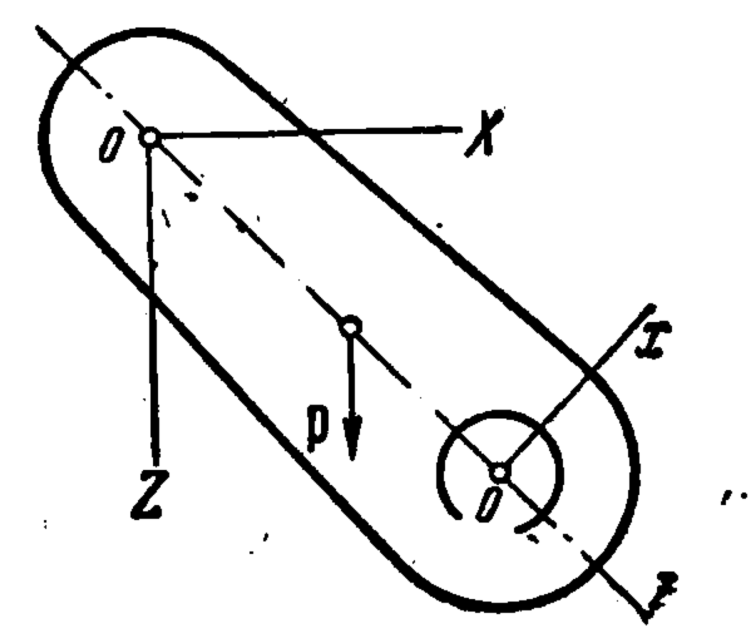
Здесь A_1 — момент инерции оболочки относительно оси Y и A_2 — момент инерции массы жидкости; Q — вес системы; a — расстояние центра тяжести системы до неподвижной оси; γ — плотность жидкости; τ — объем полости; b — расстояние центра полости от неподвижной оси.

2. Движение жидкости в полости тела отнесем к системе $oxyz$, связанной с твердым телом. Линеаризованные уравнения относительного движения в проекциях на оси подвижной системы $oxyz$ имеют вид

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} + \delta_1'' z = -\frac{\partial P_1}{\partial x} + \nu\Delta U_x$$

$$\frac{\partial U_y}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial y} + \nu\Delta U_y \qquad (2)$$

$$\frac{\partial U_z}{\partial t} - \delta_1'' x = -\frac{\partial P_1}{\partial z} + \nu\Delta U_z$$



Здесь

$$P_1 = \frac{1}{\gamma}P - \frac{1}{2}(\delta')^2(x^2 + z^2 + 2bz) + b\delta'' x$$

Если к уравнениям (2) добавить уравнение неразрывности и граничное условие

$$\operatorname{div} U = 0, \qquad U|_S = 0 \qquad (3)$$

(здесь S — поверхность сферической полости), то полученная система опишет движение жидкости в полости тела.

Перейдем в уравнениях (1), (2), (3) от координат x, y, z к сферическим ρ, θ, φ и введем комплексные функции u_ρ, u_θ, u_φ, p и δ такие, что

$$U_\rho = \mathrm{Re}\,(u_\rho), \quad U_\theta = \mathrm{Re}\,(u_\theta), \quad U_\varphi = \mathrm{Re}\,(u_\varphi), \quad P_1 = \mathrm{Re}\,(p), \quad \delta_1 = \mathrm{Re}\,(\delta)$$

и комбинации комплексных скоростей

$$u_+ = -{}^1/_2\sqrt{2}\,(u_\varphi + iu_\theta), \qquad u_0 = u_\rho, \qquad u_- = {}^1/_2\sqrt{2}\,(u_\varphi - iu_\theta)$$

3. Функции u_0, u_+, u_-, p ищем в виде рядов по обобщенным сферическим функциям [1] (4)

$$u_0 = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=-l}^{l} f_{0n}^{\,l}(\rho, t)\, T_{0n}^{\,l}({}^1/_2\pi - \varphi, \theta, 0), \quad u_+ = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=-l}^{l} f_{1n}^{\,l}(\rho, t)\, T_{1n}^{\,l}({}^1/_2\pi - \varphi, \theta, 0)$$

$$u_- = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=-l}^{l} f_{-1n}^{\,l}(\rho, t)\, T_{-1n}^{\,l}({}^1/_2\pi - \varphi, \theta, 0), \quad p = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=-l}^{l} F_n^{\,l}(\rho, t)\, T_{0n}^{\,l}({}^1/_2\pi - \varphi, \theta, 0)$$

$$T_{mn}^{\,l}({}^1/_2\pi - \varphi, \theta, 0) = P_{mn}^{l}(\cos\theta)\, e^{-in({}^1/_2\pi - \varphi)} \qquad (m = -1, 0, 1)$$

Здесь $f_{mn}^{\,l}$, $F_n^{\,l}$ — неизвестные функции ρ и t.

