ЗАМЕЧАНИЯ К СТАТЬЕ «НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА»

С. В. Симеонов

(София, Болгария)

В статье [1] были рассмотрены [1] некоторые методы решения нелинейных уравнений вида (1.3) *

$$Ax = 0 \qquad (Ax = \operatorname{grad} f(x)) \tag{1}$$

где $f(x)$ — некоторый функционал, заданный в вещественном гильбертовом пространстве H. Для решения уравнения (1), в частности, применялся процесс (2.2) *

$$x^{(\nu+1)} = x^{(\nu)} - \alpha B^{-1} A x^{(\nu)} \qquad (\alpha = \text{const} > 0) \tag{2}$$

где B — некоторый положительно определенный оператор, удовлетворяющий условию (2.4)*.

Здесь рассмотрим быстроту сходимости процесса (2), а также тот класс функций, в котором сходится этот процесс в случае, когда A и B —дифференциальные операторы. Начнем со второго вопроса.

Предположим, что в соответствующем пространстве существует производная $A'(x)$ дифференциального оператора A, вид которой уточним дальше. Пусть коэффициенты дифференциального оператора $A'(x)$ — ограниченные функции, а порядок его наивысшей производной равен $2n$.

Примем в качестве пространства H гильбертово пространство $W_2^{(n)}$ функций, n-е производные которых являются функциями из L_2.

Рассмотрим квадратичный функционал $F(x, h) = (A'(x)h, h)$. Если контурные интегралы при интегрировании по частям исчезают, то $F(x, h)$ содержит производные функции h не выше n-го порядка. Тогда при принятых условиях $F(x, h)$ — ограниченный функционал в $W_2^{(n)}$. А если он и непрерывный по x, то $A'(x)$ — симметричный оператор [2]. Из ограниченности функционала $F(x, h)$ следует, что $A'(x)$ также ограничен, и поэтому есть производная Фреше оператора A. Тогда последний также непрерывен в $W_2^{(n)}$ [3]. Как видно из (1.2)*, непрерывен в $W_2^{(n)}$ и функционал $f(x)$.

Пусть B — дифференциальный оператор того же порядка, что и $A'(x)$. Подберем его коэффициенты так, чтобы, кроме условия (2.4)*, удовлетворялись также и следующие

$$m\|h\| \leqslant (Bh, h), \qquad |(Bh_1, h_2)| \leqslant M\|h_1\|\|h_2\| \qquad (h, h_1, h_2 \in H_1 \subset W_2^{(n)}) \tag{3}$$

Нормы в (3) берутся в $W_2^{(n)}$. Тогда из (2.6)* получаем

$$\|x^{(\nu)} - x^{(\nu+1)}\| \leqslant \frac{1}{m}(Bh^{(\nu)}, h^{(\nu)}) \leqslant \frac{1}{m\mu}[f(x^{(\nu)}) - f(x^{(\nu+1)})] \qquad \left(\mu = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}K > 0\right)$$

Отсюда следует, что

$$\|x^{(\nu+p)} - x^{(\nu)}\|_{W_2^{(n)}} \leqslant \frac{1}{m\mu}[f(x^{(\nu)}) - f(x^{(\nu+p)})]$$

Так как $\{f(x^{(\nu)})\}$ — сходящаяся последовательность, то $\{x^{(\nu)}\}$ сходится в себе, т. е. предельный элемент $x' \in W_2^{(n)}$.

Подобно [4] обобщенным решениям уравнения (1) будем называть такую функцию x^*, которая при любом $h \in H_1$ удовлетворяет условию

$$(Ax^*, h) = 0 \tag{4}$$

Здесь левая часть рассматривается как первая вариация функционала $f(x)$.

---

[1] При изложении звездочкой будут отмечены номера формул, цитируемых из работы [1].

