

О ВДАВЛИВАНИИ ЖЕСТКОГО ШТАМПА В УПРУГУЮ СФЕРУ

Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян

(Ереван)

Рассматривается задача о вдавливании жесткого штампа в упругую сферу (§ 1). Решение этой задачи сводится к определению некоторых коэффициентов из «парных» рядов-уравнений, содержащих полиномы Лежандра; указывается способ, позволяющий решение полученных «парных» рядов-уравнений свести к решению бесконечных систем линейных уравнений (§ 2).

В качестве приложения рассматривается сжатие упругой сферы равномерно распределенной нормальной нагрузкой (§ 3), когда нижняя половина сферы покоится на жесткой полусферической выемке. Для напряжений и перемещений составлены таблицы и эпюры.

Задачи о вдавливании двух жестких штампов в упругую сферу и об осесимметричном сжатии упругого шара с жесткой кольцевой обоймой рассмотрены в других статьях авторов и А. А. Баблояна [1, 2].

§ 1. Рассмотрим осесимметричную задачу о вдавливании жесткого штампа в упругую сферу радиуса R (фиг. 1).

Для простоты изложения полагаем, что под штампом и вне штампа касательные напряжения отсутствуют, а нормальные напряжения на поверхности сферы являются заданными.

В такой постановке граничные условия задачи в сферической системе координат ρ, θ, φ будут иметь вид при $\rho = R$ (1.1)

$$\begin{aligned} U_\rho &= f^*(\theta) & (0 \leq \theta < \alpha) \\ \tau_{\rho\theta} &= 0 & (0 \leq \theta \leq \pi), \quad \sigma_\rho = \psi^*(\theta) & (\alpha < \theta \leq \pi) \end{aligned}$$

Здесь U_ρ — радиальный компонент перемещения, $\tau_{\rho\theta}$ и σ_ρ — соответственно касательное и нормальное напряжения, $f^*(\theta)$ — гладкая функция, определяющая форму поверхности штампа, $\psi^*(\theta)$ — кусочно-непрерывная функция с ограниченным изменением в указанном интервале, характеризующая закон распределения нормальных напряжений на поверхности упругой сферы вне штампа, а α — параметр, определяющий размер штампа.

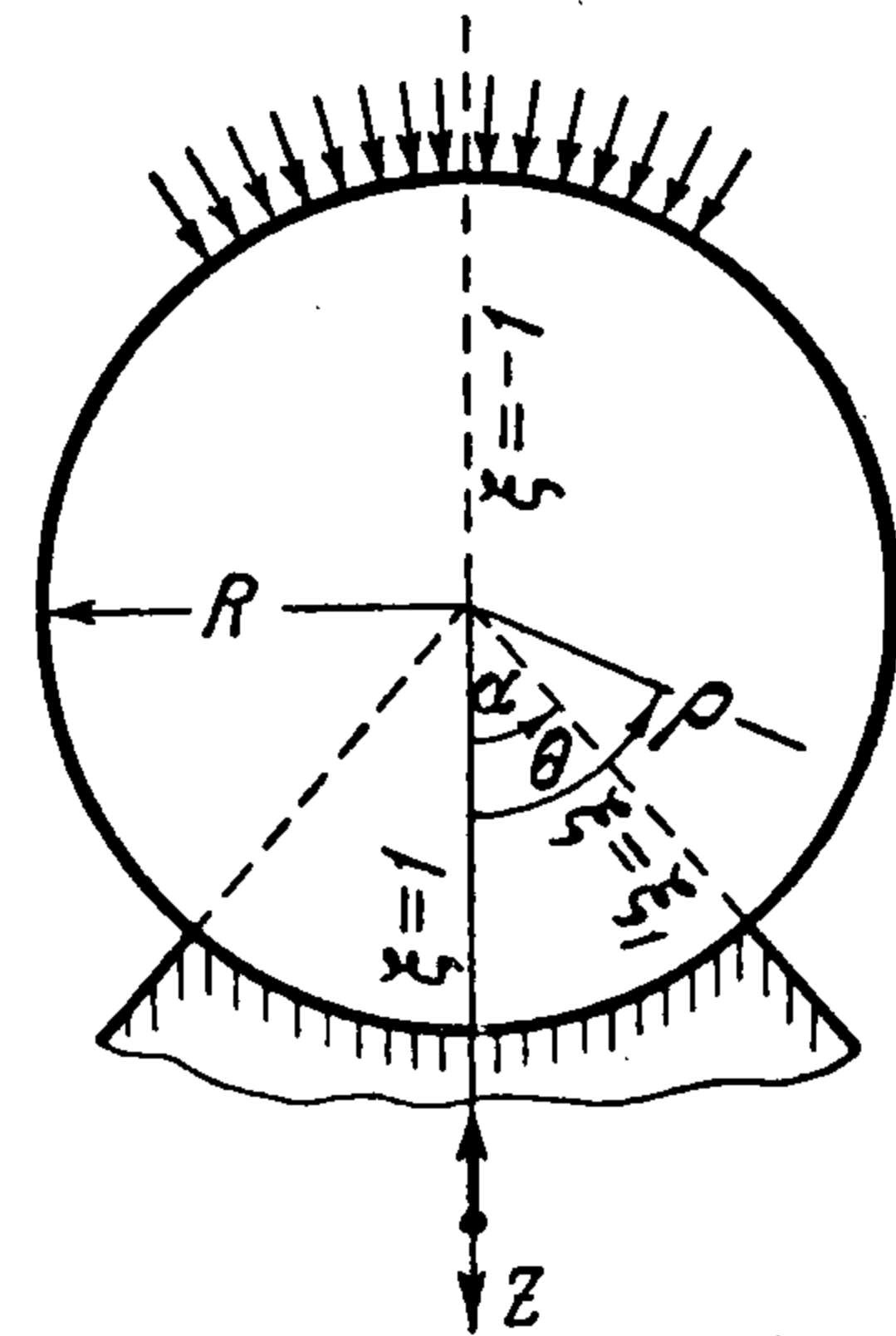
Уравнения равновесия в сферических координатах при условии осевой симметрии и отсутствия массовых сил имеют вид

