

ДИФРАКЦИЯ УПРУГОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА МАССИВНОЙ ПОЛОСЕ, ВПАЯННОЙ В БЕЗГРАНИЧНУЮ УПРУГУЮ СРЕДУ

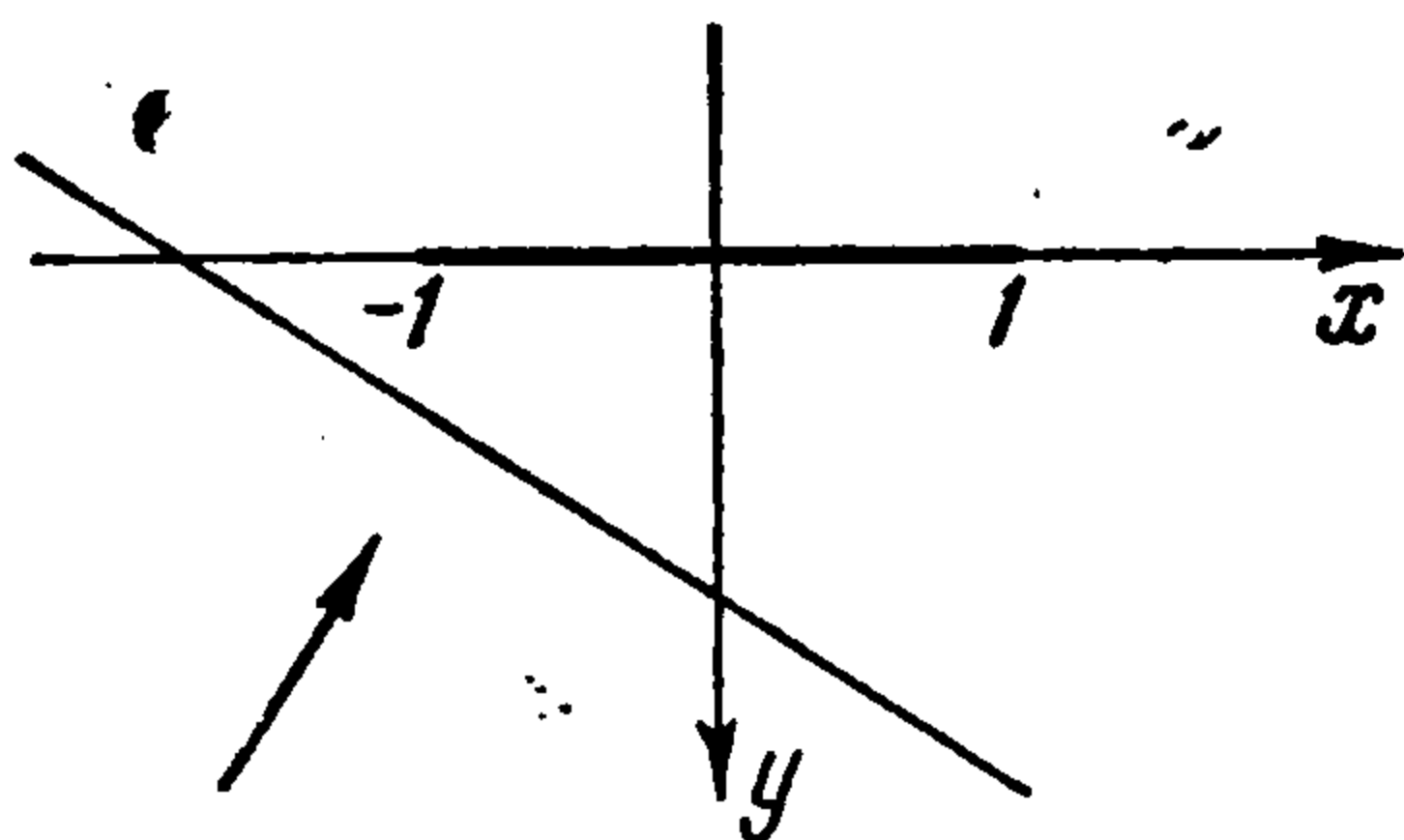
Б. В. Костров (Москва)

В работе [1] рассматривалось движение препятствия, имеющего форму бесконечной полосы, под действием плоской упругой волны. Ниже исследуются возмущения поля падающей волны, вызванные препятствием¹.

1. Будем пользоваться системой единиц измерения, в которой ширина полосы, плотность среды и скорость поперечных волн равны единице, так что среда характеризуется единственным параметром γ — отношением скорости поперечных волн к скорости продольных.

Система декартовых координат выбирается так (фиг. 1), чтобы полоса занимала часть плоскости $y = 0$ при $|x| \leq 1$, $-\infty < z < \infty$ и все величины не зависели от координаты z .

Поле смещений среды разложим на невозмущенное поле падающей волны с компонентами смещения $u_i(t - \vartheta(x + 1) + \delta y)$ и $v_i(t - \vartheta(x + 1) + \delta y)$ вдоль осей x и y соответственно и возмущение с компонентами смещения $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, включающее в себя как волны, дифрагированные на ребрах полосы, так и волны, порожденные ее движением. Исследуемое поле возмущений удобнее описывать не составляющими



Фиг. 1

вектора смещения, а соответствующими продольным φ и поперечным ψ потенциалами, причем

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.1)$$

Граничные условия [1] имеют вид

$$\begin{aligned} u &= -u_i(t - (x + 1)\vartheta) + u_0(t) \\ v &= -v_i(t - (x + 1)\vartheta) + v_0(t) + (x - x_0)\alpha(t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

при $|x| \leq 1, y = 0$

где (u_0, v_0) — вектор смещения центра тяжести полосы, x_0 — его координата в положении равновесия, α — угол поворота полосы. Отсюда легко заключаем, что искомое возмущение распадается на часть, описывающую дифракцию падающей волны на краях полосы, которую можно при вычислении этой части возмущения считать закрепленной ($u_0 = v_0 = \alpha = 0$), и часть, описывающую волны, вызванные движением полосы, при вычислении которой можно положить $u_i = v_i = 0$ (после того как в [1] вычислены элементы движения полосы, можем считать их заданными независимо от падающей волны; по этой же причине в настоящей работе не упоминаются масса полосы и ее момент инерции).

2. Из формул работы [1] можно вывести следующие соотношения, связывающие двойные образы Лапласа продольного и поперечного потенциалов с двойными образа-

¹ В формулу (4.11) работы [1] на стр. 107 по вине автора вкрались описки. Правильное выражение имеет вид

$$\begin{aligned} M_j(t) &= \vartheta^{-2} v_j \{ M_{(2)}(\lambda) [\lambda k_{(2)1} - (1 + \lambda v_j) k_{(2)0}] \delta(t) + \\ &+ \frac{1}{2} \lambda^2 v_j k_{(2)0}^2 S_{(2)12}(t - 2\gamma, \lambda) \} * v_i(t - \vartheta - \lambda) \Big|_{\lambda=-\vartheta}^{\lambda=\vartheta} - \\ &- v_j k_{(2)0} [(k_{(2)0} v_j - k_{(2)1}) S_{(2)12}(t, 0) + k_{(2)0} S_{(2)22}(t, 0)] * \alpha(t - 2\gamma) \end{aligned}$$

Соответственно изменится формула (5.6)

$$\begin{aligned} M_j(t) &= \vartheta^{-2} [\vartheta k_{(2)1} + (1 - \vartheta v_j) k_{(2)0}] v_j K_{(2)}(-\vartheta) v_i(t) + \\ &+ \vartheta^{-2} [\vartheta k_{(2)1} - (1 + \vartheta v_j) k_{(2)0}] v_j M_{(2)}(\vartheta) v_i(t - 2\vartheta) \end{aligned}$$