Здесь также предполагается, что контурные интегралы исчезают. Тогда (2) можно записать в следующем виде:

$$(Bh^{(\nu)}, h) = -\alpha(Ax^{(\nu)}, h) \qquad (h \in H_1) \tag{5}$$

Так как последовательность $\{h^{(\nu)}\}$ стремится к нулю [1] в $W_2^{(n)}$, то из (3) следует, что левая часть равенства (5) при $\nu \to \infty$ также стремится к нулю. Тогда, имея в виду непрерывность оператора A, из (5) получаем, что при $x^{(\nu)} \to x'$ имеем $(Ax^{(\nu)}, h) \to (Ax', h) = 0$, т. е. $x' = x^*$ будет обобщенным решением уравнения (1).

Пусть теперь $f(x)$ задан в пространстве H. Докажем, что если в H оператор B удовлетворяет условию (3), и, кроме того, имеет место условие

$$0 < \gamma \| h \|^2 \leqslant W(x, h) \leqslant KM \| h \|^2 \qquad (x, h \in H) \tag{6}$$

где константы $\gamma, K > 0$ $(\gamma < M)$, то процесс (2) сходится с быстротой геометрической прогрессии с знаменателем $|q| < 1$. Оптимальное значение коэффициента α, при котором обеспечивается наилучшая сходимость, есть некоторое значение $\alpha > 1 / K$.

Из (2.5) * и (2), имея в виду, что $(B^{-1}x, x) \geqslant M^{-1} \| x \|^2$, получаем

$$f(x^{(\nu)}) - f(x^{(\nu+1)}) \geqslant \alpha(1 - {}^1/_2\, \alpha K)(B^{-1}Ax^{(\nu)}, Ax^{(\nu)}) \geqslant \alpha M^{-1}(1 - {}^1/_2\, \alpha K) \|Ax^{(\nu)}\|^2 \tag{7}$$

С другой стороны

$$f(x^*) - f(x) = -(Ax, x - x^*) + {}^1/_2 W(x, x - x^*)$$
$$f(x) - f(x^*) = {}^1/_2 W(x^*, x - x^*)$$

Отсюда получаем

$${}^1/_2 W(x^*, x - x^*) = (Ax, x - x^*) - {}^1/_2 W(x, x - x^*) \leqslant (Ax, x - x^*)$$

и поэтому

$$f(x) - f(x^*) \leqslant (Ax, x - x^*) \tag{8}$$

Условие (6) представим так:

$$\gamma \| h \|^2 \leqslant (A(x + h) - Ax, h) \leqslant KM \| h \|^2$$

Тогда $(Ax, h) = (Ax - Ax^*, h) \geqslant \gamma(h, h)$ и из неравенства $(Ax, h)^2 \leqslant (Ax, Ax)(h, h)$ следует $|(Ax, h)| \leqslant \gamma^{-1} \| Ax \|^2$. Подставив последнее в (8), получим

$$f(x) - f(x^*) \leqslant \gamma^{-1} \| Ax \|^2 \tag{9}$$

Введем [5] обозначения $\varphi(x) = f(x) - f(x^*)$. Тогда из (7) и (9) следует

$$\varphi(x^{(\nu)}) - \varphi(x^{(\nu+1)}) \geqslant \gamma M^{-1} \alpha(1 - {}^1/_2\, \alpha K)\, \varphi(x^{(\nu)})$$

Отсюда следует $q\varphi(x^{(\nu)}) \geqslant \varphi(x^{(\nu+1)})$, где $q = 1 - \gamma M^{-1}\alpha(1 - {}^1/_2\, \alpha K)$. Если $0 < \varepsilon_1 \leqslant \alpha \leqslant \varepsilon_2 < 2 / K$, то $q < 1$, и получаем

$$f(x^{(n)}) - f(x^*) \leqslant q^n [f(x^{(0)}) - f(x^*)] \tag{10}$$

т. е. $\{f(x^{(\nu)})$ стремится к $f(x^*)$ с быстротой геометрической прогрессии. Константа q достигает наименьшего значения при $\alpha = 1 / K$, когда $q = 1 - \gamma / 2MK$. Константа K — обычно завышенная, поэтому нужно брать α несколько больше, чем $1 / K$.