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \sin \theta \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial}{\partial \rho} (2\rho \omega_\varphi \sin \theta) &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) \rho^2 \sin \theta \frac{\partial \Delta}{\partial \rho} - \mu \frac{\partial}{\partial \theta} (2\rho \omega_\varphi \sin \theta) &= 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь λ и μ — упругие постоянные Ламе, ω_φ — компонент вращения, Δ — объемное расширение

$$\begin{aligned} \omega_\varphi &= \frac{1}{2\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho U_\theta) - \frac{\partial U_\rho}{\partial \theta} \right] \\ \Delta &= \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 U_\rho \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho U_\theta \sin \theta) \right] \end{aligned} \tag{1.3}$$

а U_θ — меридиональный компонент перемещения.



Фиг. 1

Переходя от координаты θ к координате $\xi = \cos \theta$ и решая уравнения (1.2) для перемещений U_ρ и U_θ , получим выражения

$$U_\rho(\rho, \xi) = A_0 \frac{\rho}{R} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -k A_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k-1} - \frac{\lambda k + \mu(k-2)}{\lambda(k+3) + \mu(k+5)} (k+1) C_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k+1} \right\} P_k(\xi) \quad (1.4)$$

$$U_\theta(\rho, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k-1} + C_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k+1} \right] \sqrt{1-\xi^2} P_k'(\xi) \quad \left(P_k'(\xi) = \frac{d}{d\xi} P_k(\xi) \right)$$

Здесь $P_k(\xi)$ — полиномы Лежандра [3], а A_0 , A_k и C_k — постоянные интегрирования, подлежащие определению из граничных условий (1.1).

