КРУЧЕНИЕ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ МОДУЛЯМИ УПРУГОСТИ

С. Г. Лехницкий (Ленинград)

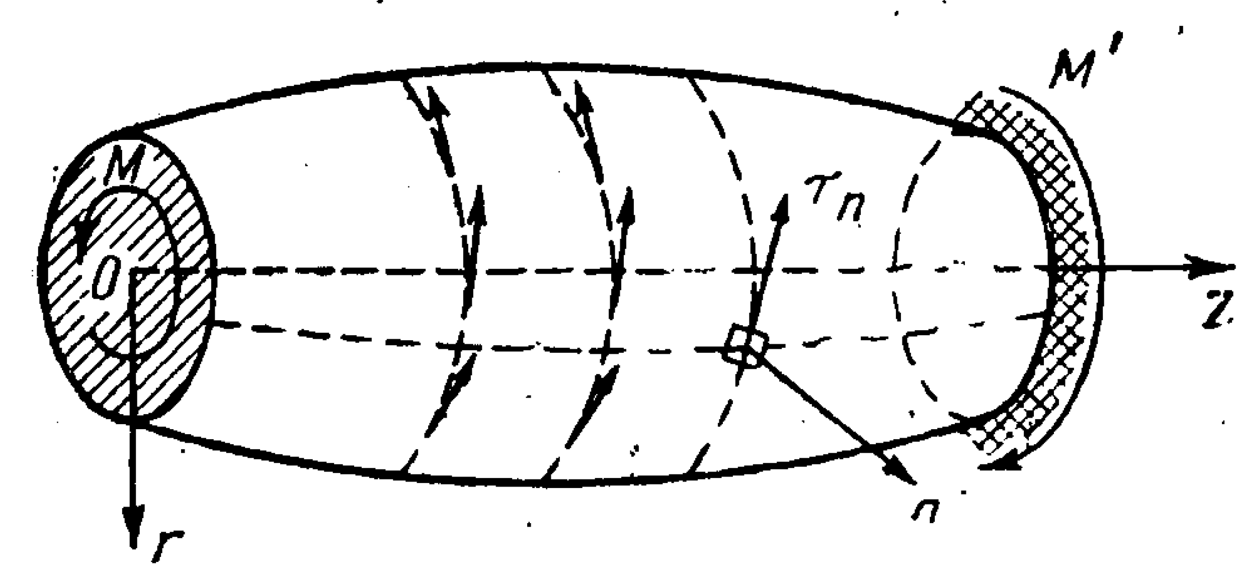
Рассматривается задача о кручении упругого стержня, имеющего форму тела вращения, обладающего цилиндрической анизотропией, под действием усилий, распределенных по концам и по боковой поверхности. Предполагается, что в каждой точке стержня имеется плоскость упругой симметрии, проходящая через геометрическую ось, или (более частный случай) стержень является ортотропным, т. е. имеет в каждой точке три ортогональные плоскости упругой симметрии, причем модули упругости вообще зависят от цилиндрических координат r, z. Исследуются стержни: конический, скручиваемый моментами, приложенными на концах, и цилиндрический под действием скручивающих усилий, распределенных по боковой поверхности.

1. Общие уравнения. Рассмотрим упругий стержень в виде некоторого тела вращения, обладающий цилиндрической анизотропией с осью анизотропии, совпадающей с геометрической осью z. В общем случае будем предполагать, что в каждой точке имеется одна плоскость упругой симметрии, проходящая через ось z. Предполагаем также, что материал следует обобщенному закону Гука и под действием нагрузки испытывает малые деформации.

Пусть на стержень действуют усилия двоякого рода: 1) распределенные по концам (торцам) и приводящиеся к скручивающим моментам M и M' и 2) распределенные по боковой поверхности — $\tau_n(s)$, где s — дуга осевого (меридионального) сечения (фиг. 1). Как и в случае изотропного стержня, удается построить полную систему уравнений кручения, предполагая, что из шести составляющих напряжения отличны от нуля только две, а из трех составляющих перемещения — только одна. Примем в качестве исходных положений (см. [1], стр. 249).

