ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ НЕСИММЕТРИЧНОЙ УПРУГОСТИ

В. А. Пальмов (Ленинград)

Теория несимметричной упругости впервые рассматривалась в книге [1]. Современный вывод уравнений теории и ее обоснование можно найти в работах [2, 3].

1. Для описания напряженного состояния среды введем, следуя [1-3], наряду с диадой напряжений $\boldsymbol{\tau}$, диаду пар напряжений $\boldsymbol{\mu}$. Компоненты диады напряжений представляют силы, действующие на единицу площади соответствующих сечений, а элементы диады пар напряжений — моменты, действующие на единицу площади тех же сечений. Для описания перемещений частиц среды, наряду с обычным полем перемещения $\mathbf{u}$, введем кинематически независимое от него поле поворотов $\boldsymbol{\Phi}$. Диады напряжений и пар напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия, которые при отсутствии объемных сил и моментов имеют вид [2, 3]

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\tau} = 0, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_\times = 0 \tag{1.1}$$

Здесь ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона, а $\boldsymbol{\tau}_\times$ обозначает векторный инвариант диады напряжений $\boldsymbol{\tau}$ [4].

Вводятся диады деформаций $\boldsymbol{\Lambda}$ и $\mathbf{M}$. При малых $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\Phi}$ они определяются так: [3]

$$\boldsymbol{\Lambda} = \nabla\mathbf{u} + \mathbf{I}\times\boldsymbol{\Phi}, \qquad \mathbf{M} = \nabla\boldsymbol{\Phi} \qquad (\mathbf{I} \text{ — диада-единица}) \tag{1.2}$$

Связь между напряжениями и деформациями для изотропной упругой среды дается обобщенным законом Гука

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda\mathbf{II}\cdot\cdot\boldsymbol{\Lambda}^+ + 2\mu\boldsymbol{\Lambda}^+ + 2\alpha\boldsymbol{\Lambda}^-, \qquad \boldsymbol{\mu} = \beta\mathbf{II}\cdot\cdot\mathbf{M}^+ + 2\gamma\mathbf{M}^+ + 2\varepsilon\mathbf{M}^- \tag{1.3}$$

который содержит шесть упругих постоянных $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \mu, \lambda$, причем λ и μ — обычные постоянные Ламе. В соотношениях 1.3 верхним индексом плюс отмечена симметричная составляющая диады, а индексом минус — антисимметричная.

2. Рассмотрим упругое тело в условиях плоской деформации. Положим

$$\mathbf{u} = \mathbf{i}u(x, y) + \mathbf{j}v(x, y), \qquad \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{k}\Phi(x, y) \tag{2.1}$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты осей x, y, z прямоугольной декартовой системы координат.

Ненулевые составляющие диад Λ и M в этом случае таковы:

$$\begin{gathered}\Lambda_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \Lambda_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} - \Phi, \qquad M_{xz} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\\ \Lambda_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \Phi, \qquad \Lambda_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad M_{yz} = \frac{\partial\Phi}{\partial y}\end{gathered} \tag{2.2}$$

Нетрудно проверить, что справедливы следующие тождественные соотношения между оставшимися элементами диад деформаций

$$\tag{2.3}$$

$$\frac{\partial\Lambda_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial\Lambda_{xx}}{\partial y} - \mathrm{M}_{xz} = 0, \qquad \frac{\partial\Lambda_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial\Lambda_{xy}}{\partial y} - \mathrm{M}_{yz} = 0, \qquad \frac{\partial\mathrm{M}_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial\mathrm{M}_{xz}}{\partial y} = 0 \tag{2.4}$$