§ 2. Для определения постоянных интегрирования, пользуясь соотношениями (1.4) и известными формулами, выражающими напряжения σ_ρ и $\tau_{\rho\theta}$ через компоненты перемещения U_ρ и U_θ , получим

$$\sigma_\rho = \frac{3\lambda + 2\mu}{R} A_0 - \frac{2\mu}{R} \sum_{k=1}^{\infty} P_k(\xi) \left\{ k(k-1) A_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k-2} + \frac{\lambda(k^2 - k - 3) + \mu(k+1)(k-2)}{\lambda(k+3) + \mu(k+5)} (k+1) C_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \right\} \quad (2.1)$$

$$\tau_{\rho\theta} = \frac{2\mu}{R} \sum_{k=0}^{\infty} P_k'(\xi) \sqrt{1-\xi^2} \left\{ (k-1) A_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k-2} + \frac{\lambda(k+2)k + \mu(k^2 + 2k - 1)}{\lambda(k+3) + \mu(k+5)} C_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \right\} \quad (2.2)$$

Удовлетворив граничным условиям (1.1), для коэффициентов C_k получим выражение

$$C_k = - \frac{(k-1) [\lambda(k+3) + \mu(k+5)]}{\lambda k(k+2) + \mu(k^2 + 2k - 1)} A_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

а для определения коэффициентов A_k получим следующие «парные» ряды-уравнения:

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k P_k(\xi) = f(\xi) \quad (1 \geq \xi > \xi_1 = \cos \alpha) \quad (2.4)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k (k-1) \frac{\lambda(2k^2 + 4k + 3) + 2\mu(k^2 + k + 1)}{\lambda(2k+1)k + 2\mu(2k^2 - 1)} P_k(\xi) = \frac{\psi(\xi)}{2\mu} \quad (\xi_1 > \xi \geq -1)$$

При этом введены обозначения

$$f^*(\theta) = f(\xi), \quad \psi^*(\theta) = \frac{\psi(\xi)}{R} \quad (2.5)$$

$$A_0 = B_0, \quad A_k = - \frac{\lambda k(k+2) + \mu(k^2 + 2k - 1)}{\lambda k(2k+1) + 2\mu(2k^2 - 1)} B_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.6)$$

Таким образом, решение рассмотренной задачи свелось к определению неизвестных коэффициентов B_k из «парных» рядов (2.4), содержащих полиномы Лежандра. Представим «парные» ряды-уравнения (2.4) в форме

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k P_k(\xi) = f(\xi) \quad (1 \geq \xi > \xi_1), \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right) B_k P_k(\xi) = F(\xi) \quad (\xi_1 > \xi \geq -1) \quad (2.7)$$

где

$$F(\xi) = \frac{\psi(\xi)}{2\mu} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k P_k(\xi)}{\lambda(2k+1)k + 2\mu(2k^2-1)} \times \\ \times [3\lambda(k+2) + 2\mu(2k^3 + 2k^2 - 2k + 1)] \quad (2.8)$$

«Парные» ряды-уравнения вида (2.7) исследовались в работе А. А. Баблюяна [4]. Решение таких рядов-уравнений, где $f(\xi)$ и $F(\xi)$ — заданные функции, дается формулой

$$B_k = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\alpha} \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\varphi \, d\varphi \frac{d}{d\varphi} \int_{\cos\varphi}^1 f(\xi) (\xi - \cos\varphi)^{-1/2} d\xi + \\ + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\varphi \, d\varphi \int_{-1}^{\cos\varphi} F(\xi) (\cos\varphi - \xi)^{-1/2} d\xi \quad \left(\begin{array}{l} \alpha = \arccos \xi_1 \\ k = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right) \quad (2.9)$$

Пользуясь формулой (2.9) и учитывая, что неизвестный коэффициент B_k , согласно (2.8), входит в функцию $F(\xi)$, решение парных рядов-уравнений (2.4) для определения постоянных интегрирования A_k (или коэффициентов B_k) после некоторых преобразований сводим к решению бесконечной системы линейных уравнений следующего вида:

$$A_k = \sum_{p=1}^{\infty} L_{kp} A_p + M_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.10)$$

где L_{kp} и M_k определяются формулами

$$M_k = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(b_k + \frac{a_k b_0}{a_0} \right) \frac{\lambda k(k+2) + \mu(k^2 + 2k - 1)}{\lambda k(2k+1) + 2\mu(2k^2-1)} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.11)$$

$$L_{kp} = \frac{2}{\pi} \frac{[\lambda k(k+2) + \mu(k^2 + 2k - 1)] [3\lambda(p+2) + 2\mu(2p^3 + 2p^2 - 2p + 1)]}{[\lambda k(2k+1) + 2\mu(2k^2-1)] (2p+1) [\lambda p(p+2) + \mu(p^2 + 2p - 1)]} I_{kp} \\ (k = 1, 2, \dots; p = 1, 2, \dots) \quad (2.12)$$

