О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, СОДЕРЖАЩЕГО ПОЛОСТИ, ЗАПОЛНЕННЫЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Б. Н. Румянцев (Москва)

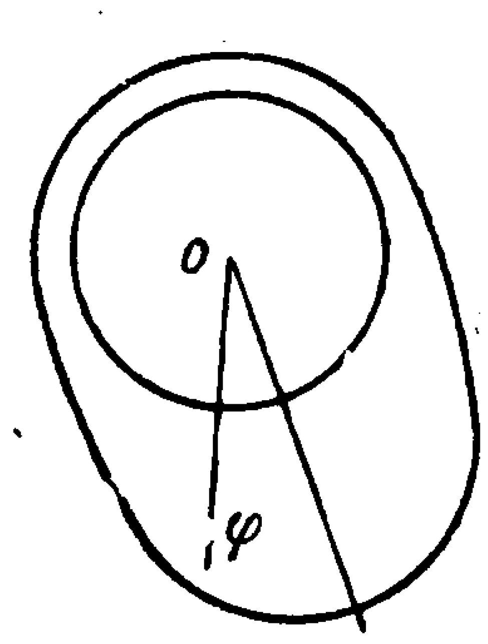
Рассматривается задача о движении твердого тела, имеющего полость цилиндрической (плоское движение) или шаровой формы, заполненную вязкой жидкостью. В случае малых колебаний тела с цилиндрической полостью решение проводится операционным методом. Для общего случая предлагается метод расчета, применимый при очень вязкой жидкости, когда интегро-дифференциальные уравнения движения сводятся к обыкновенным с малым параметром при старшей производной. Результаты применяются к теории вращения тела относительно неподвижной точки.

1. Исследование отдельных случаев движения тел, содержащих полости с заключенной в них вязкой жидкостью, излагается в [1, 2] и других работах, часто — как пример использования операционных методов. В [3] рассматривались колебания тела при условии, что число Рейнольдса велико, при этом для исследования движения жидкости использовалось приближение пограничного слоя. Ниже рассматривается задача о движении тела, содержащего вязкую жидкость, в случае таких полостей, для которых известно решение некоторой нестационарной гидродинамической задачи.

Сначала будет рассматриваться наиболее простой случай плоской задачи. Пусть имеется твердое тело, содержащее полость в форме кругового цилиндра, ось которого совпадет с осью вращения тела (фиг. 1). Случай, когда ось вращения не совпадет с осью центра, не приводит к существенному усложнению задачи. Пусть нужно решить задачу о малых колебаниях такого тела при наличии возвращающего момента, пропорционального отклонению. Будет рассматриваться только случай нулевых скоростей жидкости в начале движения. В общем случае произвольного начального распределения скоростей вследствие линейности задачи нужно только найти суперпозицию полученного ниже решения и решения задачи о движении тела при отсутствии внешних сил и при произвольном начальном распределении скоростей жидкости [2].

Для дальнейшего требуется знать решение задачи о движении вязкой жидкости в цилиндре, когда цилиндр из состояния покоя мгновенно приходит во вращение с постоянной угловой скоростью ω. Это решение будет получено при учете [2]. Траектории частиц жидкости можно считать круговыми. Из этого вытекает, что $v_r = 0$ и $\partial v_\varphi / \partial \varphi = 0$, где v_r и v_φ — составляющие скорости частиц жидкости вдоль радиуса и по перпендикуляру к нему, φ — центральный угол. Тогда уравнение Навье — Стокса примет вид

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t_1} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right)$$



Фиг. 1

Решение нужно искать при начальном и граничном условиях

$$v_\varphi = 0, \quad \text{при } t = 0, \qquad v_\varphi = \omega a \quad \text{при } r = a$$

Применение метода преобразования Лапласа приводит к следующему выражению для скорости жидкости:

$$v_\varphi (r, t_1) = \omega a \left[\frac{r}{a} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left(- \nu \frac{\lambda_k^2}{a^2} t_1 \right) \frac{J_1(ra^{-1}\lambda_k)}{\lambda_k J_1' (\lambda_k)} \right]$$

Здесь ν — кинематический коэффициент вязкости, a — радиус цилиндра, λ_k — корни функции Бесселя первого порядка.

Используя выражение для скорости деформации сдвига в полярных координатах, можно установить, что сила вязкости для кругового движения жидкости определяется по формуле

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right)$$

где μ — динамический коэффициент вязкости.