Подставив ряды (4) в уравнения, описывающие движение жидкости, легко убедиться, что на движение тела влияют лишь движения, описываемые членами этих рядов с индексами $l = 1$, $n = \pm 1$. Следовательно, для исследования движения тела достаточно найти функции

$$f_{0-1}^{\,1},\ f_{01}^{\,1},\ f_{-1-1}^{\,1},\ f_{-11}^{\,1},\ f_{+1-1}^{\,1},\ f_{11}^{\,1},\ F_{-1}^{\,1},\ F_1^{\,1}$$

Ищем их в виде рядов по собственным функциям задачи, связанной с колебаниями вязкой жидкости в неподвижном сосуде. Эти собственные функции являются решениями уравнений [2]

$$-k^2\mathbf{w} = -\nu^{-1}\operatorname{grad} p + \Delta\mathbf{w}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{w} = 0$$

при граничном условии $\mathbf{w}|_S = 0$.

Ограниченное в нуле решение этих уравнений имеет вид (4), где

$$f_{0n}^{\,1} = \frac{C_{1n}}{\nu k^2} + C_{2n}\frac{J_{3/2}(k\rho)}{(k\rho)^{3/2}}, \qquad F_n^{\,1} = C_{1n}\rho, \qquad C_{1n},\ C_{2n},\ C_n = \mathrm{const}$$

$$f_{\pm 1n}^{\,1} = -\frac{C_{1n}}{\nu k^2} + \frac{C_{2n}}{2}\left[\frac{J_{5/2}(k\rho)}{(k\rho)^{1/2}} - 2\frac{J_{3/2}(k\rho)}{(k\rho)^{3/2}}\right] \pm C_n\frac{J_{3/2}(k\rho)}{(k\rho)^{1/2}} \qquad (5)$$

Удовлетворяя граничному условию $\mathbf{w}|_S = 0$ и полагая C_{1n} и C_{2n} равными нулю, так как члены (5), содержащие эти постоянные, не влияют на движение тела, ищем u_0, u_+, u_- в виде

$$u_0 = 0$$

$$u_\pm = \pm \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_{3/2}(k_j\rho)}{(k_j\rho)^{1/2}} \left[C_{-1}{}^j (t)\, T_{\pm 1-1}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0\right) + C_1{}^j (t)\, T_{\pm 11}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0\right) \right] \qquad (6)$$

где k_j — положительный корень функции Бесселя $J_{3/2}(kR)$ или уравнения

$$\operatorname{tg} kR = kR \qquad (7)$$

4. Для определения функций $C_{-1}{}^j(t)$, $C_1{}^j(t)$ подставим решения (6) в уравнения движения жидкости и приравняем коэффициенты при одинаковых функциях $T_{mn}{}^1\,(^1/_2\pi - \varphi, \theta, 0)$ в каждом из уравнений. Тогда получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \left(\frac{dC_n{}^j}{dt} + \nu k_j{}^2 C_n{}^j \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \rho \delta'' \qquad \left(\varphi_j = \frac{J_{3/2}(k_j\rho)}{(k_j\rho)^{1/2}} \right)$$

где k_j — положительные корни уравнения (7) и $n = \pm 1$.

Разложив ρ в ряд по функциям φ_j, подставив этот ряд в предыдущее уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых φ_j, получим следующие уравнения:

$$\frac{dC_n{}^j}{dt} + \nu k_j{}^2 C_n{}^j - \delta'' \sqrt{\pi}\, \frac{\sqrt{1 + (k_j R)^2}}{k_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, \infty;\ n = \pm 1) \qquad (8)$$

К этим уравнениям следует добавить уравнение движения тела

$$A\delta'' + Qa\delta - \frac{8}{3}\gamma \sqrt{\pi} R^3 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k_j \sqrt{1 + (k_j R)^2}} \left(\frac{dC_{-1}{}^j}{dt} + \frac{dC_1{}^j}{dt} \right) = 0 \qquad (9)$$

Ищем решения систем (8) и (9), пропорциональные $e^{\lambda t}$. Тогда получаем характеристическое уравнение, которое после простых преобразований принимает вид

$$0.1\, \frac{Qa}{J} \frac{1}{\lambda^2} + 0.1\, \frac{A - J}{J} = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{s_j{}^2 + R^2 \nu^{-1} \lambda} \qquad (J = {}^8/_{15}\, \gamma \pi R^5) \qquad (10)$$

Здесь введено обозначение J — момент инерции массы жидкости относительно диаметра полости, s_j — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} s = s$, при этом использовано соотношение $s_1{}^{-2} + s_2{}^{-2} + s_3{}^{-2} + \ldots = 0.1$.

Уравнение (10) имеет счетное множество отрицательных корней, отвечающих затухающим (апериодическим) движениям тела, и пару комплексно сопряженных корней, отвечающих колебательным движениям тела.

Если в уравнении (10) перейти к пределу при $\nu \to \infty$ или при $\nu \to 0$, то получится уравнение частот для колебания тела с отвердевшей жидкостью или для колебания тела, наполненного идеальной жидкостью. Следует отметить, что в недавней работе П. С. Краснощекова [3] рассмотрен приближенный метод решения задачи о колебаниях маятника с полостью, заполненной вязкой жидкостью.

Поступила 11 VII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращения и группы Лоренца. Физматгиз, 1958.
2. Литвинков С. С. Об одной граничной задаче для линеаризованных уравнений гидродинамики вязкой жидкости. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 5.
3. Краснощеков П. С. О колебаниях физического маятника, имеющего полости, заполненные вязкой жидкостью. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.