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{rz} = 0, \quad \tau_{\theta z} = \tau_{\theta z}(r, z), \quad \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}(r, z)$$
$$u_r = w = 0, \quad u_\theta = u_\theta(r, z) \tag{1.1}$$

Из основной системы теории упругости остаются только три уравнения



Фиг. 1

$$\frac{\partial (r^2\tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{\partial (r^2\tau_{\theta z})}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{u_\theta}{r} = \frac{1}{r}\left(a_{44}\tau_{\theta z} + a_{46}\tau_{r\theta}\right) \tag{1.2}$$
$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{u_\theta}{r} = \frac{1}{r}\left(a_{46}\tau_{\theta z} + a_{66}\tau_{r\theta}\right)$$

Будем считать коэффициенты деформации a_{44}, a_{46}, a_{66} любыми дифференцируемыми функциями координат r и z; остальные 10 коэффициентов a_{ji} из уравнений, выражающих обобщенный закон Гука, в уравнения кручения никак не входят, а следовательно, могут быть какими угодно — постоянными или переменными. Введем функцию напряжений $\psi(r, z)$ равенствами

$$\tau_{\theta z} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad \tau_{r\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{1.3}$$

Исключая перемещение из системы (1.2), получим уравнение для ψ:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^3}\left(a_{44}\frac{\partial\psi}{\partial r} - a_{46}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r^3}\left(a_{46}\frac{\partial\psi}{\partial r} - a_{66}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right] = 0 \tag{1.4}$$

Граничные условия на боковой поверхности будут иметь такой же вид, как и в случае изотропного стержня

$$\tau_{\theta z}\cos(n, z) + \tau_{r\theta}\cos(n, r) = \tau_n(s) \quad \text{или} \quad \psi = -r^2\int_0^s \tau_n\, ds + \psi_0 \tag{1.5}$$

Если скручивающие усилия распределены только по торцам, то на контуре меридионального сечения $\psi = \psi_0 = \text{const}$.

Уравнение (1.4) упрощается в случае ортотропного стержня. Если в каждой точке имеются три плоскости упругой симметрии — проходящая через ось, нормальная к оси z и ортогональная к первым двум, то $a_{46} = 0$, а вместо a_{44} и a_{66} удобнее ввести модули сдвига: $G_1 = 1 / a_{44}$ — модуль сдвига для плоскостей, параллельных оси стержня и нормальных к направлению r, и $G_2 = 1 / a_{66}$ — модуль сдвига для плоскостей поперечных сечений, т. е. нормальных к z.

Тогда уравнение (1.4) перепишется так:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3G_1}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3G_2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=0 \qquad (1.6)$$

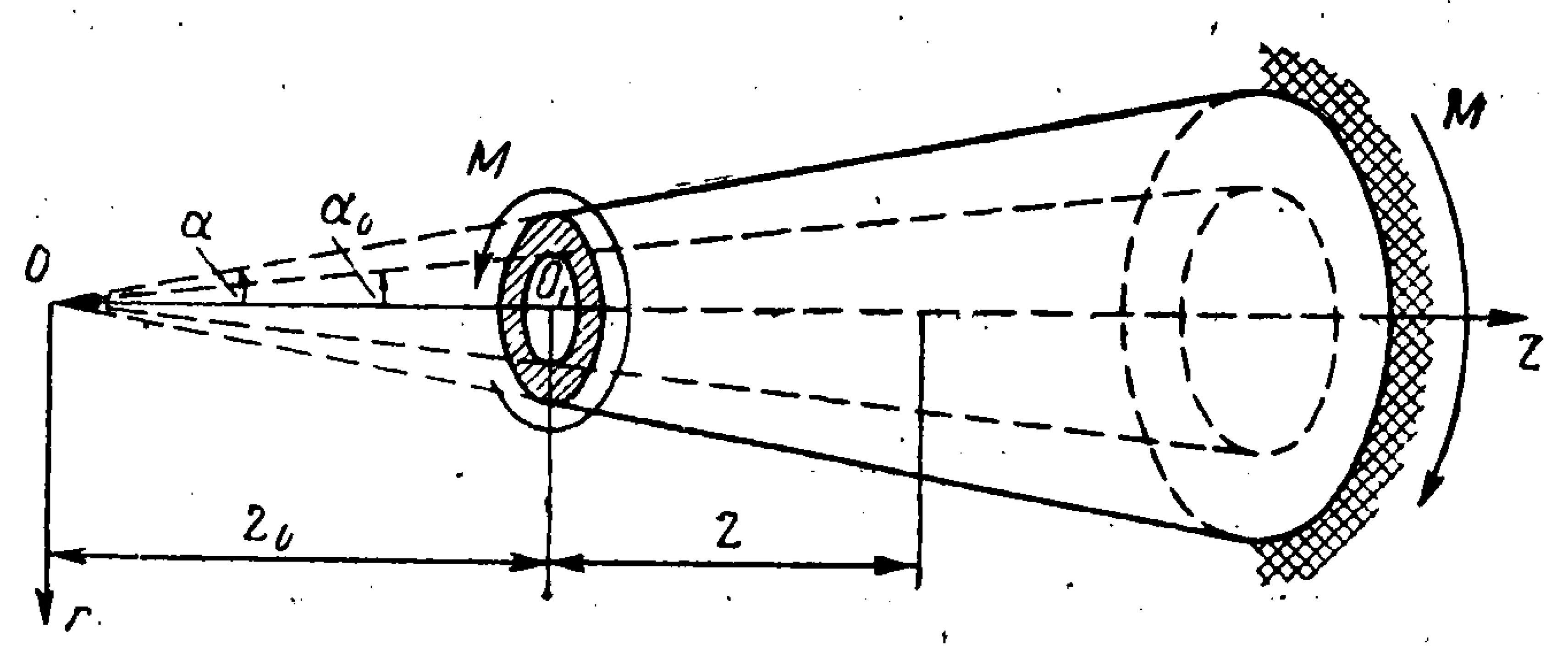
Ниже указываются некоторые классы функций G_1 и G_2, для которых задача о кручении конического и цилиндрического стержней решается так же просто, как и для стержней однородных и изотропных.