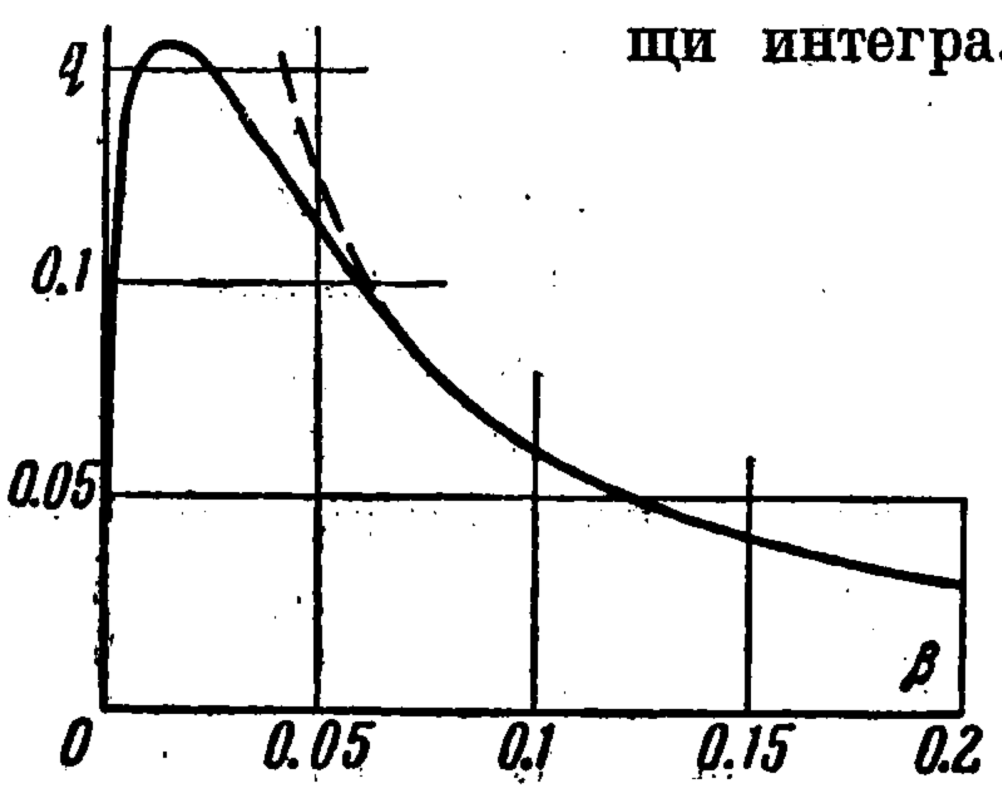
Выражение для момента сил, действующих со стороны жидкости на стенки цилиндра, получим, пользуясь последними двумя формулами, в следующем виде

$$L_1 = L\omega = 4\pi\mu a^2\omega \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\nu \frac{\lambda_k^2}{a^2} t_1\right) \tag{1.1}$$

Пусть J — момент инерции тела, $M\varphi$ — момент возвращающейся силы; тогда уравнение движения тела имеет вид

$$J \frac{d^2\varphi}{dt_1^2} + M\varphi = N$$

Здесь N — момент, действующий на тело со стороны жидкости. Выражение для него легко найти, если известны решение соответствующей гидродинамической задачи (1.1) и закон изменения угловой скорости $\omega(t_1)$, при помощи интеграла Дюамеля [2]:



Фиг. 2

$$N = -\int_0^{t_1} \omega'(\tau) L(a, t_1 - \tau)\, d\tau$$

В рассматриваемом случае величина угловой скорости $\omega(t_1) = d\varphi / dt_1$ неизвестна, поэтому уравнение движения получается интегро-дифференциальным. При переходе к безразмерным переменным

$$t = t_1 \left(\frac{M}{J}\right)^{1/2}, \qquad \beta = \frac{\nu}{a^2}\left(\frac{J}{M}\right)^{1/2}, \qquad \gamma = \frac{\mu a^2}{\sqrt{MJ}}$$

уравнение движения преобразуется к следующему виду:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \varphi = -4\pi\gamma \int_0^t \frac{d^2\varphi}{dt^2} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left[-\beta\lambda_k^2 (t - \tau)\right] d\tau \tag{1.2}$$

Это линейное уравнение будем решать методами операционного исчисления. Пусть Φ обозначает преобразование Лапласа

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} \varphi(t)\, e^{-pt}\, dt = [\varphi(t)]^*$$