ми Лапласа скачков компонент напряжения на полосе

$$\begin{aligned} \varphi(q, y, p) &= \left[-\frac{q\tau_{(1)}^\circ(q, p)}{p^2 \sqrt{\gamma^2 p^2 - q^2}} + \operatorname{sgn} y \frac{\sigma_{(2)}^\circ(q, p)}{p^2} \right] \exp(-|y| \sqrt{\gamma^2 p^2 - q^2}) \\ \psi(q, y, p) &= \left[\operatorname{sgn} y \frac{\tau_{(1)}^\circ(q, p)}{p^2} + \frac{q\sigma_{(2)}^\circ(q, p)}{p^2 \sqrt{p^2 - q^2}} \right] \exp(-|y| \sqrt{p^2 - q^2}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\tau_{(1)}^\circ(q, p)$ — образ Лапласа скачка касательных напряжений, а $\sigma_{(2)}^\circ(q, p)$ — нормальных. Потенциалы выражаются через их образы при помощи формулы обращения

$$f(x, y, t) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} e^{pt} \int_{-i\infty+c'}^{i\infty+c'} e^{qx} f(q, y, p) dq dp \quad (2.2)$$

где $c > 0$, а c' нужно выбрать так, чтобы путь интегрирования по q лежал в области регулярности $f(q, y, p)$. Здесь образы обозначаются той же буквой, что и оригиналы, различие делается только в аргументах. Величины $\tau_{(1)}^\circ(q, p)$ и $\sigma_{(2)}^\circ(q, p)$ вычислены в работе [1] и выражаются формулами (выписываем только слагаемые, описывающие дифракцию)

$$\begin{aligned} &K_{(l)}(-\vartheta) \left\{ e^q K_{(l)}\left(-\frac{q}{p}\right) \left(\vartheta + \frac{q}{p}\right)^{-1} - \right. \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} K_{(l)}\left((-1)^{k+1} \frac{q}{p}\right) \exp[(-1)^k q] \text{ v. p. } \int_{\gamma}^{\infty} \dots \int_{\gamma}^{\infty} \Pi_{(l)k}(\xi) \times \\ &\times \frac{d\Omega_{\xi}}{(\xi_1 - \vartheta) [\xi_k - (-1)^k q/p]} \left. \right\} - M_{(l)}(\vartheta) e^{-2p\vartheta} \left\{ e^{-q} K_{(l)}\left(\frac{q}{p}\right) \left(\vartheta + \frac{q}{p}\right)^{-1} + \right. \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} K_{(l)}\left((-1)^k \frac{q}{p}\right) \exp[(-1)^{k+1} q] \int_{\gamma}^{\infty} \dots \int_{\gamma}^{\infty} \Pi_{(l)k}(\xi) \times \\ &\times \frac{d\Omega_{\xi}}{(\xi_1 + \vartheta) [\xi_k + (-1)^k q/p]} \left. \right\} = \begin{cases} \tau_{(1)}^\circ(q, p) / u_i(p) & \text{при } l = 1 \\ \sigma_{(2)}^\circ(q, p) / v_i(p) & \text{при } l = 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k), \quad d\Omega_{\xi} = d\xi_1 \dots d\xi_k \quad (2.4)$$

$$\Pi_{(l)k}(\xi) = \frac{1}{\pi^k} L_{(l)}(\xi_1) \left[\prod_{j=2}^k \frac{L_{(l)}(\xi_j)}{\xi_j + \xi_{j-1}} e^{-2p\xi_j} \right] e^{-2p\xi_1}$$

$$K_{(1)}(\sigma) = \frac{\sqrt{2(\gamma - \sigma)}}{\sqrt{1 + \gamma^2}} e^{g(\sigma)}, \quad K_{(2)}(\sigma) = \frac{\sqrt{2(1 - \sigma)}}{\sqrt{1 + \gamma^2}} e^{g(\sigma)} \quad (2.5)$$

$$g(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma}^1 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\left(1 - \frac{\gamma^2}{\xi^2}\right) \left(\frac{1}{\xi^2} - 1\right) \right]^{1/2} \frac{d\xi}{\xi - \sigma} \quad (2.6)$$

Квадратные корни в этих выражениях униформизируются проведением разрезов в плоскости σ вдоль отрезков действительной оси $[\pm \gamma, \pm \infty)$ и выбором ветви, положительной при $\sigma = 0$. Функции $M_{(l)}(\sigma)$ и $L_{(l)}(\sigma)$ определены только при действительном σ и равны

$$M_{(l)}(\sigma) = \operatorname{Re} K_{(l)}(\sigma - i0), \quad L_{(l)}(\sigma) = \operatorname{Im} \frac{K_{(l)}(\sigma - i0)}{K_{(l)}(-\sigma)} \quad (2.7)$$

Выражения (2.3) уже достаточно сложны, однако имеет смысл еще несколько усложнить их, чтобы приписать каждому члену ясный физический смысл. С этой целью представим функции $L_{(l)}$ (σ) в виде суммы $L_{(l)p}$ (σ) \mp $L_{(l)s}$ (σ), где

$$\begin{aligned} L_{(1)p}(\sigma) &= \frac{\sigma^2 \sqrt{\sigma^2 - \gamma^2} (1 \mp \gamma^2)}{2 [(1 \mp \gamma^2) \sigma^2 - \gamma^2] (\gamma \mp \sigma)} e^{-2g(-\sigma)} & (\sigma > \gamma) \\ L_{(2)p}(\sigma) &= \frac{(\sigma - 1) \sqrt{\sigma^2 - \gamma^2} (1 + \gamma^2)}{2 [(1 \mp \gamma^2) \sigma^2 - \gamma^2]} e^{-2g(-\sigma)} & (\sigma > \gamma) \\ L_{(1)s}(\sigma) &= \frac{(\sigma - \gamma) \sqrt{\sigma^2 - 1} (1 \mp \gamma^2)}{2 [(1 \mp \gamma^2) \sigma^2 - \gamma^2]} e^{-2g(-\sigma)} & (\sigma > 1) \\ L_{(2)s}(\sigma) &= \frac{\sigma^2 \sqrt{\sigma^2 - 1} (1 \mp \gamma^2)}{2 [(1 \mp \gamma^2) \sigma^2 - \gamma^2] (1 \mp \sigma)} e^{-2g(-\sigma)} & (\sigma > 1) \\ L_{(l)p}(\sigma) &= 0 \quad (\sigma < \gamma), \quad L_{(l)s}(\sigma) = 0 & (\sigma < 1) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Теперь можно представить $\Pi_{(l)k}$ в виде

$$\Pi_{(l)k} = \sum_{(r)} \Pi_{(l)(r)k} \quad (2.9)$$

где (r) — сложный индекс, указывающий последовательность индексов p и s у функции L , входящих в каждое слагаемое. Например, при $k = 3$ имеем

$$\begin{aligned} \Pi_{(l)3}(\zeta) &= \Pi_{(l)pppz} \mp \Pi_{(l)ppsz} \mp \Pi_{(l)pspz} \mp \\ &+ \Pi_{(l)sprz} \mp \Pi_{(l)psss} \mp \Pi_{(l)spss} \mp \Pi_{(l)sspz} \mp \Pi_{(l)ssss} = \\ &= \pi^{-3} L_{(l)p}(\zeta_1) L_{(l)p}(\zeta_2) L_{(l)p}(\zeta_3) (\zeta_1 \mp \zeta_2)^{-1} (\zeta_2 \mp \zeta_3)^{-1} e^{-2p(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3)} \mp \\ &\mp \pi^{-3} L_{(l)p}(\zeta_1) L_{(l)p}(\zeta_2) L_{(l)s}(\zeta_3) (\zeta_1 \mp \zeta_2)^{-1} (\zeta_2 \mp \zeta_3)^{-1} e^{-2p(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3)} \mp \\ &+ \dots \mp \pi^{-3} L_{(l)s}(\zeta_1) L_{(l)s}(\zeta_2) L_{(l)s}(\zeta_3) (\zeta_1 \mp \zeta_2)^{-1} (\zeta_2 \mp \zeta_3)^{-1} e^{-2p(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3)} \end{aligned}$$