2. Кручение конического стержня. Пусть дан стержень в виде кругового конуса (усеченного), закрепленный широким концом и со свободной боковой поверхностью. По узкому концу распределены усилия, приводящиеся к скручивающему моменту M (фиг. 2). На боковой поверхности

$$\frac{r}{z+z_0} = \operatorname{tg}\alpha \qquad (2.1)$$

функция напряжений ψ принимает постоянное значение причем разность значений ее на поверхности и на оси пропорциональна моменту ([1], стр. 250) (2.2)

$$\psi(\operatorname{tg}\alpha) - \psi(0) = \frac{M}{2\pi}$$



Фиг. 2

Для стержня, ограниченного двумя коническими поверхностями с общей вершиной, у которых образующие наклонены к оси z под углами α и α_0, вместо (2.2) будем иметь

$$\psi(\operatorname{tg}\alpha) - \psi(\operatorname{tg}\alpha_0) = {}^1/_2 M / \pi \qquad (2.3)$$

Для того чтобы удовлетворить условиям (2.2) или (2.3), функция напряжений должна иметь вид

$$\psi = f(t) \qquad (t = r/\zeta,\ \zeta = z + z_0) \qquad (2.4)$$

Укажем два случая изменения модулей сдвига, для которых решение может быть найдено элементарным путем.

Случай 1. Модули $G_1 = G_1(t)$, $G_2 = G_2(t)$ — произвольные функции отношения t. Подставляя (2.4) в (1.6), получим уравнение

$$\left(\frac{1}{G_1t^3}+\frac{1}{G_2t}\right)f''(t) + \left[\left(\frac{1}{G_1t^3}+\frac{1}{G_2t}\right)' + \frac{3}{G_2t^2}\right]f'(t) = 0 \qquad (2.5)$$

Интегрируя, получим выражения для $f'(t)$, напряжений и перемещения

$$f'(t) = A\frac{G_1G_2t^3}{G_1t^2+G_2}\varphi(t), \qquad \tau_{\theta z} = \frac{A}{\zeta^3}\frac{G_1G_2t\varphi(t)}{G_1t^2+G_2}, \qquad \tau_{r\theta} = \frac{A}{\zeta^3}\frac{G_1G_2t^2\varphi(t)}{G_1t^2+G_2}$$

$$u_\theta = A\int\frac{G_2t\varphi(t)}{\zeta^3(G_1t^2+G_2)}d\zeta + \omega r \quad \left(\varphi(t) = \exp\left(-3\int\frac{G_1t}{G_1t^2+G_2}dt\right)\right) \qquad (2.6)$$

Постоянная A найдется из условий (2.3) или (2.2)

$$A = \frac{M}{2\pi}\frac{1}{f_1(\operatorname{tg}\alpha) - f_1(\operatorname{tg}\alpha_0)}, \qquad f_1(t) = \frac{G_1G_2t^3}{G_1t^2+G_2}\varphi(t)\,dt \qquad (2.7)$$

