К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ УПРУГОГО ПОЛУКРУГА

А. И. Каландия (Тбилиси)

В заметке [1] рассматривалась задача о полукруге применительно к поперечному изгибу пластинки при смешанных краевых условиях; посредством введения неизвестных дополнительных воздействий на пластинку задача сводилась к сингулярному интегральному уравнению не совсем обычного типа. Здесь излагается иной способ решения задач о напряжениях в полукруге, позволяющий непосредственное сведение их решения к системе линейных алгебраических уравнений.

1. Предлагаемый прием проведем на примере упругого полукруга, прижимаемого в условиях плоской деформации (или плоского напряженного состояния) к абсолютно жесткому профилю с прямолинейным основанием. Предполагается, что соприкасание упругого тела с жестким штампом происходит вдоль диаметра окружности, а внешние усилия, действующие на тело (и, разумеется, удерживающие его в состоянии равновесия), распределены по полуокружности по заданному закону.

Радиус полукруга примем равным единице и расположим упругое тело со штампом в плоскости $z = x + iy$ так, чтобы упругая среда занимала нижнюю половину круга с центром в начале координат. Дуговую часть границы тела обозначим через γ_1, а прямолинейную ее часть — через γ_0. Пусть будут, далее, S^- и S^+ — нижний и верхний полукруги соответственно, γ_2 — верхняя полуокружность, а γ — полная окружность, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Для упругих постоянных и элементов полей смещений и напряжений будем пользоваться обозначениями Н. И. Мусхелишвили [2].

Тогда задача об определении упругого равновесия полукруга при условии, что скольжение и отставание отсутствуют на линии соприкасания тел [1], сводится к отысканию голоморфных в S^- функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ по контурному условию

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) \quad \text{на } \gamma_1 \tag{1.1}$$

$$\varkappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = 0 \quad \text{на } \gamma_0 \tag{1.2}$$

Здесь $f(t)$ — заданная функция точки t на γ_1. Говоря иначе, нам следует решить основную смешанную задачу теории упругости для полукруга.

2. Определим функцию $\varphi(z)$ в верхнем полукруге S^+, полагая

$$\varkappa\varphi(z) = z\bar{\varphi}'(z) + \bar{\psi}(z) \qquad (\text{при } z \text{ в } S^+) \qquad (\bar{F}(z) = \overline{F(\bar{z})}) \tag{2.1}$$

Если в (2.1) заменить z на $\bar{z}$ (считая, что z принадлежит S^-) и перейти к сопряженным значениям в обеих частях равенства, то можно определить функцию $\psi(z)$ через функцию $\varphi(z)$, голоморфную как в S^-, так и в S^+ следующим образом:

$$\psi(z) = \varkappa\bar{\varphi}(z) - z\varphi'(z) \qquad \text{при } z \text{ в } S^- \tag{2.2}$$

Контурное равенство (1.2), как легко убедиться, представляет собой условие аналитической продолжимости функции $\varphi(z)$ через отрезок γ_0. Поэтому на основании (2.2) рассматриваемая задача (1.1), (1.2) сводится к отысканию одной функции $\varphi(z)$, голоморфной в единичном круге, по следующему условию на нижней полуокружности

$$\varphi(t) + \varkappa\varphi(\bar{t}) + (t - \bar{t})\,\overline{\varphi'(t)} = f(t) \qquad (t \text{ на } \gamma_1) \tag{2.3}$$

Продолжим равенство (2.3) на верхнюю полуокружность, подставив в нем $\bar{t}$ вместо t. Получим

$$\varphi(\bar{t}) + \varkappa\varphi(t) - (t - \bar{t})\,\bar{\varphi}'(\bar{t}) = f(t) \qquad (t \text{ на } \gamma_2) \tag{2.4}$$

Перепишем предыдущее равенство в виде

$$\varphi(t) + \varkappa\varphi(\bar{t}) + (t - \bar{t})\,\overline{\varphi'(t)} = f(\bar{t}) + (\varkappa - 1)\,[\varphi(\bar{t}) - \varphi(t)] + (t - \bar{t})\,[\overline{\varphi'(t)} + \bar{\varphi}'(t)]$$

[1] Предлагаемый способ принципиально пригоден и в других случаях, если только коэффициент трения сохраняет постоянное значение вдоль контактной линии