Применение преобразования Лапласа к обеим частям (1.2) и последующая перестановка порядка интегрирования, проведенная аналогично [2], приводят к формуле

$$[\varphi''(t)]^* + \Phi = -4\pi\gamma\, [\varphi''(t)]^* \sum_{k=1}^{\infty} (p + \beta\lambda_k^2)^{-1}$$

Отсюда, используя известное равенство $[\varphi'(t)]^* = p\Phi(p) - \varphi(0)$ и начальные условия $\varphi(0) = \varphi_0 = \text{const}$ и $\varphi'(0) = 0$, получаем согласно формуле обращения

$$\varphi(t) = \frac{\varphi_0}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} e^{pt} \left(1 + 8\sigma \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p\beta^{-1} + \lambda_k^2}\right) \left[1 + p^2 \left(1 + 8\sigma \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p\beta^{-1} + \lambda_k^2}\right)\right]^{-1} dp$$

$$\left(\sigma = \frac{\pi\gamma}{2\beta} = \frac{\pi\rho a^4}{2J} = \frac{J_1}{J}\right) \tag{1.3}$$

Здесь δ — малая положительная величина. В этот интеграл входят характерные безразмерные величины β и σ, где ρ — плотность жидкости. Первая из них характеризует отношение сил вязкости к внешним силам, вторая — соотношение между моментами инерции: затвердевшей жидкости J_1 и тела J. Чтобы определить движение, нужно вычислить интеграл (1.3), что можно сделать для каждой конкретной пары значений β и σ. Легко заметить, что подынтегральное выражение имеет счетное множество полюсов на отрицательной вещественной полуоси и два полюса в комплексносопряженных точках слева от мнимой оси.

В важном для практики случае, когда масса жидкости составляет меньшую часть массы всего тела, абсолютная величина действительной части комплексно сопряженных корней значительно меньше, чем модуль наименьшего корня знаменателя на действительной оси. Это значит, что соответствующее движение медленнее всего затухает, и поэтому его анализ представляет наибольший интерес при исследовании колебаний тела с жидкостью.

При значении $\sigma = 1.6$ и при различных значениях β производились расчеты действительной части комплексных корней $q = -\operatorname{Re} p_k$, знаменателя уравнения (1.3), которая равняется логарифмическому декременту затухания колебаний. Для этого в знаменателе (1.3) приравнивались нулю по отдельности действительная и мнимая части. Результаты вычислений представлены на фиг. 2 (сплошная кривая). Из этого графика можно сделать общий вывод, что затухание максимально при некотором конечном значении β и что оно равно нулю при $\beta = 0$, когда жидкость идеальна и не участвует в движении тела, и при $\beta = \infty$, когда жидкость вращается вместе со стенками полости как твердое тело.

2. В дальнейшем будет рассматриваться предельный случай вращения тела с жидкостью, когда β велико, т. е. когда жидкость вращается почти как твердое тело. Двукратное применение интегрирования по частям в правой части (1.2) приводит к уравнению

$$\varphi'' + \varphi = -4\pi\gamma\Big(\varphi'' \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} - \varphi''' \frac{1}{\beta^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^4} + {}$$
$$+ \frac{1}{\beta^3} \int_0^t \varphi^{\mathrm{IV}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^6} \exp\left[-\beta\lambda_k^2 (t-\tau)\right] d\tau\Big) \tag{2.1}$$

Решение уравнения (2.1) будет разыскиваться в классе функций, ограниченных вместе с первыми четырьмя производными; очевидно, что при этом последний член в (2.1) есть $O(\beta^{-3})$ и, стало быть, им можно пренебречь по сравнению с предыдущим при достаточно больших β. Справедливость этого предположения подтвердится, если полученное из (2.1) укороченное уравнение будет иметь решения с ограниченными четырьмя производными.

Суммы, входящие в (2.1), известны из теории функций Бесселя; после замены их численными значениями и отбрасывания интегрального члена получается уравнение

$$-\varepsilon_1\varphi''' + (1+\sigma)\varphi'' + \varphi = 0 \qquad (\varepsilon_1 = {}^1/_{12}\sigma\beta)$$

Здесь ε_1 — малая величина. Пусть $t' = t / \sigma$ новая независимая переменная и $\varepsilon = \varepsilon_1 / (1+\sigma)^{3/2}$.