Они представляют условия совместности деформаций для частного случая плоской деформации. Условия (2.3), (2.4) совпадают с соответствующими условиями работы [5]. Многие компоненты диад $\boldsymbol{\Lambda}$ и $\mathbf{M}$ обращаются в нуль, поэтому соотношения закона Гука сильно упрощаются

$$\begin{gathered}\tau_{xx} = \lambda(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy}) + 2\mu\Lambda_{xx}, \qquad \tau_{yy} = \lambda(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy}) + 2\mu\Lambda_{yy}\\ \tau_{xy} = \mu(\Lambda_{xy} + \Lambda_{yx}) + \alpha(\Lambda_{xy} - \Lambda_{yx}), \qquad \tau_{yx} = \mu(\Lambda_{xy} + \Lambda_{yx}) - \alpha(\Lambda_{xy} - \Lambda_{yx})\\ \tau_{zz} = \lambda(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy}), \qquad \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0\\ \mu_{xz} = (\gamma + \varepsilon)\mathrm{M}_{xz}, \quad \mu_{yz} = (\gamma + \varepsilon)M_{yz}, \quad \mu_{zx} = (\gamma - \varepsilon)M_{xz}, \quad \mu_{zy} = (\gamma - \varepsilon)M_{yz}\end{gathered} \tag{2.5}$$

В силу (2.2), (2.5) составляющие диад напряжений и диады пар напряжений не зависят от координаты z. Поэтому уравнения равновесия (1.1) приводятся к системе

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial \mu_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \mu_{yz}}{\partial y}+\tau_{xy}-\tau_{yx}=0 \tag{2.6}$$

Разрешая соотношения закона Гука относительно компонент Λ и M, получим

$$\Lambda_{xx}=\frac{1}{2\mu}\left[\tau_{xx}-\nu\left(\tau_{xx}+\tau_{yy}\right)\right], \qquad \Lambda_{yy}=\frac{1}{2\mu}\left[\tau_{yy}-\nu\left(\tau_{xx}+\tau_{yy}\right)\right] \tag{2.8}$$

$$\Lambda_{xy}=\frac{\tau_{xy}+\tau_{yx}}{4\mu}+\frac{\tau_{xy}-\tau_{yx}}{4\alpha}, \qquad \Lambda_{yx}=\frac{\tau_{xy}+\tau_{yx}}{4\mu}-\frac{\tau_{xy}-\tau_{yx}}{4\alpha} \tag{2.9}$$

$$M_{xz}=\frac{1}{\gamma+\varepsilon}\mu_{xz}, \quad M_{yz}=\frac{1}{\gamma+\varepsilon}\mu_{yz}, \qquad \nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \tag{2.10}$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона. Составляющие диад напряжений и пар напряжений, которые не вошли в (2.6) — (2.10), могут быть выражены через те компоненты, которые вошли в указанные уравнения

$$\tau_{zz}=\nu\left(\tau_{xx}+\tau_{yy}\right), \quad \mu_{zx}=\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\mu_{xz}, \quad \mu_{zy}=\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\mu_{yz} \tag{2.11}$$

Внося выражения (2.8) — (2.10) в (2.3), (2.4), получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tau_{xy}+\tau_{yx}}{4\mu}-\frac{\tau_{xy}-\tau_{yx}}{4\alpha}\right)-\frac{1}{2\mu}\frac{\partial}{\partial y}\left[\tau_{xx}-\nu\left(\tau_{xx}+\tau_{yy}\right)\right]-\frac{\mu_{xz}}{\gamma+\varepsilon}=0 \tag{2.12}$$

$$\frac{1}{2\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left[\tau_{yy}-\nu\left(\tau_{xx}+\tau_{yy}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tau_{xy}+\tau_{yx}}{4\mu}+\frac{\tau_{xy}-\tau_{yx}}{4\alpha}\right)-\frac{\mu_{yz}}{\gamma+\varepsilon}=0 \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial \mu_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \mu_{xz}}{\partial y}=0 \tag{2.14}$$

Шесть уравнений (2.6), (2.12) — (2.14) образуют полную систему уравнений плоской деформации в напряжениях.

Следуя работам [5, 6], выразим напряжения и пары напряжений через две функции напряжений

$$\tau_{xx}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \qquad \tau_{yy}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad \mu_{xz}=\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2.15}$$

$$\tau_{xy}=-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \qquad \tau_{yx}=-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \mu_{yz}=\frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{2.16}$$

Непосредственная проверка убеждает, что при этом уравнения равновесия (2.6) и условие (2.14) тождественно удовлетворяются.