и объединим его с (2.3) в одно контурное условие

$$\varphi(t) + \varkappa\varphi(\bar{t}) + (t-\bar{t})\overline{\varphi'(\bar{t})} = g(t) + \Phi(t) \quad \text{на } \gamma \tag{2.5}$$

где

$$g(t) = f(t) \quad \text{на } \gamma_1, \qquad g(t) = f(\bar{t}) \quad \text{на } \gamma_2 \tag{2.6}$$

$$\Phi(t) = 0 \quad \text{на } \gamma_1, \quad \Phi(t) = (\varkappa - 1)[\varphi(\bar{t}) - \varphi(t)] + (t-\bar{t})[\overline{\varphi'(t)} + \bar{\varphi}'(t)] \quad \text{на } \gamma_2$$

К решению граничной задачи (2.5) можно теперь применить обычный метод степенных рядов. Положим в единичном круге

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \qquad \varphi'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} \tag{2.7}$$

Предполагая законность соответствующих разложений в ряды Фурье, положим

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k t^k, \qquad \Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Lambda_k t^k \qquad (t = e^{i\vartheta}) \tag{2.8}$$

Величины A_k-известны. Коэффициенты же Фурье Λ_k неизвестной функции $\Phi(t)$ представляются, согласно (2.6), формулами

$$\Lambda_n = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\pi} \{(\varkappa - 1)[\varphi(\bar{t}) - \varphi(t)] + (t-\bar{t})[\overline{\varphi'(t)} + \bar{\varphi}'(t)]\} t^{-n-1} dt \tag{2.9}$$

Относительно искомых функций принимаем обычные при постановке подобных нерегулярных задач условия, продиктованные отчасти физическими соображениями и достаточные для утверждения единственности решения в рамках обычного анализа. Будем предполагать, что поле смещений непрерывно в замкнутой области, а для компонентов напряжения, непрерывных вплоть до границы, за исключением $z = \pm 1$, допускаем в этих точках бесконечность порядка ниже единицы (см., например, [3], §§ 113—115). При этих условиях можно утверждать, что производные $\varphi'(z)$, $\varphi''(z)$ непрерывны в любой части замкнутой области, не содержащей точек $z = \pm 1$, а вблизи этих точек справедлива оценка

$$|\varphi'(z)| < C|z \pm 1|^{-\alpha} \qquad (0 \leqslant \alpha < 1,\ C = \text{const})$$

Составим комбинацию в фигурных скобках под интегралом на основании разложений (2.7). Получим (2.10)

$$(\varkappa-1)[\varphi(\bar{t}) - \varphi(t)] + (t-\bar{t})[\overline{\varphi'(t)} + \bar{\varphi}'(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k[a;\varkappa](t^k - t^{-k}) + \bar{a}_1(t - t^{-1})$$

$$\Omega_k[a;\varkappa] = -[(\varkappa-1)a_k + (k+2)\bar{a}_{k+2} - k\bar{a}_k] \tag{2.11}$$

Воспользовавшись (2.9), имеем

$$\Lambda_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{k0}\,\Omega_k[a;\varkappa] \tag{2.12}$$

$$\Lambda_n = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn} n)\{\bar{a}_1 + \Omega_{|n|}[a;\varkappa]\} + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_{k1}\Omega_k[a;x] \qquad (n = \pm 1) \tag{2.13}$$

$$\Lambda_n = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn} n)\,\Omega_{|n|}[a;\varkappa] + \alpha_{1n}\bar{a}_1 + \sum_{k=1}^{\infty}{}' \alpha_{kn}\Omega_k[a;\varkappa] \qquad (n = \pm 2, \pm 3, \ldots) \tag{2.14}$$

Здесь

$$\alpha_{kn} = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{(-1)^{k-n} - 1}{k-n} + \frac{(-1)^{k+n} - 1}{k+n}\right] \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{pmatrix}$$

Запятая при знаке суммы указывает, что при суммировании пропускается значение $k = |n|$.