Из (2.6)* следует

$$(Bh^{(\nu)}, h^{(\nu)}) \leqslant \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}K\right)^{-1} [f(x^{(\nu)}) - f(x^{(\nu+1)})] \leqslant \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}K\right)^{-1} \varphi(x^{(\nu)})$$

или

$$\| h^{(\nu)} \| \leqslant \frac{1}{m}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}K\right)^{-1} \varphi(x^{(\nu)}) = r\varphi(x^{(\nu)})$$

Тогда

$$\| x^{(n+p)} - x^{(n)} \| \leqslant \sum_{\nu=n}^{n+p-1} \| h^{(\nu)} \| \leqslant r\varphi(x^{(0)}) \sum_{\nu=n}^{n+p-1} q^\nu$$

Так как $q < 1$, то

$$\| x^{(n)} - x^* \| \leqslant \frac{1}{m} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} K \right)^{-1} \frac{q^n}{1 - q} \varphi (x^{(0)})$$

Таким образом, сходимость $\{x^{(\nu)}\}$ происходит с той же быстротой, с которой сходится и $\{f (x^{(\nu)})\}$.

Как было отмечено в [1], процесс (2) обобщает модифицированный метод Ньютона. Но если в общем случае последний сходится только при начальном приближении $x^{(0)}$, довольно близком к x^* [3], то в рассматриваемом случае потенциальных операторов процесс (2) сходится к решению уравнения (1) независимо от начального приближения.

В (1) была рассмотрена также сходимость метода Галеркина, которая дальше использовалась при доказательстве сходимости метода частичной аппроксимации. При доказательстве первого метода были приняты некоторые довольно жесткие предположения, которые оказываются излишними; однако сходимость метода Галеркина в случае уравнений с потенциальными операторами будет следствием сходимости метода Ритца, рассмотренной в работе [6], поэтому этот вопрос здесь не рассматривается.

Поступила 13 VII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Симеонов С. В. Некоторые методы решения нелинейных задач механики деформируемого тела. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
2. Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. Гостехиздат, 1956.
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.
4. Ворович И. И. Красовский Ю. П. О методе упругих решений. Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 4.
5. Поляк Б. Т. Градиентные методы минимизации функционалов. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1963, т. 3, № 4.
6. Михлин С. Г. О методе Ритца в нелинейных задачах. Докл. АН СССР, 1962, т. 142, № 4.

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Т. Н. Хазанович (Москва)

В статистической теории необратимых процессов в течение последнего десятилетия появились новые идеи, которые, в частности, позволили вывести уравнения гидродинамики и получить выражения для гидродинамических коэффициентов переноса, дающие принципиальную возможность их вычисления на основании молекулярных моделей (см., например, [1]). В настоящей заметке сходным образом выводятся уравнения, связывающие напряжения с малыми деформациями вязкоупругой среды.

Внешние силы, действуя на вязкоупругое тело, деформируют его и вызывают в нем процессы течения, характеризуемые распределением скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ($\mathbf{x}$ — радиус-вектор), т. е. приводят тело в термодинамически неравновесное состояние. Задача сводится к тому, чтобы найти статистическое распределение для такого неравновесного состояния. В качестве нулевого приближения обычно берется так называемое локально-равновесное распределение. Это распределение получается, если разбить все тело на «бесконечно малые», но макроскопические элементы объема и предположить, что каждый элемент находится в равновесии, характеризуемом каноническим распределением Гиббса

$$\rho_L = \exp \left\{ \beta \int d^3\mathbf{x} \, [F(\mathbf{x}) - H^\circ (\mathbf{x})] \right\} \qquad \left(\beta = \frac{1}{kT} \right) \tag{1}$$

Здесь k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, $F(\mathbf{x}, t)$ — плотность свободной энергии и $H^\circ(\mathbf{x})$ — плотность функции Гамильтона в системе координат, движущейся со скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$; интегрирование распространяется по объему тела.