При степенном законе изменения модулей сдвига в зависимости от t, когда

$$G_1 = g_1 t^n, \qquad G_2 = g_2 t^n \tag{2.8}$$

получим напряжения и перемещение

$$\tau_{\theta z} = Ag_1 g_2 \frac{r^{n+1}}{\zeta^{n-1}(g_1 r^2 + g_2\zeta^2)^{5/2}}, \qquad \tau_{r\theta} = Ag_1 g_2 \frac{r^{n+2}}{\zeta^n (g_1 r^2 + g_2\zeta^2)^{5/2}} \tag{2.9}$$

$$u_\theta = -\frac{Ar}{3(g_1 r^2 + g_2\zeta^2)^{3/2}} + \omega r \tag{2.10}$$

В частности, если модули сдвига обратно пропорциональны t^2 ($n = -2$), получим

$$\tau_{\theta z} = Ag_1 g_2 \frac{\zeta^3}{r(g_1 r^2 + g_2\zeta^2)^{5/2}}, \qquad \tau_{r\theta} = Ag_1 g_2 \frac{\zeta^2}{(g_1 r^2 + g_2\zeta^2)^{5/2}} \tag{2.11}$$

$$A = -\frac{3M}{2\pi g_2} \frac{1}{(g_1 \operatorname{tg}^2\alpha + g_2)^{3/2} - (g_1 \operatorname{tg}^2\alpha_0 + g_2)^{3/2}} \tag{2.12}$$

Случай 2. Модули сдвига меняются по степенному закону

$$G_1 = g_1 r^n \zeta^p, \qquad G_2 = g_2 r^n \zeta^p \tag{2.13}$$

В этом случае также существует решение уравнения (1.6), зависящее только от отношения t, которое, как нетрудно вывести, имеет вид

$$f'(t) = At^{n+3}(g_1 t^2 + g_2)^{-N} \qquad (N = {}^1/_2(n + p + 5)) \tag{2.14}$$

Составляющие напряжения равны

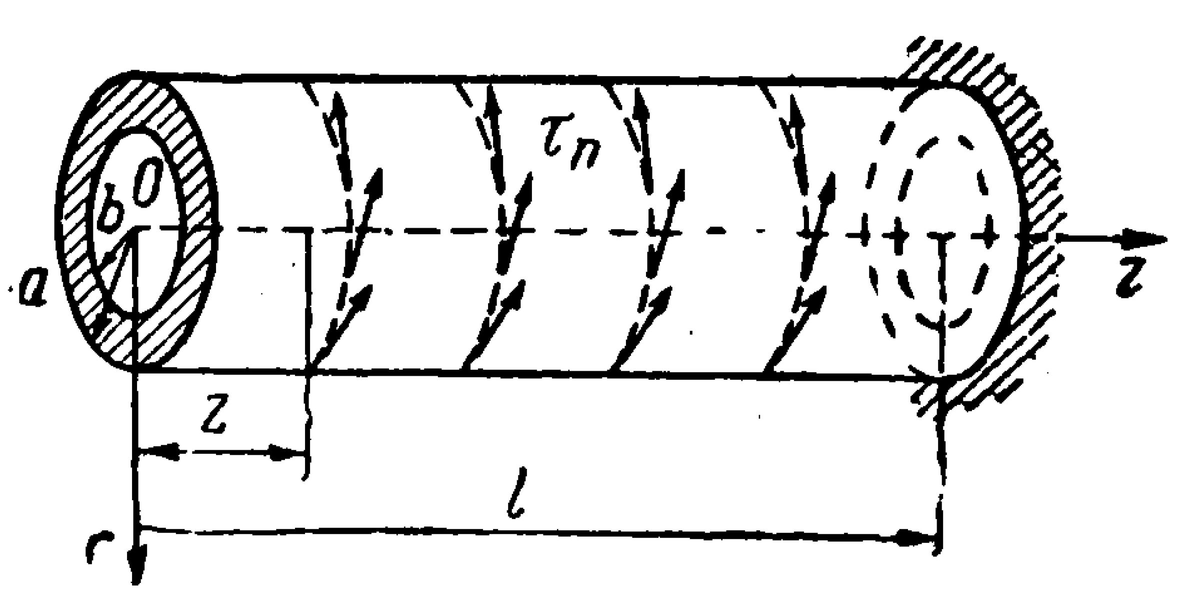
$$\tau_{\theta z} = A\frac{r^{n+1}\zeta^{p+1}}{(g_1 r^2 + g_2\zeta^2)^N}, \qquad \tau_{z\theta} = A\frac{r^{n+2}\zeta^p}{(g_1 r^2 + g_2\zeta^2)^N} \tag{2.15}$$