Составим при помощи рядов (2.7) левую часть равенства (2.5). Получим

$$\varphi(t) + \varkappa\overline{\varphi(t)} + (t - \bar{t})\overline{\varphi'(t)} =$$
$$= (1 + \varkappa)a_0 + 2\bar{a}_2 + \bar{a}_1 t + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k - \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k [a; \varkappa + 1]\, t^{-k} \tag{2.15}$$

Внесем теперь ряды (2.15), (2.8) в контурное условие (2.5); сравнивая коэффициенты при t^n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, получим последовательно с учетом (2.12) — (2.14)

$$(1 + \varkappa)\, a_0 + 2\bar{a}_2 = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{k0}\, \Omega_k [a; \varkappa]$$
$$a_1 + \frac{1}{2}\bar{a}_1 = A_1 + \frac{1}{2}\Omega_1 [a; \varkappa] + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_{k1}\, \Omega_k [a; \varkappa] \tag{2.16}$$
$$a_n = A_n + \alpha_{1n}\bar{a}_1 + \frac{1}{2}\Omega_n [a; \varkappa] + \sum_{k=1}^{\infty}{}' \alpha_{kn}\Omega_n [a; \varkappa] \qquad (n \geqslant 2)$$

Коэффициенты Фурье функции $g(t)$, как явствует из самого ее определения (2.6), связаны равенствами $A_n = A_{-n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

По этой причине сравнение коэффициентов в (2.5) при отрицательных степенях t новых уравнений (отличных от (2.16)) не дает.

Бесконечная система линейных уравнений (2.16) представляет собой, таким образом, полную систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов разложений (2.7). После нахождения решения a_k $(k = 0, 1, \ldots)$ этой системы функция $\varphi(z)$ даст при условии равномерной сходимости соответствующих рядов решение поставленной задачи.

Определив $\varphi(z)$ в круге, функцию $\psi(z)$ найдем по (2.2); после этого могут быть обычным путем найдены все искомые элементы полей смещений и напряжений. В частности, для напряжения Y_y, определяемого согласно представлениям Колосова — Мусхелишвили формулой

$$Y_y = \mathrm{Re}\,\{\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}\}$$

будем иметь на основании (2.2)

$$Y_y = \mathrm{Re}\,\{\varphi'(z) + \varkappa\overline{\varphi'(z)} + (z - \bar{z})\overline{\varphi''(z)}\}$$

На отрезке γ_0 это выражение примет вид

$$Y_y = \mathrm{Re}\,\{\varphi'(z) + \varkappa\bar{\varphi}'(z)\} = \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \varkappa)\, k a_k x^{k-1} \qquad (-1 < x < 1) \tag{2.17}$$

Введем в (2.16) новые неизвестные b_k, определяемые равенствами $b_0 = a_0$, $b_k = k a_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, и представим систему уравнений в развернутом виде; получим

$$(1 + \varkappa)\, b_0 = -\bar{b}_2 + \frac{2}{\pi i}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\left[\frac{\varkappa - 1}{2k-1} b_{2k-1} + \bar{b}_{2k+1} - \bar{b}_{2k-1}\right] + A_0$$

$$\frac{1+\varkappa}{2n-1} b_{2n-1} = \bar{b}_{2n-1} - \bar{b}_{2n+1} + \frac{2}{\pi i}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k}{4k^2 - (2n-1)^2}\left[\frac{\varkappa - 1}{2k} b_{2k} + \right.$$
$$\left. + \bar{b}_{2k+2} - \bar{b}_{2k}\right] + 2A_{2n-1}$$

$$\frac{1+\varkappa}{2n} b_{2n} = \bar{b}_{2n} - \bar{b}_{2n+2} + \frac{4}{\pi i}\frac{\bar{b}_1}{4n^2 - 1} +$$
$$+ \frac{2}{\pi i}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k-2}{(2k-1)^2 - 4n^2}\left[\frac{\varkappa - 1}{2k-1} b_{2k-1} + \bar{b}_{2k+1} - \bar{b}_{2k-1}\right] + 2A_{2n}$$
$$(n = 1, 2, \ldots) \tag{2.18}$$

Здесь и в дальнейшем первый член $\bar{b}_1$ в правой части второго равенства при $n=1$ следует опустить. Не останавливаясь на исследовании системы уравнений (2.18), ограничимся одним указанием относительно ее приближенного решения. Для приближенного решения будем пользоваться усеченной системой линейных уравнений

$$(1+\varkappa)\,b_0=-\bar{b}_2+\frac{2}{\pi i}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2k-1}\left[\frac{\varkappa-1}{2k-1}b_{2k-1}+\bar{b}_{2k+1}-\bar{b}_{2k-1}\right]+A_0$$

$$\frac{1+\varkappa}{2n-1}b_{2n-1}=\bar{b}_{2n-1}-\bar{b}_{2n+1}+\frac{2}{\pi i}\sum_{k=1}^{N}\frac{4k}{4k^2-(2n-1)^2}\left[\frac{\varkappa-1}{2k}b_{2k}+\right.$$
$$\left.+\bar{b}_{2k+2}-\bar{b}_{2k}\right]+2A_{2n-1}$$

