Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

ТОЧНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ МНОГОКРАТНО ДИФРАГИРОВАННОЙ ВОЛНЫ С КРУГОВЫМ ФРОНТОМ

А. Ф. Филиппов

(Москва)

Получено точное выражение в виде кратного интеграла для акустической волны с круговым или прямолинейным фронтом и испытывающей многократную дифракцию на вершинах многоугольника. Найдена также формула для любого члена лучевого разложения этой волны вблизи ее фронта.

1. Различные представления волны с фронтом в виде дуги окружности. В области $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, $0 < \rho < \infty$, $\theta_1 < \theta < \theta_2$ (ρ, θ — полярные координаты) рассмотрим решение $u(t, \rho, \theta)$ волнового уравнения

$$u_{tt} = u_{\rho\rho} + \rho^{-1}u_\rho + \rho^{-2}u_{\theta\theta} \tag{1.1}$$

равное нулю при $\rho > t$, т. е. перед фронтом, и однородное нулевого измерения относительно t и ρ. Такими решениями являются, например, волна от точечного источника постоянной интенсивности, включаемого при $t = 0$, а также дифрагированная волна в задачах о дифракции плоской волны на клине [1], [2]. Согласно [1], такое решение при $\rho < t$ представимо в виде

$$u = \operatorname{Re} U(\zeta), \qquad \zeta = \left[\frac{t}{\rho} - \left(\frac{t^2}{\rho^2} - 1\right)^{1/2}\right] e^{i\theta} \tag{1.2}$$

где $U(\zeta)$ — аналитическая функция комплексного переменного ζ, чисто мнимая на дуге $\zeta = e^{i\theta}$, $\theta_1 < \theta < \theta_2$. Обратно, для любой такой функции $U(\zeta)$ формула (1.2) дает решение уравнения (1.1), обладающее указанными свойствами. Полагая в (1.2)

$$\zeta = e^{i(\theta + i\eta)}, \qquad U(\zeta) = U_1(\theta + i\eta) \tag{1.3}$$

и учитывая, что $u = 0$ при $\rho = t$ (т. е. при $\eta = 0$), получим, что $u = \operatorname{Re} U_1(\theta + i\eta)$ — нечетная функция от η и что

$$u = \frac{U_1(\theta + i\eta) - U_1(\theta - i\eta)}{2} = i\eta\, U_1'(\theta) - \frac{i\eta^3}{3!} U_1'''(\theta) + \ldots \tag{1.4}$$

Пользуясь равенствами (1.2) и (1.3) и полагая $\tau = t - \rho$, получим

$$\eta = \int_1^{t/\rho} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \int_0^{\tau/\rho} \left[2s\left(1 + \frac{s}{2}\right)\right]^{-1/2} ds = \left(\frac{2\tau}{\rho}\right)^{1/2} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \left(\frac{\tau}{\rho}\right)^{j+1/2}$$

Из написанных равенств вытекает, что

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j(\theta)}{\rho^{j+1/2}} f_j(\tau) \tag{1.5}$$

$$f_j(\tau) = \tau^{j+1/2}/\Gamma(j + 3/2), \qquad a_0(\theta) = i\sqrt{\pi/2}\, U_1'(\theta) = -\sqrt{\pi/2}\, e^{i\theta} U'(e^{i\theta}) \tag{1.6}$$

Согласно п. 8 статьи [3], ряд (1.5) должен иметь такой же вид, как ряд (8.2) в [3]. Поэтому ($L_{2j}{}^{\theta}a\,(\theta)$ те же, что в [3])

$$a_j\,(\theta) = \frac{(-1)^j}{2^j j!} L_{2j}{}^{\theta} a\,(\theta), \qquad a\,(\theta) = a_0\,(\theta) \tag{1.7}$$

Ряд (1.5) дает лучевое разложение волны вида (1.4).

Из (1.4) — (1.7) следует, что для аналитической функции $a\,(\theta + i\eta)$, вещественной при $\eta = 0$, имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j L_{2j}{}^{\theta} a\,(\theta)}{2^j j!\,\rho^{j+1/2}} \frac{\tau^{j-1/2}}{\Gamma\,(j+1/2)} = \frac{a\,(\theta+i\eta)+a\,(\theta-i\eta)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial\eta}{\partial\tau} \tag{1.8}$$

Легко видеть, что это равенство справедливо и для любых аналитических функций $a\,(\theta + i\eta)$.