Здесь

$$\sqrt{2}a_0 = \pi + (3\lambda/\mu + 1) (\pi - \sqrt{1 - \xi_1^2} - \arccos \xi_1) \quad (2.13)$$

$$\sqrt{2}a_k = \left(3\frac{\lambda}{\mu} + 1 \right) \left\{ \frac{\sin[(k+1)\arccos \xi_1]}{k+1} + \frac{\sin(k\arccos \xi_1)}{k} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.14)$$

$$b_k = \int_0^{\alpha} \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\varphi \, d\varphi \frac{d}{d\varphi} \int_{\cos\varphi}^1 f(\xi) (\xi - \cos\varphi)^{-1/2} d\xi + \\ + \frac{1}{2\mu} \int_{\alpha}^{\pi} \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\varphi \, d\varphi \int_{-1}^{\cos\varphi} \psi(\xi) (\cos\varphi - \xi)^{-1/2} d\xi \quad \left(\begin{array}{l} \alpha = \arccos \xi_1 \\ k = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right) \quad (2.15)$$

$$I_{kp} = \frac{a_k}{a_0} \int_{\alpha}^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} \cos\left(p + \frac{1}{2}\right)\varphi \, d\varphi + \int_{\alpha}^{\pi} \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\varphi \cos\left(p + \frac{1}{2}\right)\varphi \, d\varphi \quad (2.16)$$

Решая бесконечную систему (2.10) и пользуясь найденными значениями для A_k , постоянную A_0 определим формулой

$$A_0 = \frac{b_0}{a_0} + \frac{\mu}{a_0(3\lambda + \mu)} \sum_{p=1}^{\infty} A_p \frac{3\lambda(p+2) + 2\mu(2p^3 + 2p^2 - 2p + 1)}{(2p+1) [\lambda p(p+2) + \mu(p^2 + 2p - 1)]} a_p \quad (2.17)$$

Соотношение (2.17) получается непосредственно из (2.9), если положить в нем $k = 0$ и разрешить его относительно A_0 .

§ 3. В качестве приложения рассмотрим задачу о сжатии упругой сферы, покоящейся на жесткой полусферической выемке, когда на ее свободной поверхности действует равномерно распределенная нормальная нагрузка (фиг. 2).

При решении задачи принимаем, что поверхность выемки является гладкой, т. е. на контактной поверхности отсутствуют силы сцепления.