$$\frac{1+\varkappa}{2n}b_{2n}=-\bar{b}_{2n+2}+\bar{b}_{2n}+\frac{4}{\pi i}\frac{\bar{b}_1}{4n^2-1}+\frac{2}{\pi i}\sum_{k=1}^{N}\frac{4k-2}{(2k-1)^2-4n^2}\times$$
$$\times\left[\frac{\varkappa-1}{2k-1}b_{2k-1}+\bar{b}_{2k+1}-\bar{b}_{2k-1}\right]+2A_{2n}\quad(n=1,2,\ldots,N)\tag{2.19}$$

Положим, кроме того,

$$b_{m+2}-b_m=0\quad\text{при } m=2N-1,\,2N,\ldots\tag{2.20}$$

Тогда совместное рассмотрение уравнений (2.19), (2.20) даст систему из $2N+1$ линейных уравнений относительно $2N+1$ первых неизвестных $b_0, b_1, \ldots, b_{2N}$. Решение этой системы будем принимать за приближенное решение бесконечной системы (2.18).

Примечание. Функция $g(t)$, определяемая равенством (2.6), не будет даже при простейших нагружениях полукруга регулярной функцией на окружности. В случае равномерного нормального давления на γ_1, например, производные от $g(t)$ будут иметь в точках $t=\pm 1$ разрыв первого ряда. Следовательно, ряд Фурье для функций $g(t)$ будет, как правило, медленно сходящимся, поэтому для получения удовлетворительного численного решения придется в усеченной системе (2.19) удержать значительное число уравнений.

С другой стороны, во всех случаях, особо интересных для практики, можно заранее «сгладить» функцию $g(t)$, рассмотрев на γ_2 не равенство (2.4), а равенство, полученное из него переходом к сопряженному значению. Тогда функция $g(t)$ получится гладкой, но зато бесконечная система уравнений, полученная взамен (2.16), будет иметь более сложную структуру. Такая модификация граничного условия, очевидно, равносильна некоторому преобразованию системы (2.16). Подобное преобразование может иногда оказаться целесообразным.

Краевая задача (2.5) примет тогда вид

$$\varphi(t)+\varkappa\varphi(\bar{t})+(t-\bar{t})\overline{\varphi'(t)}=g^*(t)+\Phi^*(t)\text{ на }\gamma\tag{2.21}$$

$$g^*(t)=f(t)\quad\text{на }\gamma_1,\qquad g^*(t)=\bar{f}(t)\quad\text{на }\gamma_2\tag{2.22}$$

$$\Phi^*(t)=\varphi(t)-\bar{\varphi}(t)+\varkappa\left[\varphi(\bar{t})-\overline{\varphi(t)}\right]+(t-\bar{t})\left[\overline{\varphi'(t)}-\varphi'(\bar{t})\right]\quad\text{на }\gamma_2$$
$$\Phi^*(t)=0\quad\text{на }\gamma_1\tag{2.23}$$

Вместо (2.9) и (2.10) будем иметь соответственно

$$\Lambda_n^*=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\pi}\Phi^*(t)\,t^{-n-1}dt\qquad(n=0,\pm 1,\ldots)\tag{2.24}$$

$$\Phi^*(t)=(\bar{a}_1-a_1)\,t+\sum_{k=0}^{\infty}(a_k-\bar{a}_k)\,t^k-\sum_{k=0}^{\infty}\Omega_k^*[a;\varkappa]\,t^{-k}\tag{2.25}$$

$$\Omega_k^*[a;\varkappa]=(k+2)(a_{k+2}-\bar{a}_{k+2})-k(a_k-\bar{a}_k)-\varkappa(a_k-\bar{a}_k)\tag{2.26}$$

Имеем, далее,

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^\pi \Big[\sum_{k=0}^\infty \lambda_k t^k\Big] t^{-n-1}dt = \lambda_n + \frac{1}{\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}{}' \delta_{k-n}\lambda_k \qquad (n \geqslant 0)$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^\pi \Big[\sum_{k=0}^\infty \lambda_k t^{-k}\Big] t^{-n-1}dt = \lambda_{-n} - \frac{1}{\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}{}' \delta_{k+n}\lambda_k \qquad (n \leqslant 0)$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^\pi t^{-n}\,dt = \begin{cases} i/2\delta_{n-1}/\pi & (n \neq 1) \\ 1 & (n = 1) \end{cases}, \qquad \delta_\nu = \frac{(-1)^\nu - 1}{\nu}$$