Легко видеть, что при любом k функция $\Pi_{(l)k}$ распадается на 2^k слагаемых. После подстановки (2.9) в (2.3) и далее в (2.1) потенциалы выражаются в виде двойных сумм, каждому слагаемому которых можно приписать определенный физический смысл. Именно, члены, содержащие k -кратные интегралы, описывают $k+1$ раз дифрагированные волны. Составной индекс (r) у функций $\Pi_{(l)(r)k}$, входящих в подынтегральные выражения, описывает предысторию волны, изображаемой соответствующим слагаемым. Например, индекс pss соответствует четырехкратно дифрагированной волне, которая после первой дифракции распространялась как продольная (потенциальная), после второй — как поперечная (соленоидальная), после третьей — как поперечная, и является продольной или поперечной, в зависимости от того, в выражение какого из потенциалов входит рассматриваемое слагаемое. Заметим, что, в соответствии с (2.8), в многократных интегралах по аргументам функций $L_{(l)s}$ интегрирование должно производиться от 1 до ∞ , в то время как по аргументам функций $L_{(l)p}$ — по-прежнему от γ до ∞ . Особую роль играют члены с $k = 0$, так как они описывают не только дифрагированные, но и отраженные от полосы волны, а также образование тени.

Из вида выражений (2.3) можно заключить, что имеются две системы многократно дифрагированных волн, в первую из которых входят волны, испытавшие первую дифракцию на левом ребре полосы (члены в первой фигурной скобке в (2.3)), а во вторую — испытавшие первую дифракцию на правом ребре. Между этими системами существует простая связь, которую легко установить, применяя к (2.3) и (2.1) теоремы операционного исчисления. Именно, пусть $f(x, y, t, \vartheta)$ — потенциал какой-либо из многократно дифрагированных волн первой системы; аналогичная волна из второй системы описывается потенциалом

$$-f(-x, -y, t - 2\vartheta, -\vartheta) \quad (2.10)$$

Эта связь не имеет места для волн с $k = 0$.

3. В этом пункте исследуем однократно дифрагированные и отраженные волны. Образы потенциалов описываются в этом случае выражениями

$$\begin{aligned} \varphi(q, y, p) = & \left[- \frac{qu_i(p) K_{(1)}(-\vartheta)}{p^2 \sqrt{\gamma^2 p^2 - q^2} (\vartheta + q/p)} K_{(1)}\left(-\frac{q}{p}\right) + \right. \\ & \left. + \operatorname{sgn} y \frac{v_i(p) K_{(2)}(-\vartheta)}{p^2 (\vartheta + q/p)} K_{(2)}\left(-\frac{q}{p}\right) \right] \exp\{q - |y| \sqrt{\gamma^2 p^2 - q^2}\} + \\ & + \left[\frac{qu_i(p) M_{(1)}(\vartheta)}{p^2 \sqrt{\gamma^2 p^2 - q^2} (\vartheta + q/p)} K_{(1)}\left(\frac{q}{p}\right) - \right. \\ & \left. - \operatorname{sgn} y \frac{v_i(p) M_{(2)}(\vartheta)}{p^2 (\vartheta + q/p)} K_{(2)}\left(\frac{q}{p}\right) \right] \exp\{-q - |y| \sqrt{\gamma^2 p^2 - q^2}\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \psi(q, y, p) = & \left[\operatorname{sgn} y \frac{u_i(p) K_{(1)}(-\vartheta)}{p^2 (\vartheta + q/p)} K_{(1)}\left(-\frac{q}{p}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{qv_i(p) K_{(2)}(-\vartheta)}{p^2 \sqrt{p^2 - q^2} (\vartheta + q/p)} K_{(2)}\left(-\frac{q}{p}\right) \right] \exp\{q - |y| \sqrt{p^2 - q^2}\} - \\ & - \left[\operatorname{sgn} y \frac{u_i(p) M_{(1)}(\vartheta)}{p^2 (\vartheta + q/p)} K_{(1)}\left(\frac{q}{p}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{qv_i(p) M_{(2)}(\vartheta)}{p^2 \sqrt{p^2 - q^2} (\vartheta + q/p)} K_{(2)}\left(\frac{q}{p}\right) \right] \exp\{-q - |y| \sqrt{p^2 - q^2}\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

При вычислении обращений от (3.2) и (3.1) удобно перейти к частному случаю, когда

$$u_i = U_i \delta(t - \vartheta(x + 1) \mp \delta y), \quad v_i = V_i \delta(t - \vartheta(x \mp 1) \mp \delta y) \quad (3.3)$$

Здесь не следует путать обозначение дельта-функции с постоянной, входящей в ее аргумент. Это неудобство связано с тем, что здесь используются обозначения работы [1]. Постоянные U_i , V_i и δ зависят от угла падения и типа волны и равны

$$U_i = -\vartheta, \quad V_i = \delta = \sqrt{\gamma^2 - \vartheta^2} \quad (3.4)$$

при падении продольной волны и

$$U_i = \delta = \sqrt{1 - \vartheta^2}, \quad V_i = \vartheta \quad (3.5)$$

при падении поперечной волны. Потенциалы, соответствующие этому частному случаю, будем обозначать прописными буквами Φ и Ψ . К общему случаю, когда

$$u_i = U_i f(t - \vartheta(x \mp 1) \mp \delta y), \quad v_i = V_i f(t - \vartheta(x \mp 1) \mp \delta y) \quad (3.6)$$

можно перейти по формуле

$$\varphi(x, y, t) = \int_0^t \Phi(x, y, t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (3.7)$$

и аналогично для ψ .

Начнем с вычисления $\Psi(x, y, t)$. После подстановки (3.2) в (2.2) получается линейная комбинация четырех интегралов обращения. Рассмотрим один из них:

$$J = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} e^{pt} \int_{-i\infty+c'}^{i\infty+c'} \frac{\exp\{q(x+1) - |y| \sqrt{p^2 - q^2}\}}{p(q + \vartheta p)} K_{(1)}\left(-\frac{q}{p}\right) dq dp$$

Положим здесь $c' = 0$, $q = p\sigma$. Тогда (3.8)