2. Исследование решения вблизи границы. В секторе $\theta_1 < \theta < \theta_2$ рассмотрим решение (1.2) уравнения (1.1), удовлетворяющее при $\theta = \theta_1$ граничному условию

$$\partial u \,/\, \partial n = c\, \partial u \,/\, \partial t \qquad (c = \mathrm{const}, \quad 0 \leqslant c \leqslant \infty) \tag{2.1}$$

Здесь $\partial u \,/\, \partial n = \rho^{-1} \partial u \,/\, \partial\theta$ — производная по внутренней нормали к границе $\theta = \theta_1$ сектора. В частности, при $c = 0$ условие (2.1) превращается в условие $\partial u \,/\, \partial n = 0$, а при $c = \infty$ — в условие $\partial u \,/\, \partial t = 0$, т. е. в условие $u = 0$, так как при $t \leqslant \rho$ для решения (1.2) имеем $u = 0$. Условие (2.1) для установившихся колебаний $u = ve^{i\omega t}$ превращается в известное граничное условие Леонтовича $\partial v \,/\, \partial n = ic\omega v$.

Для решения (1.5) граничное условие (2.1) принимает вид

$$\mathrm{Re}\,(c + \sin i\eta)\, a\,(\theta_1 + i\eta) = 0 \quad \text{при } \eta \geqslant 0 \tag{2.2}$$

Следовательно, функция $a\,(\theta + i\eta)$ аналитически продолжается в область $2\theta_1 - \theta_2 < \theta < \theta_1$, по формуле

$$[c + \sin\,(\theta - \theta_1 + i\eta)]\, a\,(\theta + i\eta) \equiv \psi\,(\theta + i\eta)$$

$$\psi\,(\theta + i\eta) = -\,\mathrm{Re}\,\psi\,(2\theta_1 - \theta + i\eta) + i\,\mathrm{Im}\,\psi\,(2\theta_1 - \theta + i\eta)$$

Отсюда вытекает, что $(c + \sin\varphi)\, a\,(\theta_1 + \varphi)$ — нечетная функция от φ

$$(c + \sin\varphi)\, a\,(\theta_1 + \varphi) \equiv -\,(c - \sin\varphi)\, a\,(\theta_1 - \varphi), \qquad \varphi = \theta - \theta_1 \tag{2.3}$$

Следовательно, в случае условия (2.1) при $\theta = \theta_1$ ($c \neq 0$), все производные $a^{(2n)}\,(\theta_1)$ выражаются через $a', a''', \ldots, a^{(2n-1)}$ (2.4)

$$a\,(\theta_1) = 0, \quad a''\,(\theta_1) = -\,2c^{-1}a'\,(\theta_1), \quad a^{\mathrm{IV}}\,(\theta_1) = 4c^{-1}\,(a'\,(\theta_1) - a'''\,(\theta_1)), \ldots$$

3. Отражение от границы. Пусть в области $y > 0$ распространяется волна $u_1 = \mathrm{Re}\, U\,(\zeta_1)$ с круговым фронтом с центром (x_1, y_1), $y_1 > 0$, а на границе $y = 0$ задано условие (2.1), где $\partial \,/\, \partial n = \partial \,/\, \partial y$. Отраженную волну ищем методом С. Л. Соболева [1] в виде $v = \mathrm{Re}\, V\,(\zeta_2)$. При этом

$$\zeta_k = \left[\frac{t}{\rho_k} - \left(\frac{t^2}{\rho_k^2} - 1\right)^{1/2}\right] e^{i\theta_k}, \quad x - x_1 = \rho_k \cos\theta_k, \quad (-1)^k y + y_1 = \rho_k \sin\theta_k \quad (k = 1, 2)$$

Тогда $\zeta_1 = \zeta_2$ при $y = 0$. Подставляя $u = u_1 + v$ в (2.1), получим

$$\operatorname{Re}\,[(V' - U')\, i\,(1 - \zeta^2) + 2c\zeta\,(V' + U')] = 0 \quad \text{при } \operatorname{Im}\zeta > 0 \tag{3.1}$$

Следовательно, выражение в квадратных скобках может быть равно только Bi, где B — вещественная постоянная. Замечая, что при $\zeta = e^i$ U и V будут чисто мнимыми величинами (см. п. I), получим $B = 0$ и

$$V'(\zeta) = \frac{i\,(1-\zeta^2) - 2c\zeta}{i\,(1-\zeta^2) + 2c\zeta}\, U'(\zeta) \tag{3.2}$$

Взяв любое такое ζ_0, что $|\zeta_0| = 1$ (произвол в выборе $\arg\zeta_0$ не влияет на величину v), можем написать

$$V(\zeta) = \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} V'(z)\, dz, \qquad v = \operatorname{Re} V(\zeta_2) \tag{3.3}$$

В частности, если u_1 — волна от источника с интенсивностью, равной 1, включаемого в момент $t = 0$ в точке (x_1, y_1), то

$$u_1 = \frac{1}{2\pi} \ln\left[\frac{t}{\rho_1} + \left(\frac{t^2}{\rho_1^2} - 1\right)^{1/2}\right], \qquad U(\zeta_1) = -\frac{1}{2\pi} \ln \zeta_1$$

и для отраженной волны $v = \operatorname{Re} V(\zeta_2)$ получим, положив $c = \cos\gamma$,

$$V(\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\left(\ln\zeta + 2\, i \operatorname{ctg}\gamma \ln \frac{\zeta e^{i\gamma} + i}{\zeta + i e^{i\gamma}}\right) \tag{3.4}$$