Последнее уравнение приобретает вид

$$-\varepsilon\varphi''' + \varphi'' + \varphi = 0 \tag{2.2}$$

Общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$\varphi = A \exp\left(-{}^1/_2\varepsilon t'\right) \sin(t' + B) + C \exp(t' / \varepsilon) \tag{2.3}$$

По условию ограниченности решения в бесконечности постоянная C должна равняться нулю. Таким образом, при большом β тело совершает затухающие колебания с логарифмическим декрементом затухания, равным $q = \sigma / 24\beta\ (1+\sigma)^{5/2}$.

На фиг. 2 построена зависимость q от β (штриховая кривая) при значении $\sigma = 1.6$, т. е. при том же σ, что и при расчетах предыдущего раздела.

Формулу (2.3) (при $C = 0$) можно получить и непосредственно из (1.3), вычисляя действительную и мнимую части комплексно сопряженных корней (остальные корни при $\beta \to \infty$ уходят в $-\infty$). В самом деле, разложение сумм, входящих в (1.3), по степеням $p / \beta\lambda_k^2$ согласно формуле бинома Ньютона приводит, если ограничиться двумя членами, к следующему представлению

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{p}{\beta}+\lambda_k^2\right)^{-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}-\frac{p}{\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^4}+\ldots=\frac{1}{8}-\frac{p}{\beta}\frac{1}{96}+\ldots$$

Уравнение для определения корней знаменателя в первом приближении имеет следующий вид:

$$1+p^2\left(1+\sigma-\frac{\sigma}{12}\frac{p}{\beta}\right)=0$$

Из этого уравнения путем последовательного вычисления нулевого и первого приближений легко получается выведенная выше формула для $q=-\operatorname{Re} p$, а после вычисления вычетов в корнях подынтегрального выражения (1.3) также и формула (2.3). Последний способ решения, к сожалению, не удается применить к нелинейным задачам.

3. В дальнейшем будет рассматриваться движение тела, имеющего сферическую полость с вязкой жидкостью, центр которой совпадает с центром инерции тела и с точкой закрепления. Будет видно, что аналогично можно решить эту задачу и в случае полости любой другой формы, если только известно решение гидродинамической задачи о движении жидкости, когда тело начинает вращаться с постоянной угловой скоростью, причем от этой скорости решение зависит линейно. В случае сферической полости такое решение гидродинамической задачи известно, когда число Рейнольдса мало [2]. При этом частицы жидкости движутся по параллельным кругам. Этот случай и будет рассматриваться ниже. Формула для момента сил, приложенных со стороны жидкости к телу, если оно начинает вращаться с постоянной угловой скоростью ω, имеет вид [2]

$$\omega L=\frac{16}{3}\pi\mu\omega a^3\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-\nu\frac{\delta_k^2}{a^2}t_1\right)$$

где a — радиус шара, δ_k — корни уравнения $\delta=\operatorname{tg}\delta$.

В дальнейшем будет рассматриваться только тот случай, когда внешние силы отсутствуют (случай Эйлера), тогда уравнение движения в векторной форме имеет вид

$$\frac{d\mathbf{K}_1}{dt_1}=-\int_0^{t_1}\frac{d\mathbf{\Omega}_1}{d\tau}L(t_1-\tau)\,d\tau$$

Здесь d/dt_1 — абсолютная производная по времени, $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{\Omega}_1$ — векторы момента количеств движения и мгновенной угловой скорости. Если разделить обе части этого уравнения на ω_0^2J, где ω_0 — начальная угловая скорость тела, J — момент инерции относительно какой-нибудь оси, и ввести безразмерные величины

$$t=t_1\omega_0,\qquad \beta=\nu/a^2\omega_0,\qquad \gamma=\mu a^3/J\omega_0$$

$$A_0=A_1/J,\quad B_0=B_1/J,\quad C_0=C_1/J,\quad \mathbf{K}=\mathbf{K}_1/J\omega_0,\quad \mathbf{\Omega}=\mathbf{\Omega}_1/\omega_0$$

то уравнение движения в безразмерных переменных примет вид

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt}=-\frac{16}{3}\pi\gamma\int_0^t\frac{d\mathbf{\Omega}}{d\tau}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-\beta\delta_k^2(t-\tau)\right)d\tau \tag{3.1}$$

Пусть β, как и в предыдущем пункте,— большой параметр, и пусть требуется найти ограниченные решения (3.1), удовлетворяющие заданным начальным условиям для $\mathbf{\Omega}$. Двукратное интегрирование по частям, проведенное аналогично предыдущему, и отбрасывание интегрального члена, имеющего более высокий порядок малости, приводит к уравнению