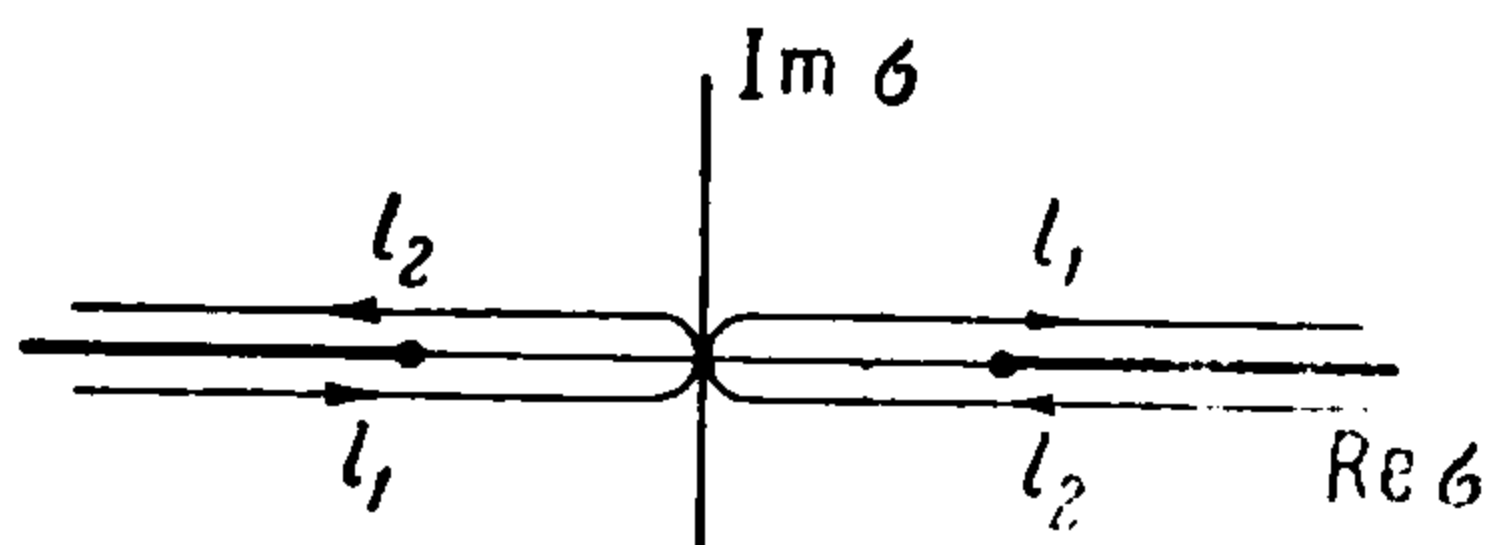
$$J = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^t d\tau \int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} e^{p\tau} \int_{l(p)} \frac{\exp\{p[\sigma(x+1) - |y| \sqrt{1 - \sigma^2}]\}}{\sigma + \vartheta} K_{(1)}(-\sigma) d\sigma dp$$

где $l(p)$ — контур в комплексной плоскости σ , соответствующий мнимой оси плос-

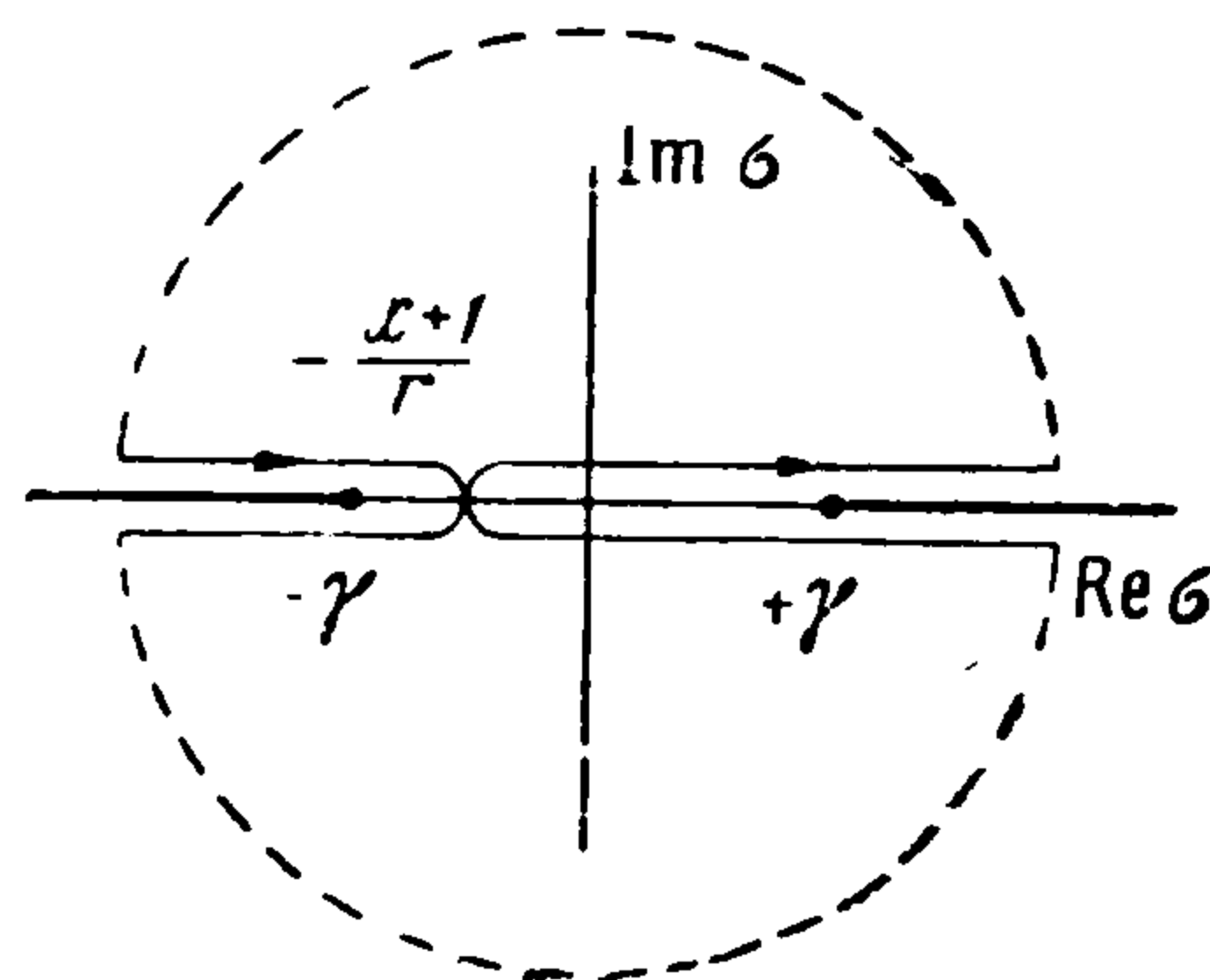
кости q . Положим теперь $c = 0$ и разобьем интеграл по p на сумму двух интегралов: от $-i\infty$ до 0 и от 0 до $i\infty$. Получим

$$J = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^t d\tau \left\{ \int_0^{i\infty} dp \int_{l_1} \frac{\exp \{p[\tau + \sigma(x+1) - |y| \sqrt{1-\sigma^2}]\}}{\sigma + \vartheta} K_{(1)}(-\sigma) d\sigma + \right. \\ \left. + \int_{-i\infty}^0 dp \int_{l_2} \frac{\exp \{p[\tau + \sigma(x+1) - |y| \sqrt{1-\sigma^2}]\}}{\sigma + \vartheta} K_{(1)}(-\sigma) d\sigma \right\}$$

где l_1 и l_2 — контуры, показанные на фиг. 2. Там же показаны разрезы, проходящие от $-\gamma$ до $-\infty$ и от 1 до ∞ . (Напомним, что функция $K_{(1)}(-\sigma)$ регулярна всюду вне отрезка действительной оси $[-\gamma, -\infty)$.) Если можно было бы изменить порядок интегрирования, то интеграл по p вычислялся бы элементарно. Чтобы это было возможно, надо деформировать контуры l_1 и l_2 так, чтобы $\text{Im} [\tau + \sigma(x+1) - |y| \sqrt{1-\sigma^2}]$