Напишем теперь лучевое разложение отраженной волны. Лучевое разложение падающей волны $u_1 = \operatorname{Re} U(\zeta_1)$ имеет вид (1.5) — (1.7), где u, ζ, ρ, θ следует заменить на $u_1, \zeta_1, \rho_1, \theta_1$. Отраженная волна $v = \operatorname{Re} V(\zeta_2)$ получается из падающей заменой U и ζ_1 на V и ζ_2. Следовательно, ее лучевое разложение имеет вид

$$v = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j L_{2j} b(\theta_2)}{2^j j!\, \rho_2^{j+1/2}} f_j(\tau), \qquad b(\theta_2) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{i\theta_2} V'(e^{i\theta_2}) \tag{3.5}$$

Из (3.5), (3.2) и (1.6) получаем

$$b(\theta) = k(\theta)\, a(\theta), \qquad k(\theta) = \frac{\sin\theta - c}{\sin\theta + c} \tag{3.6}$$

4. Дифракция волны с круговым фронтом. Пусть волна (1.2) с круговым фронтом с центром в точке O_0 испытывает дифракцию на угле с вершиной O_1. В п. 4 предполагается, что точка O_0 не лежит на стороне угла. На сторонах угла заданы граничные условия вида (2.1). Значения коэффициента c на двух сторонах угла не обязательно одинаковы. Пусть (ρ, θ) и (r, φ) — полярные координаты с полюсами O_0 и O_1 и параллельными полярными осями; для точки O_0 имеем $r = R$, $\varphi = \beta$.

Согласно п. 2 статьи [3], решение этой задачи есть сумма падающей, отраженной и дифрагированной волн. Метод отыскания отраженной волны изложен выше. Дифрагированная волна в [3] получена в виде лучевого разложения — ряда (8.4), сходящегося вблизи фронта. Представим сумму этого ряда в виде интеграла. Для этого запишем ряд (8.4) из [3] в следующей форме, учитывая вид функций f_j в (1.5) — (1.6) и обозначая $a(\pi+\beta)\, m(\varphi, \beta) = q(\beta, \varphi)$

$$w = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+k} L_{2k}{}^{\beta} L_{2j}{}^{\varphi} q(\beta, \varphi)}{2^{j+k} j!\, k!\, R^{k+{}^1/_2} r^{j+{}^1/_2}} \frac{\tau^{j+k+1}}{\Gamma(j+k+2)} \tag{4.1}$$

Из (4.1) вытекает, что

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \int_0^{\tau} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+k} L_{2k}{}^{\beta} L_{2j}{}^{\varphi} q(\beta, \varphi)}{2^{j+k} j!\, k!\, R^{k+{}^1/_2} r^{j+{}^1/_2}} \frac{\chi^{j-{}^1/_2}(\tau-\chi)^{k-{}^1/_2}}{\Gamma(j+{}^1/_2)\,\Gamma(k+{}^1/_2)}\, d\chi \tag{4.2}$$

Применяя дважды формулу (1.8) к ряду в (4.2), получим

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\tau} \frac{q^*(\beta+i\eta_0, \varphi+i\eta_1)\, d\chi}{\sqrt{(R+\tau-\chi)^2-R^2}\sqrt{(r+\chi)^2-r^2}} \tag{4.3}$$

$$\eta_0 = \eta\left(\frac{\tau-\chi}{R}\right), \qquad \eta_1 = \eta\left(\frac{\chi}{r}\right) = \ln\left[1+\frac{\chi}{r}+\left(\left(1+\frac{\chi}{r}\right)^2-1\right)^{1/2}\right]$$

$$q^*(\beta+i\eta_0, \varphi+i\eta_1) = \Sigma\, q(\beta \pm i\eta_0, \varphi \pm i\eta_1)$$

(сумма берется по всем четырем комбинациям знаков $\pm$).

Из формулы (4.3) или прямо из (4.1) можно получить, что

$$w = \frac{1}{2\pi}\iint_{D_2} q(\beta+i\eta_0, \varphi+i\eta_1)\, d\eta_0 d\eta_1 \tag{4.4}$$

Здесь D_2 — область $R(\operatorname{ch}\eta_0 - 1) + r(\operatorname{ch}\eta_1 - 1) < \tau$.

Заметим, что функция $w^* = \partial w / \partial t$ является дифрагированной волной для падающей волны $u^* = \partial u / \partial t$, где u — волна вида (1.2). Такова, например, волна u^* от мгновенно действующего (включенного и сейчас же выключенного) источника

$$u^* = \frac{1}{2\pi\sqrt{t^2-\rho^2}} \quad (t>\rho), \qquad u^* = 0 \quad (t<\rho) \tag{4.5}$$

При этом

$$U(\zeta) = -(2\pi)^{-1}\ln\zeta, \qquad a(\theta) = (8\pi)^{-1/2}$$

Таким образом, правая часть (4.3) при $q(\beta, \varphi) = (8\pi)^{-1/2}\, m(\varphi, \beta)$ дает решение w^* плоской задачи о дифракции волны от источника (4.5) на клине с граничным условием (2.1).