Подстановка выражений (2.15) — (2.16) в (2.12) и (2.13) для определения функций напряжений φ и ψ дает

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi-l^2 \nabla^2 \psi\right)=-2(1-\nu) h^2 \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \varphi \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi-l^2 \nabla^2 \psi\right)=2(1-\nu) h^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \varphi \tag{2.18}$$

где

$$l^2=(\gamma+\varepsilon)\left({}^1/_4\mu+{}^1/_4\alpha\right), \quad h^2=(\gamma+\varepsilon) / 4\mu \tag{2.19}$$

Продифференцируем первое уравнение по y, а второе по x и вычтем одно из другого.

Получим бигармоническое уравнение для функции напряжений φ

$$\nabla^4\varphi = 0 \tag{2.20}$$

Аналогичным образом находим уравнение для ψ

$$\nabla^2(\psi - l^2\nabla^2\psi) = 0 \tag{2.21}$$

Следует заметить, что хотя уравнения для φ и ψ и получены раздельными, однако решения их не произвольны, а должны быть взяты такими, чтобы удовлетворялись уравнения (2.17), (2.18).

Отметим также, что уравнения (2.17), (2.18) совпадут с уравнениями работы [6] только в том случае, если α положить бесконечно большим. Уравнения (2.20), (2.21) по существу совпадают с аналогичными уравнениями работы [5].

3. Рассмотрим задачу о концентрации напряжений вблизи кругового отверстия в поле простого растяжения. Именно, предположим, что контур отверстия $r = a$ свободен от напряжений и пар напряжений, а на бесконечности реализуется напряженное состояние

$$\tau_{xx} = p, \qquad \tau_{yy} = \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu_{xz} = \mu_{yz} = 0 \tag{3.1}$$

При решении воспользуемся полярной системой координат ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$). Функции напряжений φ и ψ должны по отдельности удовлетворять уравнениям

$$\nabla^4\varphi = 0, \qquad \nabla^2(\psi - l^2\nabla^2\psi) = 0 \qquad \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right) \tag{3.2}$$

Уравнения (2.18), (2.17) в полярной системе координат принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial r}(\psi - l^2\nabla^2\psi) = -2(1-\nu)\,h^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla^2\varphi \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\psi - l^2\nabla^2\psi) = 2(1-\nu)\,h^2\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\varphi$$

Для компонент диады напряжений в полярной системе координат обычным путем получаем формулы (ср. [6])

$$\tau_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right), \qquad \tau_{\theta\theta} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) \tag{3.4}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}, \qquad \tau_{\theta r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}$$

$$\mu_{rz} = \frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad \mu_{\theta z} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

Граничные условия в рассматриваемой задаче таковы:

при $r = a$

$$\tau_{rr} = 0, \qquad \tau_{r\theta} = 0, \qquad \mu_{rz} = 0 \tag{3.5}$$

при $r \to \infty$

$$\tau_{rr} = {}^1/_2 p(1 + \cos 2\theta), \qquad \tau_{\theta\theta} = {}^1/_2 p(1 - \cos 2\theta), \qquad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu_{rz} = \mu_{\theta z} = 0 \tag{3.6}$$

Условиям (3.8) и уравнениям (3.2) удовлетворяют функции напряжений [6]

$$\varphi = {}^1/_4\, pr^2(1 - \cos 2\theta) + A\ln r + (Br^{-2} + C)\cos 2\theta \tag{3.7}$$

$$\psi = [Dr^{-2} + EK_2(r/l)]\sin 2\theta$$

где K_2 — модифицированная функция Бесселя второго рода, второго порядка.