Фиг. 2



Фиг. 3

было положительно на l_1 и отрицательно на l_2 . Оказывается, что для этого нужно сдвинуть точки пересечения контуров с действительной осью в точку $\sigma = -(x+1)/r$, причем $r = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$. Если $(x+1)/r > \vartheta$, то при деформировании контуров нужно добавить вычеты в точке $\sigma = -\vartheta$, а при $(x+1)/r > \gamma$ — еще и интеграл по берегам части разреза от $\sigma = -\gamma$ до $\sigma = -(x+1)/r$. Теперь интеграл (3.8) принимает вид

$$J = -H(r^{-1}(x+1) - \vartheta) H(t - \vartheta(x+1) - |y| \sqrt{1-\vartheta^2}) M_{(1)}(\vartheta) + \\ + \frac{1}{\pi} H(r^{-1}(x+1) - \gamma) H(r-t) \text{v. p.} \int_{\gamma}^{(x+1)/r} H(t - \sigma(x+1) - |y| \sqrt{1-\sigma^2}) \times \\ \times \frac{N_{(1)}(\sigma)}{\vartheta - \sigma} d\sigma - \frac{1}{4\pi^2} \int_0^t d\tau \int_{(l_1' - l_2')} \frac{K_{(1)}(-\sigma) d\sigma}{(\vartheta + \sigma) [\tau + \sigma(x+1) - |y| \sqrt{1-\sigma^2}]} \quad (3.9)$$

Здесь $H(\tau)$ — единичная функция Хевисайда. Перед интегралом во втором слагаемом пишем символ главного значения, чтобы учесть возможный случай $\vartheta > \gamma$. Кроме того, как и в работе [1],

$$N_{(1)}(\sigma) = L_{(1)}(\sigma) K_{(1)}(-\sigma)$$

Займемся теперь последним слагаемым. Контур $(l_1' - l_2')$ показан на фиг. 3. Замыкая его в верхней и нижней полуплоскостях полуокружностями бесконечно большого радиуса, как схематически показано на фигуре, сведем интеграл по σ к сумме вычетов в полюсах

$$\sigma = \sigma_{1,2} = r^{-2} [-\tau(x+1) \pm i|y| \sqrt{\tau^2 - r^2}]$$

причем эти полосы попадают внутрь контура интегрирования лишь при $\tau > r$.

Таким образом, последнее слагаемое в (3.9) оказывается равным

$$-\frac{1}{2\pi} \int_r^t \left\{ \frac{K_{(1)}(-\sigma_1) \sqrt{1-\sigma_1^2}}{\vartheta + \sigma_1} + \frac{K_{(1)}(-\sigma_2) \sqrt{1-\sigma_2^2}}{\vartheta + \sigma_2} \right\} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}$$

Так как слагаемые в фигурных скобках являются комплексно сопряженными, подынтегральное выражение действительно, и интеграл (3.8) сведен к квадратурам. Однако удобно для получения асимптотических разложений в окрестности волновых фронтов привести последнее выражение снова к некоторому контурному интегралу в плоскости σ . Это достигается простой заменой переменных. Окончательно получаем

$$J = -H(r^{-1}(x+1) - \vartheta) H(t - \vartheta(x+1) - |y| \sqrt{1 - \vartheta^2}) M_{(1)}(\vartheta) + \\ + \frac{1}{\pi} H\left(\frac{x+1}{r} - \gamma\right) H(r-t) \text{v.p.} \int_{\gamma}^{(x+1)/r} H(t - \sigma(x+1) - \\ - |y| \sqrt{1 - \sigma^2}) \frac{N_{(1)}(\sigma)}{\vartheta - \sigma} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_s} \frac{K_{(1)}(\sigma)}{\vartheta - \sigma} H(t-r) \quad (3.10)$$

Здесь L_s — контур, проходящий от точки $\sigma = r^{-2} [t(x+1) - i|y| \sqrt{t^2 - r^2}]$, к точке $\sigma = r^{-2} [t(x+1) + i|y| \sqrt{t^2 - r^2}]$ и пересекающий действительную ось при $\sigma = r^{-1}(x+1)$.

Остальные три интеграла, входящие в выражение для Ψ , аналогичны (3.8). Таким образом

$$\Psi(x, y, t) = \text{Re} \frac{\text{sgn } y U_i \sqrt{\gamma^2 - \vartheta^2} - V_i \vartheta}{\vartheta^2 + \sqrt{1 - \vartheta^2} \sqrt{\gamma^2 - \vartheta^2}} H(\cos \alpha^- - \vartheta) H(t - \\ - \vartheta \xi^- - |y| \sqrt{1 - \vartheta^2}) H(\cos \alpha^+ + \vartheta) + \quad (3.11) \\ + \frac{1}{2\pi i} H(t - r^-) \int_{L_s^-} \frac{\text{sgn } y U_i K_{(1)}(-\vartheta) K_{(1)}(\sigma) \sqrt{1 - \sigma^2} - V_i K_{(2)}(-\vartheta) K_{(2)}(\sigma) \sigma}{(\vartheta - \sigma) \sqrt{1 - \sigma^2}} d\sigma + \\ + \frac{1}{2\pi i} H(t^+ - r^+) \int_{L_s^+} \frac{\text{sgn } y U_i M_{(1)}(\vartheta) K_{(1)}(\sigma) \sqrt{1 - \sigma^2} + V_i M_{(2)}(\vartheta) K_{(2)}(\sigma) \sigma}{(\vartheta + \sigma) \sqrt{1 - \sigma^2}} d\sigma + \\ + \frac{1}{\pi} H(r^- - t) H(\cos \alpha^- - \gamma) H(\cos \alpha^+ + \gamma) \text{v.p.} \int_{\gamma}^{\cos \alpha^-} H(t - \sigma \xi^- - \\ - |y| \sqrt{1 - \sigma^2}) \frac{\text{sgn } y U_i K_{(1)}(-\vartheta) N_{(1)}(\sigma) \sqrt{1 - \sigma^2} - V_i K_{(2)}(-\vartheta) N_{(2)}(\sigma) \sigma}{(\vartheta - \sigma) \sqrt{1 - \sigma^2}} d\sigma + \\ + \frac{1}{\pi} H(r^+ - t^+) H(\cos \alpha^- + \gamma) H(\cos \alpha^+ - \gamma) \int_{\gamma}^{\cos \alpha^+} H(t^+ - \sigma \xi^+ - \\ - |y| \sqrt{1 - \sigma^2}) \frac{\text{sgn } y U_i M_{(1)}(\vartheta) N_{(1)}(\sigma) \sqrt{1 - \sigma^2} + V_i M_{(2)}(\vartheta) N_{(2)}(\sigma) \sigma}{(\vartheta + \sigma) \sqrt{1 - \sigma^2}} d\sigma$$