Функция $m(\varphi, \beta)$ определяется в п. 8 статьи [3]. Из сравнения формулы (8.3) [3] с формулами (1.4) — (1.7) этой статьи следует, что

$$m(\varphi, \beta) = i\sqrt{\pi/2}\, U_0'(\varphi), \qquad \operatorname{Re} U_0(\varphi+i\eta) = w^\circ \tag{4.6}$$

где w° — дифрагированная (на том же угле) волна для падающей плоской волны (3.1) статьи [3].

В случае, когда уравнение (1.1) рассматривается в секторе $\theta_1 < \varphi < \theta_2$ с граничным условием $u = 0$ при $\varphi = \theta_1$ и $\varphi = \theta_2$, функции w° и U_0 отыскиваются методами, изложенными в [1]. Тогда

$$m(\varphi, \beta) \equiv m(\beta, \varphi) = \frac{\sqrt{\pi/2}}{2(\theta_2-\theta_1)}\sum_{k=1}^{4}(-1)^k \operatorname{ctg}\frac{\pi(\varphi_1-\gamma_k)}{2(\theta_2-\theta_1)} \tag{4.7}$$

$$\gamma_1 = -\gamma_3 = \pi - \beta_1, \quad \gamma_2 = -\gamma_4 = \pi + \beta_1, \quad \varphi_1 = \varphi - \theta_1, \quad \beta_1 = \beta - \theta_1$$

В случае граничного условия $\partial u / \partial n = 0$ надо лишь изменить знаки первого и четвертого членов суммы в (4.7).

В случае условия (2.1) $m(\varphi, \beta)$ определяется из (4.6), где

$$U_0'(\varphi) = \frac{\nu \sin \nu\varphi}{\cos^2 \nu\varphi} \left.\frac{dW}{d\zeta}\right|_{\zeta=\sec \nu\varphi} \qquad \left(\nu = \frac{\pi}{\psi}\right)$$

Если угол, на котором происходит дифракция, расположен так же, как в [2], то $dW / d\zeta$ определяется формулой (11) в [2] при $\gamma = \pi - \beta$; здесь ψ и ζ те же, что в [2].

Заметим, что всегда $m(\varphi, \beta) \equiv m(\beta, \varphi)$ (выражение (4.1) не должно меняться, если поменять местами источник и точку наблюдения).

5. Многократная дифракция. Пусть волна u_0 с фронтом в виде дуги окружности с центром O_0 дифрагирует на угле с вершиной O_1 и прямолинейными сторонами, на которых заданы граничные условия вида (2.1). Полученная дифрагированная волна u_1 вновь дифрагирует на угле с вершиной O_2 и т. д. На разных сторонах углов значения коэффициента c в (2.1) могут быть различными; допускаются также значения $c = 0$ и $c = \infty$. Отыскивается выражение для волны u_s, полученной после дифракции на вершинах $O_1, \ldots, O_s$ (в последовательности $O_1, \ldots, O_s$ одна и та же вершина может встречаться несколько раз под разными номерами).

Такая постановка вопроса охватывает задачи дифракции на щели, на отрезке, на многоугольнике, на нескольких многоугольниках, произвольно расположенных на плоскости (кроме случаев, когда на какую-либо вершину попадает точка стыка фронтов волн). В случае дифракциии на щели представления дифрагированных волн кратными интегралами были получены в [4]. В случае дифракции на многоугольнике в [5] получено приближенное представление дифрагированных волн только вблизи фронта.

Пусть r_k, φ_k — полярные координаты с полюсом O_k $(k = 0, 1, \ldots, s)$ и параллельными полярными осями. Каждая точка O_{k+1} имеет координаты R_k, $\beta_k + \pi$ в системе с полюсом O_k. Волну с центром O_s, получившуюся в результате дифракции волны u_0 на углах $O_1, \ldots, O_s$, обозначим $u_s(\tau_s, r_s, \varphi_s)$; при этом $\tau_s \equiv t - R_0 - \ldots - R_{s-1} - r_s$. Пусть $\tau_0 = 0$ — фронт падающей волны u_0, и перед фронтом $u_0 = 0$. Тогда $\tau_s = 0$ — фронт волны u_s, и при $\tau_s < 0$ имеем $u_s = 0$. Пусть падающая волна u_0 представляется формулами (1.5) — (1.7) при $\theta = \varphi_0$, $\rho = r_0$, $\tau = \tau_0$. Тогда волна u_1 вблизи фронта представляется лучевым рядом (8.4) работы [3], где $\beta, \varphi, r, R, \tau$ заменяются на $\beta_0, \varphi_1, r_1, R_0, \tau_1$. Преобразовав этот ряд к виду, аналогичному (4.1), получим представление волны u_1 в виде суммы волн, каждая из которых выражается рядом вида (1.5), но с различными $a_0(\theta)$ и $f_j(\tau)$. Каждая из этих волн после дифракции на вершине O_2 дает снова волну вида (4.1). Сложив последние, получим волну u_2. Рассмотрев аналогичным образом дифракцию волны u_2 на вершине O_3, затем на вершинах $O_4, \ldots, O_s$, получим (при $l = 0$)