Постоянная A найдется по одной из формул (2.2) или (2.3), где

$$f_1(t) = \int t^{n+3}(g_1 t^2 + g_2)^{-N} dt \tag{2.16}$$

Отметим, что вопрос о кручении конического однородного изотропного стержня, сплошного и полого, различными скручивающими нагрузками с большой полнотой освещен в книге Н. Х. Арутюняна и Б. Л. Абрамяна [2]

3. Кручение цилиндрического стержня усилиями, распределенными по боковой поверхности. Рассмотрим стержень в виде кругового цилиндра, сплошного или полого, обладающего цилиндрической анизотропией и ортотропного, у которого один или оба конца закреплены, а по боковой поверхности распределены скручивающие касательные усилия, меняющиеся по длине, но не меняющиеся вдоль окружностей поперечных сечений (фиг. 3). Модули сдвига задаются как функции одной координаты r. Пусть, для определенности, правый конец $z = l$ закреплен, а левый $z = 0$ свободен. Полагая, что касательные усилия могут быть представлены рядами Фурье на интервале $(0, l)$, разложим их в ряды по синусам, и тогда для полого цилиндра имеем граничные условия на поверхностях $r = a$ и $r = b$:



Фиг. 3

$$\tau_{r\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} m_{ak} \sin\frac{k\pi z}{l} \quad \text{при } r = a, \qquad \tau_{r\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} m_{bk} \sin\frac{k\pi z}{l} \quad \text{при } r = b \tag{3.1}$$

В соответствии с этими условиями разыскиваем функцию напряжений ψ в виде:

$$\psi = R_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r) \cos\frac{k\pi z}{l} \tag{3.2}$$

Из уравнений (1.6) получаем выражение для R_0

$$R_0 = A_0 \int G_1 r^3 dr + B_0 \tag{3.3}$$

и уравнение для R_k

$$R_k'' + G_1 r^3 \left(\frac{1}{G_1 r^3}\right)' R_k' - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \frac{G_1}{G_2} R_k = 0 \tag{3.4}$$

При произвольных G_1 и G_2 это уравнение в общем виде не интегрируется.

Задача решается элементарным путем при помощи рядов в том случае, когда модули сдвига представляются степенными функциями расстояния r от оси.

Пусть модули заданы следующим образом:

$$G_1 = g_1 (r / a)^m, \qquad G_2 = g_2 (r / a)^n \tag{3.5}$$

(m, n — произвольные вещественные числа, целые или дробные, положительные, отрицательные или нули). Уравнение (3.4) принимает вид

$$R_k'' - \frac{m+3}{r} R_k' - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \frac{g_1}{g_2} \frac{r^{m-n}}{a^{m-n}} R_k = 0 \tag{3.6}$$

Интеграл этого уравнения выражается через функции Бесселя, а при частных значениях m и n — через элементарные функции.

Введем обозначения (3.7)

$$\alpha = -\frac{m+4}{2}, \quad \beta = \frac{m-n+2}{2}, \quad \gamma = \frac{k\pi}{l} \frac{1}{\beta} a^{1/2(n-m)} \left(\frac{g_1}{g_2}\right)^{1/2}, \quad N = \left|\frac{m+4}{m-n+2}\right|$$

Если N — дробь, то общий интеграл уравнения (3.6) выражается через функции Бесселя мнимого аргумента $I_N(\gamma r^\beta) = i^{-N} J_N(i\gamma r^\beta)$ и $I_{-N}(\gamma r^\beta)$, и общее выражение функции напряжений будет иметь вид

$$\psi = A_0 r^{m+4} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k I_N(\gamma r^\beta) + B_k I_{-N}(\gamma r^\beta)]\, r^{-\alpha} \cos\frac{k\pi z}{l} \tag{3.8}$$

Здесь и в дальнейшем постоянная B_0 отброшена, так как она не влияет на напряжения.

Если N — число целое или нуль, то функцию I_{-N} в выражении (3.8) нужно заменить функцией Макдональда $K_N(\gamma r^\beta)$ ([3], стр. 46—47). Постоянные A_k и B_k определяются из граничных условий на цилиндрических поверхностях (3.1).