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt}=-\frac{16}{3}\pi\gamma\left(\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt}\frac{1}{\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\delta_k^2}-\frac{d^2\mathbf{\Omega}}{dt^2}\frac{1}{\beta^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\delta_k^4}\right) \tag{3.2}$$

Для решения последнего уравнения удобно ввести подвижную систему координат, связанную с телом, и направить ее оси по главным осям инерции. Переход от абсолютных производных к производным в подвижной системе координат (которые будут обозначаться символом d' / dt или штрихом) производится по формуле [4] (где $\mathbf{h}$ — произвольный вектор)

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \frac{d'\mathbf{h}}{dt} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{h}$$

При этом (3.2) приобретает вид

$$\frac{d'\mathbf{K}}{dt} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{K} = -D\,\frac{d'\mathbf{\Omega}}{dt} + \varkappa\left(\frac{d'^2\mathbf{\Omega}}{dt^2} + \mathbf{\Omega} \times \frac{d'\mathbf{\Omega}}{dt}\right)$$

$$\left(DJ = \frac{8\pi\rho a^5}{15},\quad \varkappa \approx \frac{0.028D}{\beta}\right)$$

Здесь DJ — момент инерции затвердевшей жидкости, $\varkappa$ — постоянный малый параметр. В скалярной форме имеем

$$\begin{aligned} &Ap' + (C - B)\,qr = \varkappa\,(p'' + qr' - rq') \\ &Bq' + (A - C)\,rp = \varkappa\,(q'' + rp' - pr') \\ &Cr' + (B - A)\,pq = \varkappa\,(r'' + pq' - qp') \end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь $A = A_0 + D$, $B = B_0 + D$, $C = C_0 + D$, а p, q и r — проекции угловой скорости на подвижные оси.

В дальнейшем будет рассматриваться только случай осесимметричного тела, когда $A = B$. При этом, если $C > A$ и $\varkappa = 0$, т. е. в случае затвердевшей жидкости, решение уравнений (3.3) имеет вид

$$r = r_0, \qquad p = P_0 \cos(\omega t + \alpha), \qquad q = P_0 \sin(\omega t + \alpha), \qquad \omega = (C - A) / Ar_0 \tag{3.4}$$

Здесь P_0, r_0 и α некоторые константы. Движение, описываемое формулами (3.4), есть регулярная прецессия. В дальнейшем при $\varkappa$ малом, но конечном, решение будет разыскиваться в виде (3.4), где r_0, P_0 и ω, замененные на r, P и ω, будут считаться медленными функциями времени. В самом деле, при достаточно малых $\varkappa$ в течение небольшого отрезка времени (сравнимого с $2\pi / \omega$) движение тела должно быть близко к регулярной прецессии, т. е. r и P должны измениться мало. Из уравнений (3.3) в нулевом приближении следует

$$P^2 = (l^2 - C^2r^2) / A^2$$

где l^2 — постоянная моментов. Но так как l^2, в силу закона сохранения момента количеств движения, не может меняться со временем, это уравнение справедливо для всех моментов времени. Оно дает связь между P и r. Уравнение же для определения r получается путем подстановки (3.4) в последнее из уравнений (3.3) и отбрасывания членов, имеющих порядок малости выше первого

$$Cr' - \varkappa\,(C - A)\,P^2r / A = 0$$

Отметим, что при выводе последнего соотношения пренебрегалось членом $\varkappa r''$, который имеет второй порядок малости вследствие того, что искомое решение медленно меняется со временем. Вычисление квадратуры приводит к формуле

$$(l^2 - C^2r^2)^{1/2}\,r^{-1} = E \exp\left[-\varkappa\,(C - A)\,l^2t/A^3C\right] \tag{3.5}$$

где E — постоянная интегрирования. Формула (3.5) выводилась в предположении, что $C > A$, т. е. что тело сплюснуто. При $C < A$, т. е. в случае вытянутого тела, решение нельзя искать в виде (3.4), так как тогда $\omega < 0$, что лишено физического смысла. Вместо этого следует воспользоваться следующим решением уравнений (3.3):

$$r = r_0, \qquad p = P_0 \sin(\omega t + \alpha), \qquad q = P_0 \cos(\omega t + \alpha), \qquad \omega = (A - C)\,r_0/A$$

Затем аналогичные рассуждения приводят снова к формуле (3.5). Таким образом, эта формула дает асимптотическое решение поставленной задачи во всех случаях.