Аналогично для $\Phi(x, y, t)$ получаем выражение

$$\Phi(x, y, t) = \text{Re} \frac{U_i \vartheta + \text{sgn } y V_i \sqrt{1 - \vartheta^2}}{\vartheta^2 + \sqrt{1 - \vartheta^2} \sqrt{\gamma^2 - \vartheta^2}} H(\gamma \cos \alpha^- - \vartheta) H(\gamma \cos \alpha^+ + \\ + \vartheta) H(t - \vartheta \xi^- - |y| \sqrt{\gamma^2 - \vartheta^2}) + \quad (3.12) \\ + \frac{1}{2\pi i} H(t - \gamma r^-) \int_{L_p^-} \frac{U_i K_{(1)}(-\vartheta) K_{(1)}(\sigma) \sigma + \text{sgn } y V_i K_{(2)}(-\vartheta) K_{(2)}(\sigma) \sqrt{\gamma^2 - \sigma^2}}{(\vartheta - \sigma) \sqrt{\gamma^2 - \sigma^2}} d\sigma + \\ + \frac{1}{2\pi i} H(t^+ - \gamma r^+) \int_{L_p^+} \frac{U_i M_{(1)}(\vartheta) K_{(1)}(\sigma) \sigma - \text{sgn } y V_i M_{(2)}(\vartheta) K_{(2)}(\sigma) \sqrt{\gamma^2 - \sigma^2}}{(\vartheta + \sigma) \sqrt{\gamma^2 - \sigma^2}} d\sigma$$

В формулах (3.11) и (3.12) введены следующие обозначения:

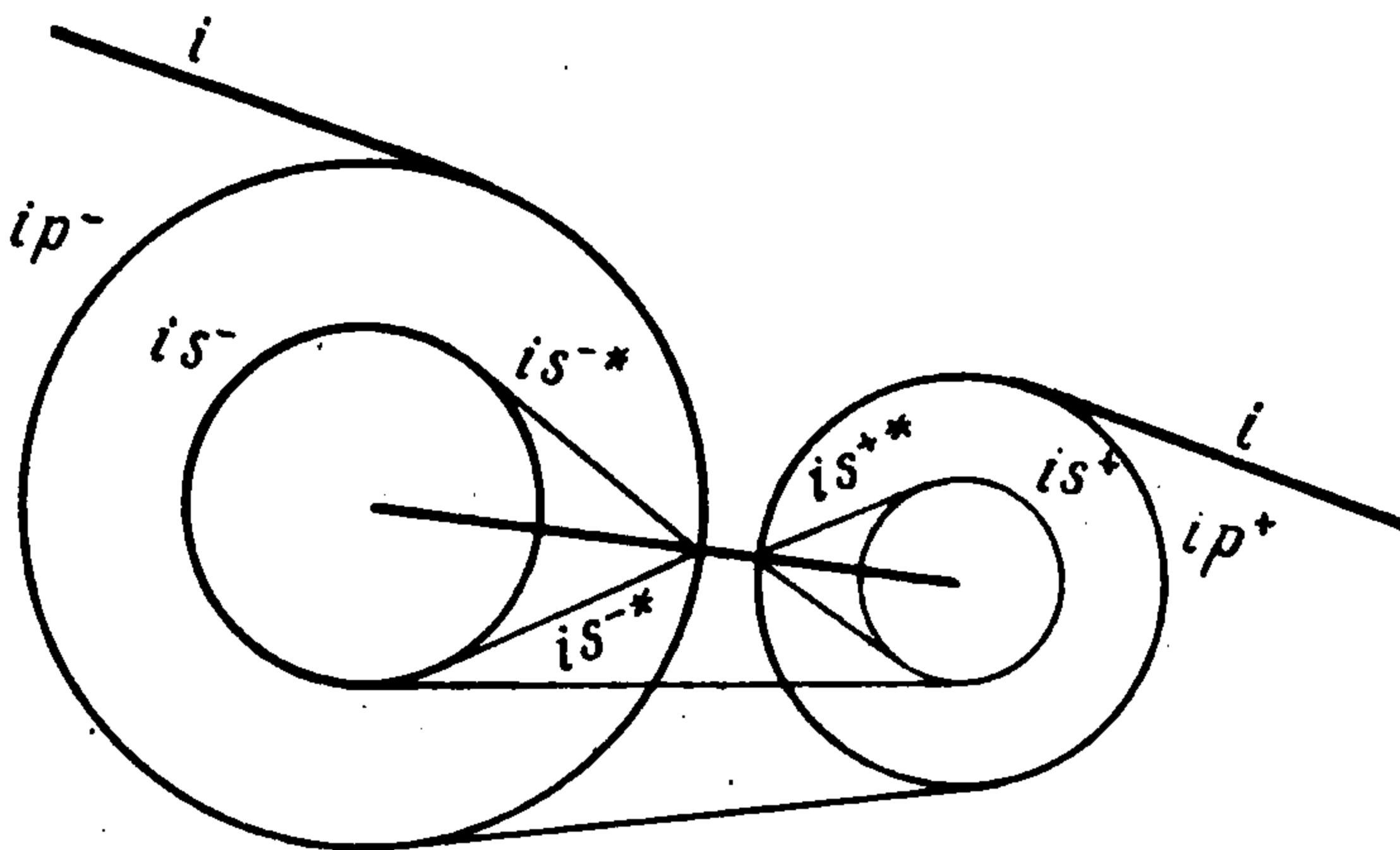
$$t^+ = t - 2\vartheta, \quad \xi^- = r^- \cos \alpha^- = x + 1, \quad r^- = \sqrt{(\xi^-)^2 + y^2}$$

$$\xi^+ = r^+ \cos \alpha^+ = 1 - x, \quad r^+ = \sqrt{(\xi^+)^2 + y^2}$$

контур L_p^- проходит от точки $\sigma = (r^-)^{-2} (t\xi^- - i|y| \sqrt{t^2 - \gamma^2 (r^-)^2})$ к точке $\sigma = (r^-)^{-2} (t\xi^- + i|y| \sqrt{t^2 - \gamma^2 (r^-)^2})$, пересекая действительную ось при $\sigma = \gamma \cos \alpha^-$, контур L_s^- определен выше, а контуры L_p^+ и L_s^+ определяются так же, как и L_p^- и L_s^- , но через величины, снабженные значком $+$.

Теперь легко установить физический смысл каждого слагаемого в выражениях (3.11) и (3.12). Первые слагаемые описывают отраженные продольную и поперечную

волны при $y > 0$, а при $y < 0$ они уничтожают падающую волну, обеспечивая образование геометрической тени. Следующие два слагаемых в выражении каждого из потенциалов описывают цилиндрические волны, дифрагированные на левом и правом краях полосы. Эти волны будем обозначать сим-олически как ip^- , ip^+ , is^- и is^+ . (Значок p относится к продольным (потенциальным) волнам, значок s — к поперечным (соленоидальным) волнам). Последние два слагаемых в (3.11) представляют собой поте-ци-алы головных волн.



Фиг. 4

алы головных волн. Эти волны будем обозначать как is^* и is^{+*} . На фиг. 4 показано расположение фронтов всех этих волн для моментов времени $2\vartheta < t < 2\gamma$.