Подстановка (3.7) в (3.3) приводит к следующему ограничению на коэффициенты в функциях φ и ψ:

$$D = 8(1-\nu)\,h^2 C \tag{3.8}$$

Внося (3.7) в (3.4) и затем в граничные условия (3.5), придем, как и в [6], к следующей системе уравнений для определения постоянных A, B, C, D, E:

$$\frac{p}{2}+\frac{A}{a^2}=0$$

$$\frac{p}{2}-\frac{4C}{a^2}-\frac{6}{a^4}(B-D)+\frac{2E}{la}\left[\frac{3l}{a}K_0\left(\frac{a}{l}\right)+\left(1+\frac{6l^2}{a^2}\right)K_1\left(\frac{a}{l}\right)\right]=0$$

$$-\frac{p}{2}-\frac{2C}{a^2}-\frac{6}{a^4}(B-D)+\frac{E}{la}\left[\frac{6l}{a}K_0\left(\frac{a}{l}\right)+\left(1+\frac{12l^2}{a^2}\right)K_1\left(\frac{a}{l}\right)\right]=0 \qquad (3.9)$$

$$-\frac{2D}{a^3}-\frac{E}{l}\left[\frac{2l}{a}K_0\left(\frac{a}{l}\right)+\left(1+\frac{4l^2}{a^2}\right)K_1\left(\frac{a}{l}\right)\right]=0$$

Решение этой системы совместно с уравнением (3.8) имеет вид

$$A=-\frac{pa^2}{2}, \quad B=\frac{pa^4(1-F)}{4(1+F)}, \quad C=\frac{pa^2}{2(1+F)}, \quad D=\frac{4(1-\nu)a^2h^2p}{1+F}$$

$$E=-\frac{palF}{(1+F)K_1(a/l)} \qquad (3.10)$$

причем

$$F=8(1-\nu)\frac{h^2}{l^2}\left[4+\frac{a^2}{l^2}+\frac{2a}{l}\frac{K_0(a/l)}{K_1(a/l)}\right]^{-1} \qquad (3.11)$$

Используя эти значения постоянных, найдем для напряжения $\tau_{\theta\theta}$ на контуре отверстия

$$\tau_{\theta\theta}=p\left(1+\frac{2\cos 2\theta}{1+F}\right) \qquad \left(\max\tau_{\theta\theta}=p\frac{3+F}{1+F} \text{ при } \theta=\pm\frac{\pi}{2}\right) \qquad (3.12)$$

Введем коэффициент концентрации напряжений вблизи отверстия

$$\delta=\frac{\max\tau_{\theta\theta}}{p}=\frac{3+F}{1+F} \qquad (3.13)$$

Из формул (3.11), (3.13) видно, что коэффициент концентрации зависит от упругих постоянных материала и радиуса отверстия.

Из (3.13) видно, что наибольшее δ получается при наименьшем F. Но из (3.11) следует, что минимальное значение F равно нулю и достигается при $l\to\infty$, т. е. при $\alpha=0$. В этом случае для коэффициента концентрации напряжений получается классическое значение $\delta=3$.

Наименьшее δ достигается при наибольшем F. Но из (3.11) следует, что максимум F реализуется при $a/l\to\infty$, $\nu=0$, $h=l$, т. е. при $\alpha\to\infty$. При этих значениях параметров получаем $F=2$. Отсюда находим

$$\delta=5/3 \qquad (3.14)$$

Это в 1.8 раза меньше классического значения. При любых других возможных значениях упругих постоянных материала коэффициент концентрации напряжений имеет величину, заключенную между двумя найденными крайними значениями.

Поступила 10 VII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Cosserat E. et. F. Theorie des Corps Deformables. Paris, 1909.
2. Кувшинский Е. В. и Аэро Э. Л. Континуальная теория асимметрической упругости. Учет «внутреннего» вращения. Физика твердого тела, 1963, т. 5, № 9.
3. Пальмов В. А. Основные уравнения теории несимметричной упругости. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
4. Лагалли М. Векторное исчисление. Гостехиздат, 1936.
5. Shaefer H. Versuch einer Elastizitätstheorie des zweidimensionalen ebenen Cosserat-Kontinuums. Miszellanen der Angewanten Mechanik. Festschrif W. Tollmien. 1962.
6. Mindlin R. D. Inluence of Couple-stresses on Stress Concentrations. Experimental. Mechanics, 1963, v. 3, No. 1.