Граничные условия для этого случая имеют вид

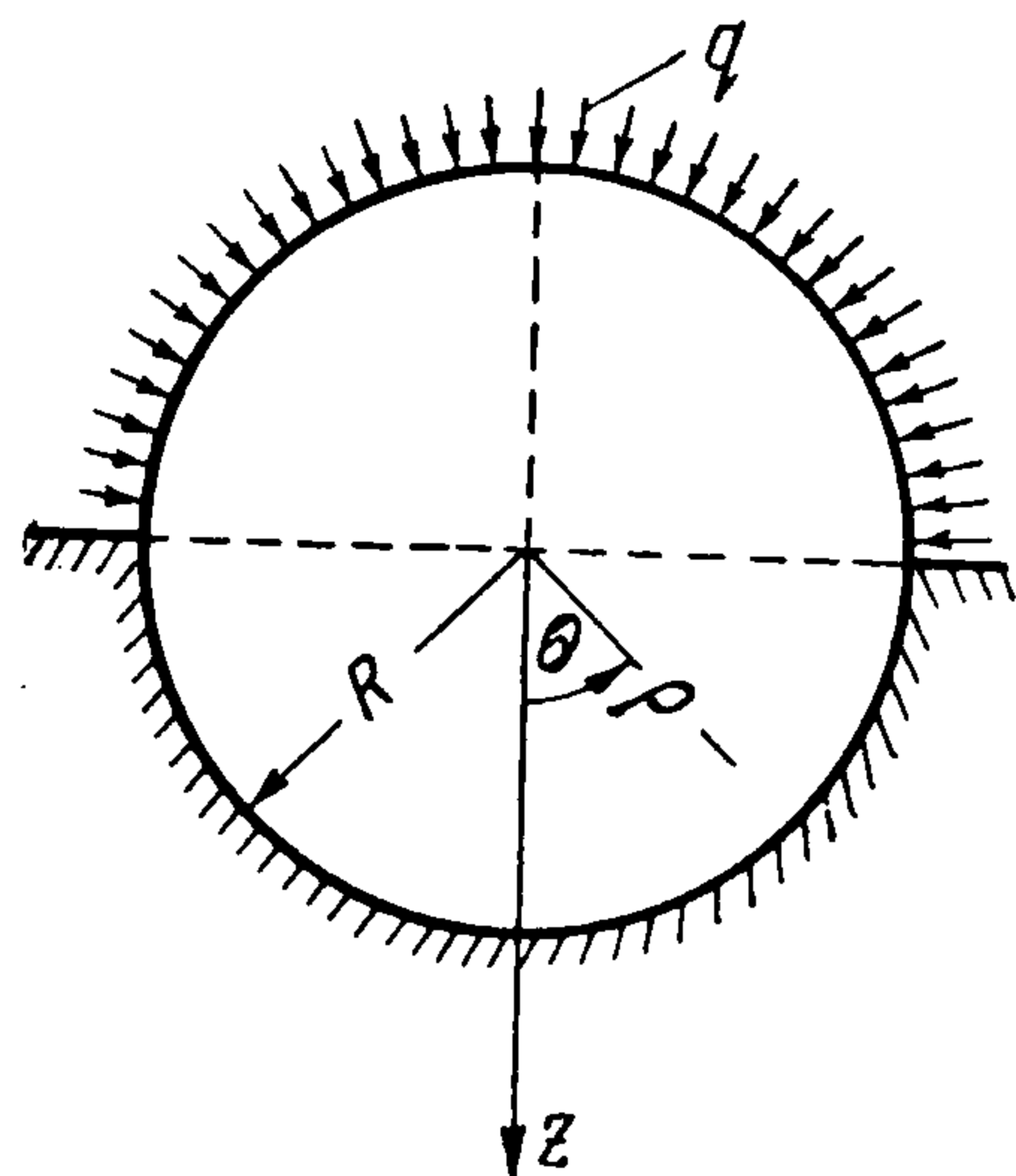
$$\begin{aligned} U_\rho &= 0 \quad (0 \leq \theta \leq 1/2 \pi), \quad \tau_{\rho\theta} = 0 \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \\ \sigma_\rho &= -q/R \quad (1/2 \pi < \theta \leq \pi) \quad \text{при } \rho = R \end{aligned} \quad (3.1)$$

Постоянные интегрирования A_k определяются из решения¹ укороченной системы (2.10)

$$A_k = \sum_{p=1}^N L_{kp} A_p + M_k \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (3.2)$$

Вычисления проводились для данных

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0, \quad \frac{\lambda}{\mu} = 2, \quad N = \begin{cases} 10 \\ 31 \end{cases} \\ f(\xi) &= 0, \quad \psi(\xi) = -q \end{aligned} \quad (3.3)$$



Фиг. 2

Ниже приводятся некоторые значения $A_k^\circ = A_k \mu / q$ для ряда значений k

$k =$	1	2	3	4	5	6		
$A_k^\circ =$	$\begin{cases} -0.0872 \\ -0.0883 \end{cases}$	$\begin{cases} 0.0424 \\ 0.0431 \end{cases}$	$\begin{cases} 0.0295 \\ 0.0307 \end{cases}$	$\begin{cases} -0.0199 \\ -0.0199 \end{cases}$	$\begin{cases} -0.0159 \\ -0.0166 \end{cases}$	$\begin{cases} 0.0130 \\ 0.0128 \end{cases}$	$(N = 10)$ $(N = 31)$	
$k =$	7	8	9	10	11	12		
$A_k^\circ =$	$\begin{cases} 0.0106 \\ 0.0112 \end{cases}$	$\begin{cases} -0.0097 \\ -0.0094 \end{cases}$	$\begin{cases} -0.0078 \\ -0.0083 \end{cases}$	$\begin{cases} 0.0082 \\ 0.0074 \end{cases}$	$\begin{cases} - \\ 0.0066 \end{cases}$	$\begin{cases} - \\ -0.0061 \end{cases}$	$(N = 10)$ $(N = 31)$	
$k =$	13	14	15	16	17	18		
$A_k^\circ =$	-0.0055	0.0052	0.0047	-0.0046	-0.0041	0.0041	$(N = 31)$	
$k =$	19	20	21	22	23	24		
$A_k^\circ =$	0.0036	-0.0037	-0.0032	0.0033	0.0029	-0.0031	$(N = 31)$	
$k =$	25	26	27	28	29	30	31	
$A_k^\circ =$	-0.0026	0.0029	0.0023	-0.0027	-0.0021	0.0026	0.0018	$(N = 31)$