4. Выражения (3.11) и (3.12) полностью описывают дифракцию при $0 < t < 2\gamma$, т. е. до того момента, когда фронт волны ip^- достигнет правого края полосы. В этот момент появляются волны ip^-p^+ , ip^-s^+ , ip^-s^{+*} . В обозначениях многократно дифрагированных волн последовательность индексов определяется историей волны: индекс i обозначает падающую волну, индексы p и s со значком $-$ обозначают дифракцию на левом крае полосы, а со значком $+$ — на правом; звездочка у индекса s обозначает головную волну. Ясно, что индекс со звездочкой может стоять только на последнем месте, а индексы со значками $-$ и $+$ чередуются, поэтому достаточно указывать, какой индекс со значками $-$ или $+$ следует сразу за индексом падающей волны, т. е. вместо $ip^-p^+s^-$ или $ip^+p^-s^+$ будем писать ip^-ps или ip^+ps . В общем случае будем писать $i(r^-)s$, $i(r^+)s$ или $i(r^-)p$. В п. 2 указана простая связь между потенциалами волн $i(r^-)p$, $i(r^-)s$ и $i(r^+)p$, $i(r^+)s$, выражаемая формулой (2.10). Нужно только заметить, что при замене ϑ на $-\vartheta$ следует также писать $M_{(l)}(\vartheta)$ вместо $K_{(l)}(-\vartheta)$, и наоборот. Поэтому ограничимся вычислением потенциалов волн $i(r^-)p$, $i(r^-)s$ и $i(r^-)s^*$. Из (2.1), (2.3) и (2.9) получаем выражение для образа потенциала волны $i(r^-)p$:

$$\varphi = \left[\frac{qu_i(p)}{p^2 \sqrt{\gamma^2 p^2 - q^2}} K_{(1)} \left((-1)^{k+1} \frac{q}{p} \right) \exp [(-1)^k q] \text{ v. p. } \int_{\Delta(r)} \times \right.$$

$$\times \Pi_{(1)(r)k}(\zeta) \frac{d\Omega_{\zeta}}{(\zeta_1 - \vartheta) [\zeta_k - (-1)^k q/p]} - \text{sgn } y \frac{v_i(p)}{p^2} K_{(2)} \left((-1)^{k+1} \frac{q}{p} \right) \times$$

$$\left. \times \exp [(-1)^k q] \text{ v. p. } \int_{\Delta(r)} \Pi_{(2)(r)k}(\zeta) \frac{d\Omega_{\zeta}}{(\zeta_1 - \vartheta) [\zeta_k - (-1)^k q/p]} \right] \times$$

$$\times \exp \{-|y| \sqrt{\gamma^2 p^2 - q^2}\} \quad (4.1)$$

где $k \neq 1$ — кратность дифракции, $\Delta_{(r)}$ — область интегрирования, которая определяется следующим образом: если в составном индексе (r) на j -м месте стоит p , то интегрирование по ζ_j проводится от γ до ∞ ; в противном случае — от 1 до ∞ .

Легко убедиться, что при выполнении обращения можно без ограничений интегрировать под знаком кратного интеграла. При этом вновь получаются интегралы типа (3.8), и получаем (снова для случая, когда падающая волна имеет вид (3.3))

$$\Phi(x, y, t) = \left[(-1)^k K_{(1)}(-\vartheta) \text{ v. p.} \int_{\Delta_{(r)p}} \frac{\Pi_{(1)(r)k}^*(\xi)}{\xi_1 - \vartheta} \int_{L_{kp}} \frac{K_{(1)}(\sigma) \sigma d\sigma}{(\xi_k \mp \sigma) \sqrt{\gamma^2 - \sigma^2}} d\Omega_\zeta U_i - \right. \\ \left. - \text{sgn } y K_{(2)}(-\vartheta) \text{ v. p.} \int_{\Delta_{(r)p}} \frac{\Pi_{(2)(r)k}^*(\xi)}{\xi_1 - \vartheta} \int_{L_{kp}} \frac{K_{(2)}(\sigma) d\sigma}{\xi_k \mp \sigma} d\Omega_\zeta V_i \right] \frac{1}{2\pi i} \quad (4.2)$$

где $\Delta_{(r)p}$ — область интегрирования, определяемая условиями

$$\Delta_{(r)p} \subset \Delta_{(r)}, \quad t_k \equiv t - 2 \sum_{j=1}^k \zeta_j > \gamma r_k \quad (r_k = \sqrt{\xi_k^2 \mp y^2}, \xi_k = 1 \mp (-1)^k x)$$

Контур L_{kp} в плоскости σ определяется через t_k, ξ_k, r_k так же, как контур L_p^- в (3.12) определялся через $t, \xi^-,$ и r^- , а

$$\Pi_{(l)(r)k}^*(\xi) = \Pi_{(l)(r)k}(\xi) \exp \left\{ 2p \sum_{j=1}^k \zeta_j \right\} \quad (4.3)$$

т. е. получается из $\Pi_{(l)(r)k}$ отбрасыванием экспоненциального множителя. Условие $\Delta_{(r)p} \subset \Delta_{(r)}$ можно записать в виде

$$\zeta_j \geq \zeta_{j0} \begin{cases} \zeta_{j0} = \gamma, & \text{если в } (r) \text{ на } j\text{-м месте стоит } p \\ \zeta_{j0} = 1, & \text{если в } (r) \text{ на } j\text{-м месте стоит } s \end{cases}$$

Пусть в (r) входит m раз индекс p и $(k - m)$ раз индекс s . Тогда легко обнаруживаем, что волна $i(r^-)p$ появляется при $t = 2m\gamma \mp 2(k - m)$, как и следовало ожидать из кинематических соображений. Для потенциала волны $i(r^-)s$ получим

$$\Psi(x, y, t) = \left[\text{sgn } y U_i K_{(1)}(-\vartheta) \text{ v. p.} \int_{\Delta_{(r)s}} \frac{\Pi_{(1)(r)k}^*(\xi)}{\xi_1 - \vartheta} \int_{L_{ks}} \frac{K_{(1)}(\sigma) d\sigma}{\xi_k + \sigma} d\Omega_\zeta - \right. \\ \left. - (-1)^k V_i K_{(2)}(-\vartheta) \text{ v. p.} \int_{\Delta_{(r)s}} \frac{\Pi_{(2)(r)k}^*(\xi)}{\xi_1 - \vartheta} \int_{L_{ks}} \frac{K_{(2)}(\sigma) \sigma d\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2} (\xi_k + \sigma)} d\Omega_\zeta \right] \frac{i}{2\pi} \quad (4.4)$$

а для потенциала волны $i(r^-)s^*$ — выражение

$$\Psi(x, y, t) = -\frac{1}{\pi} H \left(r_k - t \mp 2 \sum_{j=1}^k \zeta_{j0} \right) H(\cos \alpha_k - \gamma) H(\cos \alpha_{k+1} \mp \gamma) \times \\ \times \left[\text{sgn } y K_{(1)}(-\vartheta) U_i \text{ v. p.} \int_{\Delta_{(r)p}} \frac{\Pi_{(1)(r)k}^*(\xi)}{\xi_1 - \vartheta} \int_{\gamma}^{\cos \alpha_k} H(\lambda_k) \frac{N_{(1)}(\sigma) d\sigma}{(\xi_k + \sigma)} d\Omega_\zeta - \right. \\ \left. - (-1)^k K_{(2)}(-\vartheta) V_i \text{ v. p.} \int_{\Delta_{(r)p}} \frac{\Pi_{(2)(r)k}^*(\xi)}{\xi_1 - \vartheta} \int_{\gamma}^{\cos \alpha_k} H(\lambda_k) \frac{N_{(2)}(\sigma) \sigma d\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2} (\xi_k + \sigma)} d\Omega_\zeta \right] \quad (4.5)$$

где

$$\cos \alpha_k = \frac{\xi_k}{r_k}, \quad \lambda_k = t_k - \sigma \xi_k - |y| \sqrt{1 - \sigma^2} \quad (4.6)$$