На основании приведенных формул можно теперь, аналогично предыдущему, получить бесконечную систему линейных уравнений для определения неизвестных a_k. В отличие от предыдущего, здесь нам понадобится полная система равенств, получаемых сравнением коэффициентов при всех различных степенях t. Система эта после элементарных приведений запишется в виде (2.27)

$$\mathrm{Re}\,\{(1+\varkappa)\,a_0 + 2a_2\} = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\Big[\delta_1 a_1 + \sum_{k=1}^\infty \delta_k a_k + \sum_{k=1}^\infty \delta_k \Omega_k^*\,[a;\varkappa]\Big] + A_0^*$$

$$\mathrm{Re}\,\{2a_1\} = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}{}' \delta_{k-1} a_k + \sum_{k=0}^\infty \delta_{k+1}\,\Omega_k^*\,[a;\varkappa]\Big] + A_1^*$$

$$\mathrm{Re}\,\{(\varkappa-1)\,a_1 + 3a_3\} = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\Big[\sum_{k=0}^\infty \delta_{k+1} a_k + \sum_{k=0}^{\infty}{}' \delta_{k-1}\,\Omega_k^*\,[a;\varkappa]\Big] + A_{-1}^*$$

$$\mathrm{Re}\,\{a_n\} = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\Big[\delta_{n-1} a_1 + \sum_{k=0}^{\infty}{}'\delta_{k-n}\,a_k + \sum_{k=0}^\infty \delta_{k+n}\,\Omega_k^*\,[a;\varkappa]\Big] + A_n^*$$

$$\mathrm{Re}\,\{(n+2)\,a_{n+2} - (n-\varkappa)\,a_n\} = \qquad (n \geqslant 2)$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\Big[-\delta_{n+1} a_1 + \sum_{k=0}^\infty \delta_{k+n}\,a_k + \sum_{k=0}^{\infty}{}' \delta_{k-n}\,\Omega_k^*\,[a;\varkappa]\Big] + A_{-n}^*$$

В этих равенствах A_n^* $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ обозначают коэффициенты Фурье функции $g^*(t)$; A_n^* — заданные действительные числа. Равенства (2.27) представляют собой бесконечную систему действительных уравнений относительно действительных и мнимых частей a_k $(k = 0, 1, \ldots)$. Положим $a_k = \alpha_k' + i\beta_k'$ и сделаем замену

$$\alpha_0' = \alpha_0, \qquad \beta_0' = \pi\beta_0, \quad n\alpha_n' = \alpha_n, \qquad n\beta_n' = \pi\beta_n \tag{2.28}$$

Тогда относительно α_n, β_n система (2.27) примет вид

$$(1+\varkappa)\,\alpha_0 + \alpha_2 = -2\beta_1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{\delta_k}{k}\,\beta_k + \sum_{k=1}^\infty \delta_k\,(\beta_{k+2} - \omega_k\beta_k) + A_0^*$$

$$2\alpha_1 = \sum_{k=0}^\infty \frac{\delta_{k-1}}{k}\,\beta_k + \sum_{k=0}^{\infty}{}' \delta_{k+1}\,(\beta_{k+2} - \omega_k\beta_k) + A_1^* \left(\omega_\nu = 1 + \frac{\varkappa}{\nu}\right) \tag{2.29}$$

$$(\varkappa-1)\,\alpha_1 + \alpha_3 = \sum_{k=0}^\infty \frac{\delta_{k+1}}{k}\,\beta_k + \sum_{k=0}^{\infty}{}' \delta_{k-1}\,(\beta_{k+2} - \omega_k\beta_k) + A_{-1}^*$$

$$\frac{\alpha_n}{n} = \delta_{n-1}\beta_1 + \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\delta_{k-n}}{k}\,\beta_k + \sum_{k=0}^\infty \delta_{k+n}\,(\beta_{k+2} - \omega_k\beta_k) + A_n^*$$

$$\alpha_{n+2} - \omega_{-n}\alpha_n = -\delta_{n+1}\beta_1 + \sum_{k=0}^\infty \frac{\delta_{k+n}}{k}\,\beta_k + \sum_{k=0}^{\infty}{}' \delta_{k-n}\,(\beta_{k+2} - \omega_k\beta_k) + A_{-n}^* \qquad (n \geqslant 2)$$