$$u_s = \sum_{j_0=0}^{\infty} \ldots \sum_{j_s=0}^{\infty} b_{j_0 \ldots j_s} f_{j_0+\ldots+j_s+s/2}(\tau_s) \tag{5.1}$$

$$b_{j_0 \ldots j_s} = \frac{(-1)^{j_0+\ldots+j_s} L_{2j_0}^{\beta_0} \ldots L_{2j_{s-1}}^{\beta_{s-1}} L_{2j_s}^{\varphi_s} q_s}{2^{j_0+\ldots+j_s+l} j_0! \ldots j_s! \, R_0^{j_0+1/2} \ldots R_{s-1}^{j_{s-1}+1/2} r_s^{j_s+1/2}} \tag{5.2}$$

$$q_s = q_s(\beta_0, \ldots, \beta_{s-1}, \varphi_s) =$$
$$= a(\pi + \beta_0)\, m_1(\beta_0, \pi + \beta_1) \ldots m_{s-1}(\beta_{s-2}, \pi + \beta_{s-1})\, m_s(\beta_{s-1}, \varphi_s)$$

Каждая функция $m_i(\beta_{i-1}, \varphi_i)$ определяется аналогично $m(\beta, \varphi)$ по формуле (4.6), где теперь w°—волна, возникающая при дифракции на угле с вершиной O_i плоской волны (такой же, как в (4.6)), движущейся от O_{i-1} к O_i. Ряд (5.1) абсолютно и равномерно сходится в окрестности фронта волны u_s. Ширина окрестности уменьшается до нуля при приближении к точкам стыка фронтов волн u_s и u_{s-1}. Группируя члены ряда, получим лучевое разложение волны u_s

$$u_s = \sum_{n=0}^{\infty} A_{sn}(r_s, \varphi_s) f_{n+s/2}(\tau_s), \qquad A_{sn}(r_s, \varphi_s) = \sum_{j_0+\ldots+j_s=n} b_{j_0\ldots j_s} \tag{5.3}$$

Преобразуя ряд (5.1) методом, п. 4, получим

$$u_s = \frac{1}{2^l (2\pi)^{(s+1)/2}} \int\limits_{D_{s+1}} \cdots \int q_s(\beta_0 + i\eta_0, \ldots, \beta_{s-1} + i\eta_{s-1}, \varphi_s + i\eta_s)\, d\eta_0 \ldots d\eta_s \tag{5.4}$$

Область интегрирования D_{s+1} определяется неравенством

$$R_0(\operatorname{ch}\eta_0 - 1) + \ldots + R_{s-1}(\operatorname{ch}\eta_{s-1} - 1) + r_s(\operatorname{ch}\eta_s - 1) < \tau_s \tag{5.5}$$

Можно также представить $\partial u_s / \partial t$ в виде s-кратного интеграла аналогично (4.3).

Выведенные формулы (5.1) — (5.4) при $l = 0$, как и формула (8.4) в [3], справедливы для случая, когда ни один из отрезков $O_0O_1, O_1O_2, \ldots, O_{s-1}O_s$, составляющих путь луча до вершины O_s, не лежит на границе. В случае, когда l из них лежат на границе, в этих формулах появляется множитель 2^{-l}. Происходит это по следующей причине. Волна u_2, например, вызывается дифракцией на вершине O_2 одновременно волны u_1 и волны v_1, получаемой при отражении u_1 от той стороны угла O_2, которая видна из точки O_1. Если отрезок O_1O_2 лежит на границе, то, как можно показать $v_1 = u_1$, и, значит, падающей волной для вершины O_2 должна считаться лишь половина волны, полученной при дифракции в точке O_1.

Формула (5.4), как и формулы (4.3), (4.4), справедлива не только в окрестности фронта, но и во всей области, занятой дифрагированной волной u_s, кроме тех значений φ_s, где функция $m_s(\beta_{s-1}, \varphi_s)$ имеет особенности, т. е. кроме радиусов, соединяющих точку O_s с точками стыка фронта волны u_s, с другими фронтами.