Пользуясь этими значениями и формулой (2.17), будем иметь

$$A_0 = -0.0976 q / \mu \quad \text{при } N = 10, \quad A_0 = -0.0998 q / \mu \quad \text{при } N = 31 \quad (3.4)$$

Вычисляя по формуле (2.3) коэффициенты C_k , по формулам (2.2), (2.2) и (1.4) определим напряжения σ_ρ , $\tau_{\rho\theta}$ и перемещения в любой точке сферы.

Приводим значения напряжений $\sigma_\rho^\circ = \sigma_\rho R / q$, вычисленные в некоторых точках сферы, а также значения смещений $U_\rho^\circ = U_\rho \mu / q$ и $U_\theta^\circ = U_\theta \mu / q$, вычисленные для некоторых точек поверхности сферы и экваториальной плоскости

$$\begin{aligned} &(R, 1) \quad (1/2 R, 1) \quad (0, 1) \quad (1/2 R, -1) \quad (R, 1/2 \sqrt{3}) \quad (R, 1/2) \\ \sigma_\rho &= \begin{cases} -0.503 & -0.497 & -0.475 & -0.385 & -0.484 & -0.433 \\ -0.517 & -0.510 & -0.486 & -0.392 & -0.451 & -0.419 \end{cases} \quad \begin{matrix} (N = 10) \\ (N = 31) \end{matrix} \end{aligned}$$

¹ Вычисления выполнены в Вычислительном центре Академии наук АрмССР и Ереванского государственного университета сотрудниками центра А. Варданян и обработаны сотрудником Института математики и механики А. А. Бабляном. Авторы считают своим приятным долгом их поблагодарить.