При одинаковой зависимости модулей от r, т. е. при $m = n$

$$\beta = 1, \qquad \gamma = k\pi / l, \qquad N = |\alpha| \tag{3.9}$$

Приведем выражения ψ для нескольких частных случаев степенной зависимости G_1 и G_2 от r.

1. *Линейная зависимость*

$$G_1 = g_1 r/a, \quad G_2 = g_2 r / a, \quad m = 1, \quad \alpha = -5/2, \quad N = 5/2 \tag{3.10}$$

Функции Бесселя, порядок которых равен целому числу плюс половина, выражаются, как известно, через элементарные функции ([3], стр. 57—70). В рассматриваемом случае получается

$$\psi = A_0 r^5 + \sum_{k=1}^{\infty} \{A_k [(3 + \gamma^2 r^2) \operatorname{ch} \gamma r - 3\gamma r \operatorname{sh} \gamma r] + B_k [-3\gamma r \operatorname{ch} \gamma r + (3 + \gamma^2 r^2) \operatorname{sh} \gamma r]\} \cos\frac{k\pi z}{l} \tag{3.11}$$

2. *Обратная пропорциональность.*

$$G_1 = g_1 a / r, \qquad G_2 = g_2 a / r, \qquad m = -1, \qquad \alpha = -{}^3/_2, \qquad N = {}^3/_2 \tag{3.12}$$

И в этом случае ψ выражается через элементарные функции

$$\psi = A_0 r^3 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k (\operatorname{sh} \gamma r - \gamma r \operatorname{ch} \gamma r) + B_k (\operatorname{ch} \gamma r - \gamma r \operatorname{sh} \gamma r)] \cos \frac{k\pi z}{l} \tag{3.13}$$

3. *Квадратичная зависимость.*

$$G_1 = g_1 (r / a)^2, \qquad G_2 = g_2 (r / a)^2, \qquad m = 2, \qquad \alpha = -3, \qquad N = 3 \tag{3.14}$$

$$\psi = A_0 r^6 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k I_3 (\gamma r) + B_k K_3 (\gamma r)]\, r^3 \cos \frac{k\pi z}{l} \tag{3.15}$$

4. *Модули обратно пропорциональны квадрату расстояния.*

$$G_1 = g_1 (a / r)^2, \qquad G_2 = g_2 (a / r)^2, \quad m = -2, \qquad \alpha = -1, \qquad N = 1 \tag{3.16}$$

$$\psi = A_0 r^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k I_1 (\gamma r) + B_k K_1 (\gamma r)] \cos \frac{k\pi z}{l} \tag{3.17}$$

Наконец, отметим особый случай, когда функция напряжений выражается через элементарные функции.

Пусть модули заданы следующим образом:

$$G_1 = g_1 (r/a)^m, \qquad G_2 = g_2 (r/a)^{m+2} \tag{3.18}$$

Уравнение (3.6) вырождается в уравнение Эйлера и общее выражение для функции ψ будет

$$\psi = A_0 r^{m+4} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k r^s + B_k r^{-t}) \cos \frac{k\pi z}{l} \tag{3.19}$$

Здесь введены новые обозначения

$$s = \left[\left(\frac{m+4}{2}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{c}\right)^2 g\right]^{1/2} + \frac{m+4}{2}, \quad t = \left[\left(\frac{m+4}{2}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{c}\right)^2 g\right]^{1/2} - \frac{m+4}{2}, \qquad c = \frac{l}{a}, \qquad g = \left(\frac{g_1}{g_2}\right)^{1/2} \tag{3.20}$$

Приведенные выражения для функции напряжений дают возможность точно удовлетворить условиям (3.1) на наружной и внутренней цилиндрических поверхностях, так как для постоянных A_k, B_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ из этих условий получаем необходимое и достаточное число уравнений. На концах $z = 0$ и $z = l$ напряжение вообще приводится к скручивающим моментам. Если один конец закреплен, а другой свободен, то можно избавиться от «лишнего» момента, определив постоянную A_0 так, чтобы скручивающий момент на конце был равен нулю (что, очевидно, всегда возможно). Если закреплены оба конца, то можно добиться выполнения нужных условий путем добавления к решению, получаемому при помощи функции ψ, элементарного решения для кручения моментами, действующими на концах.

Поступила 1 VI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Гостехтеоретиздат, М.— Л., 1950.
2. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.
3. Кузьмин Р. О. Бесселевы функции. ОНТИ, 1935.