Для доказательства заметим, что функция (5.4) вблизи фронта совпадает с (5.1). Поэтому она удовлетворяет уравнению (1.1) и граничному условию (2.1) вблизи фронта, а так как она аналитическая, то и везде, кроме указанных выше радиусов. Остается доказать по индукции, что функция (5.4) является как раз волной, возникающей при дифракции волны u_{s-1} на угле O_s. Пусть волна u_{s-1}, образующаяся при дифракции в точке O_{s-1}, выражается формулой, получаемой из (5.4) заменой s на $s-1$, а в зоне тени $u_{s-1} = 0$ (тень может возникнуть из-за наличия препятствия — угла с вершиной O_s). Пользуясь тем, что функция $m(\beta_{s-1}, \varphi_s)$ при $\varphi_s = \pi + \beta_{s-1}$, т. е. на границе тени, имеет полюс с легко подсчитываемым вычетом, можно показать, что сумма $u_{s-1} + u_s$, где u_s определяется формулой (5.4), непрерывна при $\varphi_s = \pi + \beta_{s-1}$ вместе со своими первыми производными. Отсюда следует, что $u_{s-1} + u_s$ является решением уравнения (1.1) в области, содержащей радиус $\varphi_s = \pi + \beta_{s-1}$.

Аналогично исследуется сумма $v_{s-1} + u_s$ на радиусе, проведенном в точку стыка фронта волны u_s с фронтом отраженной волны v_{s-1}, если последняя имеется. При этом используется следующая формула для волны v_{s-1}, полученной при отражении волны u_{s-1} от одной из сторон угла O_s

$$2^l (2\pi)^{s/2} v_{s-1}(\tau_{s-1}, \overset{*}{r}_{s-1}, \overset{*}{\varphi}_{s-1}) = \qquad (\overset{*}{\varphi}_{s-1} = 2\alpha - \varphi_{s-1}) \tag{5.6}$$

$$= \int\limits_{D_s} \cdots \int q_{s-1}(\beta_0 + i\eta_0, \ldots, \varphi_{s-1} + i\eta_{s-1})\, k(\varphi_{s-1} - \alpha + h\pi + i\eta_{s-1})\, d\eta_0 \ldots d\eta_{s-1}$$

Здесь α — полярный угол, характеризующий направление прямой, от которой происходит отражение, $r^*_{s-1}\varphi^*_{s-1}$ —полярные координаты с полюсом в точке O^*_{s-1}, симметричной точке O_{s-1} относительно этой прямой, k — коэффициент отражения (3.6), h — такое целое число, что $0<\varphi_{s-1}-\alpha+h\pi<\pi$. Для доказательства формулы (5.6) достаточно проверить, что сумма $u_{s-1}+v_{s-1}$ удовлетворяет граничному условию (2.1).

Если многоугольник, на котором происходит дифракция, невыпуклый, то могут существовать волны, которые после некоторого числа дифракций на вершинах многоугольника испытывают отражение от его сторон, затем опять дифрагируют на вершинах, и т. д. Каждая такая волна выражается опять (5.1) и (5.4), только теперь

$$q_s(\beta_0, \ldots, \beta_{s-1}, \varphi_s) = a(\pi+\beta_0)\, m_1(\beta_0, \pi+\beta_1) \ldots m_j(\beta_{j-1}, \pi+\beta_j) \times \\ \times k(\beta_j-\alpha_j+h_j\pi)\, m_{j+1}(2\alpha_j-\beta_j, \pi+\beta_{j+1}) \ldots m_s(\beta_{s-1}; \varphi_s) \tag{5.7}$$

Таким образом, если на пути между вершинами O_j и O_{j+1} луч испытал отражение от прямой, характеризуемой полярным углом α_j, то в выражении для q_s добавляется множитель $k(\beta_j-\alpha_j+h_j\pi)$, где $k(\theta)$ — коэффициент отражения (3.6), а h_j — такое целое число, что $0<\beta_j-\alpha_j+h_j\pi<\pi$, и в следующем множителе (в данном случае m_{j+1}) первый аргумент β_j заменяется на $2\alpha_j-\beta_j$, т. е. на полярный угол направления, откуда приходит отраженный луч. При наличии нескольких отражений добавляется соответствующее число множителей k. Доказательство проводится аналогично доказательству формул (5.4) и (5.6).

6. Исследование дифрагированной волны. Коэффициенты $A_{sn}(r_s, \varphi_s)$ лучевого разложения (5.3) имеют вид

$$A_{s0} = \frac{q_s}{2^l P_s}, \quad A_{s1} = -\frac{1}{2^{l+1}P_s}\sum_{j=0}^{s}\frac{L_2^{\beta_j}q_s}{R_j}$$

$$A_{s2} = \frac{1}{2^{l+3}P_s}\left(\sum_{j=0}^{s}\frac{L_4^{\beta_j}q_s}{R_j^2} + 2\sum_{0\leqslant j<k\leqslant s}\frac{L_2^{\beta_j}L_2^{\beta_k}q_s}{R_jR_k}\right) \qquad P_s = (R_0\ldots R_{s-1}r_s)^{1/2}$$

где l и q_s те же, что в (5.2), β_s и R_s следует заменить на φ_s и r_s. При больших n формулы (5.3) и (5.2) для A_{sn} громоздки. Иногда удобнее получить несколько первых отличных от нуля членов ряда (5.3), последовательно находя разложения вида (5.3) или (6.2) (см. ниже) для волн $u_1, \ldots, u_s$.