Исключая из этой системы α_k ($k = 1, 2, \ldots$), получим систему для определения β_k ($k = 0, 1, \ldots$), распадающуюся на две независимые системы относительно неизвестных с четными и нечетными индексами. Система эта будет иметь вид

$$\omega_{01}\beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty}{}' \omega_{k1}\beta_k = B_1, \qquad \omega_{0n}\beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty}{}' \omega_{kn}\beta_k = B_n \qquad (n \geqslant 2) \tag{2.30}$$

$$\omega_{01} = -(\varkappa^2 + 4\varkappa + 3), \qquad \omega_{0n} = (1+\varkappa)^2 \delta_n$$

$$\omega_{k1} = ((-1)^{k-1} - 1)\left(\frac{4k + 3\varkappa + 3}{k(k+3)} + \frac{(1+\varkappa)^2(k-1) + k(5 - 8\varkappa - 5k)}{2k(k^2-1)}\right)$$

$$\omega_{kn} = ((-1)^{k-n} - 1)\left(\frac{(k-n)\,[(\varkappa+k)^2 + 1 - kn - 2k] - 2\varkappa(k+n)}{k(k^2-n^2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{(k+n)[k - n - 2(1-\varkappa)]}{(k+n)^2 - 4}\right) \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

$$B_1 = {}^1\!/_2(\varkappa - 1)A_1^* + 3A_3^* - A_{-1}^*, \qquad B_n = (n+2)A_{n+2}^* - (n-\varkappa)A_n^* - A_{-n}^*$$

Определив β_n, можно найти все α_n непосредственно на (2.29) (α_0 определяется из первого уравнения системы), затем находится искомая голоморфная функция $\varphi(z)$.

3. В качестве числового примера рассмотрим равновесие полукруга, прижатого к жесткому профилю равномерным давлением. Тогда

$$f(t) = pt \qquad (t \text{ на } \gamma_1) \tag{3.1}$$

где p обозначает интенсивность давления. Для $g(t)$, согласно (2.6), будем иметь

$$g(t) = pe^{-i\vartheta} \quad (0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi), \qquad g(t) = pe^{i\vartheta} \quad (\pi \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi)$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re}\{g(t)\} = p\cos\vartheta, \qquad \operatorname{Im}\{g(t)\} = -p\,|\sin\vartheta\,| \tag{3.2}$$

В рассматриваемом случае имеем

$$A_1 = \frac{p}{2}, \qquad A_{2n-1} = 0 \quad (n \geqslant 2), \qquad A_{2n} = \frac{2}{\pi i}\frac{p}{1 - 4n^2} \tag{3.3}$$

Усеченная система (2.19), (2.20), состоящая из $4N + 2$ вещественных уравнений, численно решалась для значений $N = 3, 4, 5$. Для счета в условиях плоской деформации было принято $\varkappa = {}^5\!/_3$ (коэффициент Пуассона принимается равным ${}^1\!/_3$).

Граничное условие (2.3), имеющее вид в данном случае после подстановки в левую часть соответствующих рядов

$$(1+\varkappa)b_0 + \bar{b}_2 + \bar{b}_1 e^{-i\vartheta} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}e^{-ik\vartheta} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\varkappa}{k}b_k + \bar{b}_{k+2} - \bar{b}_k\right)e^{ik\vartheta} = pe^{-i\vartheta}$$
$$(0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi) \tag{3.4}$$

проверялось в точках $\vartheta = \vartheta_k = {}^1\!/_2\pi k / N$ ($k = 0, 1, \ldots, N$). Вещественная часть этого равенства удовлетворяется для найденного приближенного решения с большой точностью даже при $N = 3$, а невязка в мнимой части его, как и следовало ожидать, стремится к нулю довольно медленно. Приводим значения нормального давления Y_y, определяемого (2.17), в характерных точках основания штампа ($-1 \leqslant x \leqslant 1$)

$$\max Y_y = Y_y|_{x=0} = 1.1591p, \qquad \min Y_y = Y_y|_{x=\pm 1} = 0.8376p \tag{3.5}$$

Поступила 9 V 1964

Вычислительный центр
АН ГрузССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Каландия А. И. Об одном способе решения задач теории упругости для полукруга. Проблемы механики сплошной среды (к семидесятилетию акад. Н. И. Мусхелишвили). Изд-во АН СССР, М., 1961.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1949.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, М., 1962.