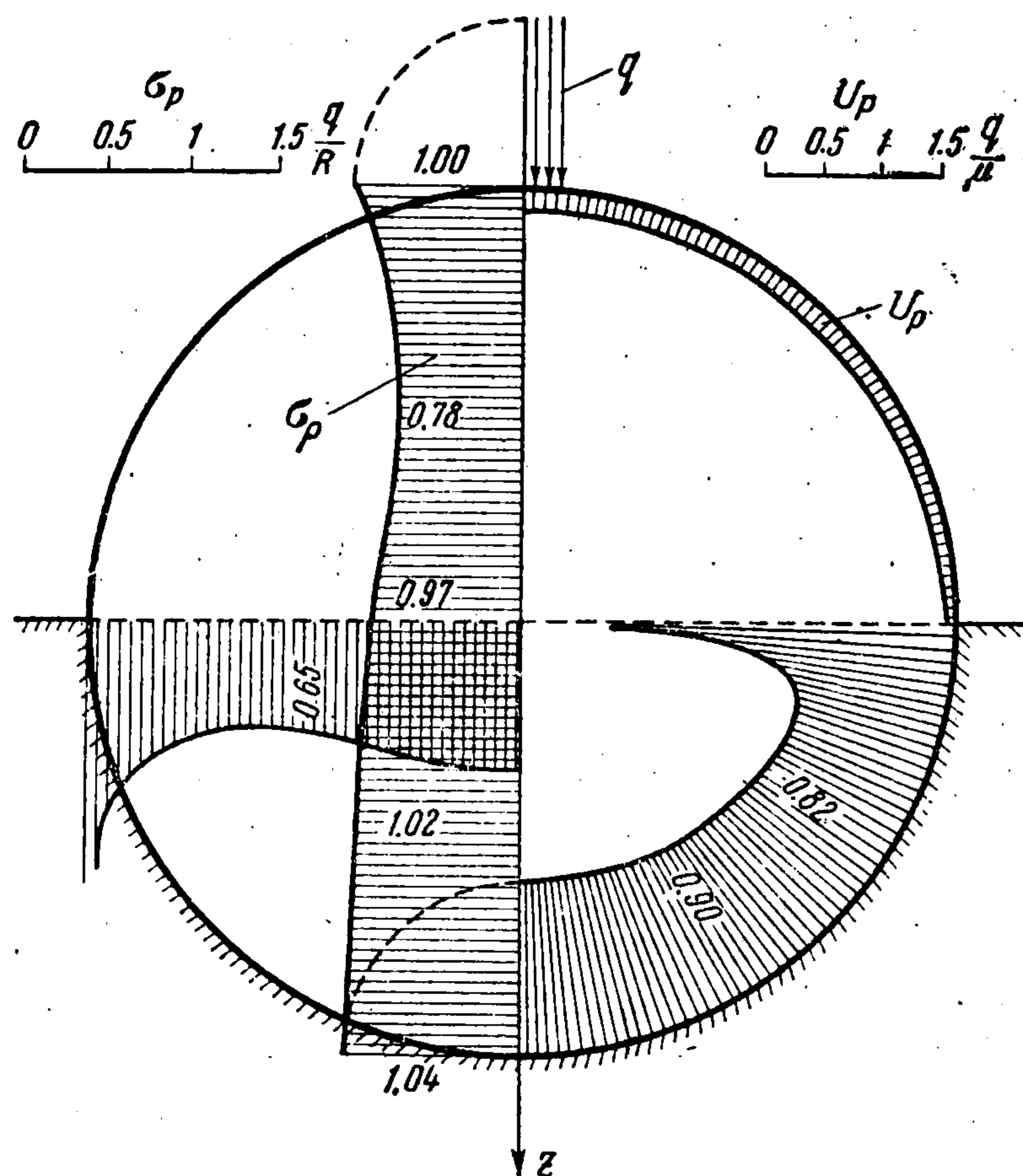
$$\sigma_p = \begin{cases} (1/2 R, 1/2 \sqrt{3}) & (1/2 R, -1/2) & (1/2 R, 0) & (1/2 R, -1/2) & (1/2 R, -1/2 \sqrt{3}) \\ -0.469 & -0.366 & -0.318 & -0.436 & -0.408 & (N = 10) \\ -0.480 & -0.373 & -0.326 & -0.446 & -0.417 & (N = 31) \end{cases}$$

$$U_p^\circ = \begin{cases} (R, -1) & (R, -1/2 \sqrt{3}) & (R, -1/2) & (R, 0) \\ -0.210 & -0.191 & -0.173 & - & (N = 10) \\ -0.197 & -0.192 & -0.171 & -0.018 & (N = 31) \end{cases}$$

$$U_\theta^\circ = \begin{cases} (R, 0) & (1/2 R, 0) & (0, 0) \\ -0.090 & -0.098 & -0.087 & (N = 10) \\ -0.088 & -0.099 & -0.088 & (N = 31) \end{cases}$$

Для наглядного представления закона распределения нормальных напряжений на фиг. 3 приводится эпюра нормальных напряжений σ_p .

Заметим, что исследование вопроса о регулярности полученной бесконечной системы линейных уравнений (2.10) или сведение этой системы к регулярной системе [5] связано с математическими трудностями.



Фиг. 3

Для получения приближенного решения использовалась укороченная система уравнений (3.2). Эта система решалась при $N = 10$ и $N = 31$, где N — число уравнений укороченной системы. Как показывают вычисления, значения напряжений и перемещений, приведенные выше для этих двух случаев, отличаются незначительно.

Поступила 10 VII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х., Баблюян А. А. О двух контактных задачах для упругой сферы. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
2. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л., Баблюян А. А. О сжатии упругой сферы с жесткой кольцевой обоймой. Изв. АН АрмССР, 1964, т. 17, № 3.
3. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. Изд. иностр. лит., М., 1952.
4. Баблюян А. А. Решение некоторых парных рядов. Докл. АН АрмССР, 1964, т. 39, № 3.
5. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1950.