Пусть для волны u_{s-1} $(s\geqslant 1)$ известно лучевое разложение (или несколько его первых членов)

$$u_{s-1}(\tau_{s-1}, r_{s-1}, \varphi_{s-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{s-1,n}(r_{s-1}, \varphi_{s-1})\, f_{d+n}(\tau_{s-1}) \tag{6.1}$$

Согласно п. 8 [3], можно написать

$$u_{s-1} = \sum_{n=0}^{\infty} F(r_{s-1}, f_{d+n}(\tau_{s-1}), b_n(\varphi_{s-1})) \tag{6.2}$$

Здесь каждое слагаемое имеет вид

$$F(\rho, f_m(\tau), b(\theta)) \equiv \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j L_{2j}^{\theta} b(\theta)}{2^j j!\, \rho^{j+1/2}} f_{m+j}(\tau) \tag{6.3}$$

и, следовательно, будет решением волнового уравнения; функции $b_n(\varphi_{s-1})$ в разных слагаемых различны. Сходимость ряда (6.2) в окрестности фронта обеспечивается предположением, что

$$|\partial^m b_n / \partial \varphi_{s-1}^m| \leqslant C m! n! \delta^{-m-n}, \qquad \delta > 0 \tag{6.4}$$

При дифракции волны вида (6.3) на вершине O_s получается волна вида (4.1), а при дифракции волны u_{s-1} вида (6.2) — волна

$$u_s = \sum_{n=0}^{\infty} F\left(r_s, f_{d+n+1/2}(\tau_s), \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k L_{2k}{}^{\beta_{s-1}} b_{n-k}(\pi + \beta_{s-1}) m_s(\beta_{s-1}, \varphi_s)}{2^{k+l} k! \, R_{s-1}^{k+1/2}}\right) \tag{6.5}$$

где $l = 0$ (соответственно $l = 1$), если отрезок $O_{s-1} O_s$ не лежит (лежит) на границе; m_s то же, что в п. 5. При условии (6.4) ряд (6.5) сходится вблизи фронта волны, и для него справедливы неравенства, аналогичные (6.4). Таким образом, если падающая волна u_0 записана в виде (6.2) при $s = 1$, и для $b_n(\varphi_0)$ имеет место оценка (6.4), то по формуле (6.5) можно последовательно найти $u_1, \ldots, u_s$. Переход от записи u_s в виде (6.5) к лучевому разложению производится при помощи формулы (6.3).

Если отрезок $O_{s-1}O_s$ лежит на границе, и на нем задано граничное условие $u = 0$ или условие (2.1) при $c \neq 0$, то первый член суммы в (6.5) обращается в нуль. Найдем следующие члены. Граничное условие на $O_{s-1}O_s$ можно записать так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\alpha}{r_{s-1}} \frac{\partial u}{\partial \varphi_{s-1}} \quad (\varphi_{s-1} = \pi + \beta_{s-1}), \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha}{r_s} \frac{\partial u}{\partial \varphi_s} \quad (\varphi_s = \beta_{s-1})$$

Здесь $\alpha = 1 / c$ или $\alpha = -1 / c$; в случае граничного условия $u = 0$ имеем $\alpha = 0$. Согласно (2.4), для функций $b = b_{n-k}(\pi + \beta_{s-1})$ и $m = m_s(\beta_{s-1}, \varphi_s)$ имеем на $O_{s-1}O_s$

$$b = 0, \; b'' = 2\alpha b', \; b^{\mathrm{IV}} = 4\alpha(b''' - b'), \ldots,$$

$$m = 0, \; m'' = -2\alpha m', \; m^{\mathrm{IV}} = 4\alpha(m' - m'''), \; \ldots . \tag{6.6}$$

Здесь все производные берутся по β_{s-1}. Следовательно, в формуле (6.5) $L_0 bm = 0, \;\; L_2 bm = 2b'm', \;\; L_4 bm = 4b'''m' + 4b'm''' + (5 - 24\alpha^2) b'm', \ldots$ и лучевое разложение дифрагированной волны начинается так:

$$u_s = -\frac{b_0'(\pi + \beta_{s-1}) m_s'(\beta_{s-1}, \varphi_s)}{2 R_{s-1}^{3/2} r_s^{1/2}} f_{d+3/2}(\tau_s) + \ldots$$

Таким образом, если главный член лучевого разложения падающей волны u_0 содержал $f_0(\tau)$, то для дифрагированной волны u_s он содержит $f_{p+1/2s}(\tau)$, где s — число вершин $O_1, \ldots, O_s$, встретившихся на пути луча, а p — число отрезков $O_{k-1}O_k$ пути луча, лежащих на границе с условием $u = 0$ или (2.1) при $c \neq 0$. Это означает, что гладкость вступления волны u_s на $p + {}^1/_2 s$ единиц больше, чем для падающей волны u_0, т. е. если вблизи фронта $u_0 \sim b_0 \tau^m$, то $u_s \sim b_s \tau^{m+p+1/2s}$.