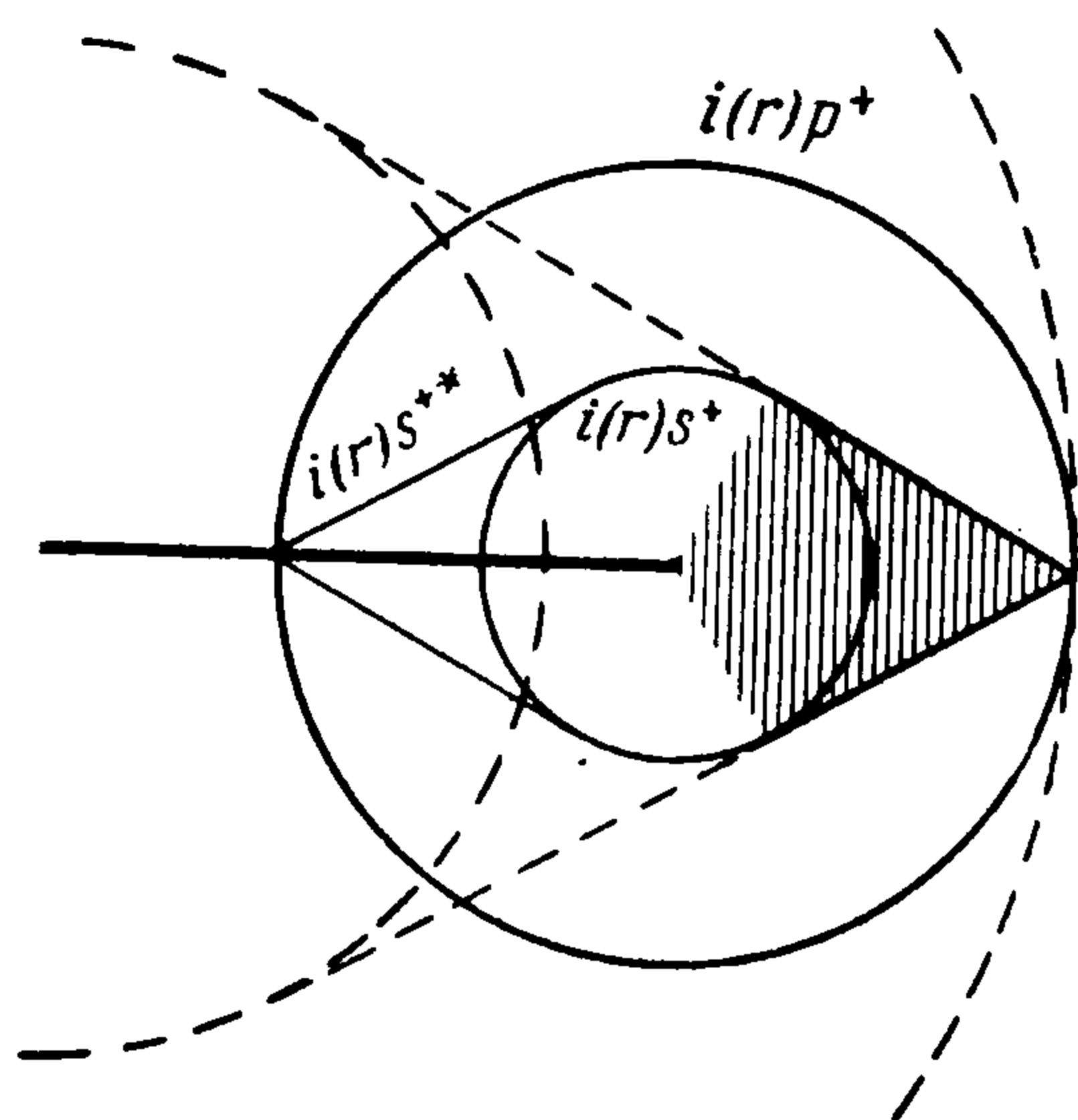
контур L_{ks} определяется через t_k, ξ_k, r_k аналогично контуру L_s^- , а область интегрирования $\Delta_{(r)s}$ определяется условиями

$$\Delta_{(r)s} \subset \Delta_{(r)}, \quad t_k > r_k \quad (4.7)$$

Появление множителя $H(\cos \alpha_{k+1} \mp \gamma)$ в выражении (4.5) не очевидно. Дело в том, что при вычислении обращения от k -го слагаемого формулы (2.3) получается член, обязанный вычету в точке $\sigma = \xi_k$, отличный от нуля лишь при $\cos \alpha_k < -\xi_k$.

После преобразований оказывается, что это слагаемое уничтожает головную волну, появившуюся при дифракции на противоположном крае полосы, в области, заштрихованной на фиг. 5, и должно быть отнесено к члену с номером $k - 1$, а к потенциалу с номером k должно быть добавлено такое же слагаемое из члена с номером $k + 1$. Переносом подобных слагаемых из членов с $k = 1$ объясняется появление аналогичных множителей при потенциалах головных волн в формуле (3.11).

5. Для описания возмущений, связанных с движением полосы, можно было бы исходить из формул для образов (аналогичных формуле (2.3)), заимствуя их из [1], но имеется более короткий путь. Действительно, из вида граничных условий (1.2) заключаем, что возмущения, порождаемые поступательным движением полосы, должны быть такими же, как при дифракции нормально падающих на закрепленную полосу продоль-



Фиг. 5.

ной волны со смещением $v_i = -v_0(t - \gamma y)$ и поперечной волны со смещением $u_i = -u_0(t - y)$. Ясно, что при этом образуется такое же число отдельных волн, как при дифракции на закрепленной полосе. Легко перейти от формул, описывающих потенциалы волн, возникающих при дифракции волны вида (3.3), к потенциалам соответствующих волн, порождаемых поступательным движением полосы

$$\Phi_0(x, y, t) = - \int_0^t [u_0(t - \tau) \Phi_1 + v_0(t - \tau) \Phi_2] d\tau$$

$$\Phi = \Phi_1(x, y, \tau; U_i = 1, V_i = 0, \vartheta = 0)$$

$$\Phi = \Phi_2(x, y, \tau; U_i = 0, V_i = 1, \vartheta = 0) \quad (5.1)$$

и аналогично для потенциалов поперечных волн.

Чтобы перейти от формул, описывающих дифракцию волн (3.3) на закрепленной полосе, к формулам, описывающим возмущение, порождаемые ее поворотом, достаточно ввести производную по параметру ϑ . Тогда легко убедиться, что соответствующие выражения для потенциалов должны иметь вид

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha = & \int_0^t \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi(x, y, \tau; U_i = 0, V_i = 1, \vartheta) \right]_{\vartheta=0} \int_0^{t-\tau} \alpha(\tau_1) d\tau_1 \right\} d\tau + \\ & + (1 - x_0) \int_0^t \alpha(t - \tau) \Phi(x, y, \tau; U_i = 0, V_i = 1, \vartheta = 0) d\tau \end{aligned}$$

Не останавливаемся более подробно на этих волнах, так как вблизи фронтов они асимптотически малы по сравнению с дифрагированными волнами (именно, как легко заключить из формул работы [1] для смещения и поворота полосы, они будут иметь порядок разрыва на фронтах на единицу ниже порядка разрыва на фронтах дифрагированных волн при нормальном падении ($\vartheta = 0$) и на две единицы ниже в других случаях при $\vartheta \neq 0$)).

Полученные в п. 3—5 формулы громоздки и неудобны для практического использования, в связи с чем целесообразно было бы получить асимптотические выражения, описывающие дифрагированные волны вблизи их фронтов и на больших расстояниях от полосы. Однако при этом оказывается необходимым исследовать большое число частных случаев, что невозможно в рамках настоящей статьи.

Заметим, что близкая задача об образовании трещины, имеющей форму полосы, в предварительно напряженной упругой среде рассмотрена Л. М. Флитманом [2].

Поступила 18 I 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. К о с т р о в Б. В. Движение жесткой массивной полосы, впаянной в упругую среду, под действием плоской волны. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
2. Ф л и т м а н Л. М. Волны, вызванные мгновенным разрывом сплошности упругой среды. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.