7. Дифракция установившихся колебаний. Для установившихся колебаний вида $u(t, x, y) = v(x, y) e^{i\omega t}$ обычно получают высокочастотную ($\omega \to \infty$) асимптотику, положив $f_m(\tau) = (i\omega)^{-m} e^{i\omega\tau}$ в лучевых разложениях для u. В рассматриваемом случае дифракции главный член асимптотики (при $\omega \to \infty$) волны u_s приобретает, по сравнению с u_0 амплитудный множитель $\omega^{-p-1/2s}$ и запаздывание фазы $(p + {}^1/_2 s)\pi / 2$.

Здесь p — число отрезков пути луча, лежащих на границе с граничным условием $v = 0$ или импедансным граничным условием $\partial v / \partial n = ic\omega v$, $c \neq 0$.

Таким образом, в задачах дифракции на многоугольниках, сформулированных в начале п. 5, для любого фиксированного n изложенный метод позволяет при помощи конечного числа операций написать точные выражения для коэффициентов асимптотического разложения решения $v(x, y)$ по степеням $1 / \omega$ до $1 / \omega^n$. Для этого достаточно рассмотреть все оптические пути $O_0O_1, \ldots, O_s$, для которых лучевое разложение дифрагированной волны начинается с члена $f_m(\tau)$, $m = p + {}^1/_2\, s \leqslant n$. Очевидно, таких путей конечное число.

В случае установившихся колебаний также можно представить дифрагированную волну в виде интеграла, аналогичного (5.4). Если $u(t, \rho, \theta)$ — решение уравнения (1.1) $u_{tt} = \triangle u$, то функция

$$V(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u_t(t, \rho, \theta)\, dt \tag{7.1}$$

удовлетворяет уравнению $\triangle V + \omega^2 V = 0$ (предполагается, что производные от u убывают достаточно быстро при $t \to \pm\infty$, чтобы обеспечить возможность дифференцирования под знаком интеграла и интегрирования по частям). Для волны (1.5) — (1.7) формулы (7.1) и (1.8) дают

$$V_0(\rho, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\rho \operatorname{ch} \eta} a(\theta + i\eta)\, d\eta \tag{7.2}$$

Если $a \equiv (8\pi)^{-1/2}$, то u_t совпадает с волной (4.5) от мгновенного источника, и $e^{i\omega t} V_0 = -{}^1/_4 i e^{i\omega t} H_0^{(2)}(\omega r)$ будет волной от точечного источника интенсивности $e^{i\omega t}$; здесь $H_0^{(2)}$ — функция Ганкеля.

Если же $a(\theta) \equiv m(\beta, \theta)$, где функция m та же, что в (4.7), то $e^{i\omega t} V_0$ — дифрагированная на клине волна для падающей плоской волны $e^{i\omega t} e^{i\omega(x \cos\beta + y \sin\beta)}$. Заменой переменной интегрирования $\theta + i\eta = \psi$ формула (7.2) приводится к интегралу Зоммерфельда (различие в путях интегрирования связано с тем, что интеграл Зоммерфельда дает все поле, состоящее из дифрагированной волны (7.2), падающей и отраженной волн).

Для многократно дифрагированной волны (5.4) формула (7.1) дает

$$V_s(r_s, \varphi_s) = 2^{-l} (2\pi)^{-(s+1)/2} \int \ldots \int e^{-i\omega z} q_s\, d\eta_0 \ldots d\eta_s \tag{7.3}$$

$$z = R_0 \operatorname{ch} \eta_0 + \ldots + R_{s-1} \operatorname{ch} \eta_{s-1} + r_s \operatorname{ch} \eta_s$$

где q_s то же, что в (5.4), а интегрирование по $\eta_0, \ldots, \eta_s$ производится от $-\infty$ до ∞. Можно доказать, что интеграл сходится и допускает двукратное дифференцирование. Следовательно, V_s — волна, полученная при дифракции волны (7.2) на вершинах $O_1, \ldots, O_s$.

Поступила 27 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Некоторые вопросы теории распространения колебаний (гл. XII в кн. Франк Ф., Мизес Р. «Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики», ч. 2, ОНТИ, 1937).
2. Papadopoulos V. M. Pulse diffraction by an imperfectly reflecting wedge. J. Austral. Math. Soc., 1961, vol. 2, No. 1. 97—106.
3. Филиппов А. Ф. Дифракция произвольной акустической волны на клине. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2, стр. 305—318.
4. Fox E. N. The diffraction of two-dimensional sound pulses incident on an infinite uniform slit in a perfectly reflecting screen. Philos. Trans. Roy. Soc. London, A, 1950, vol. 242, No. 839, p. 1—32
5. Боровиков В. А. О двумерной задаче дифракции на многоугольнике. Докл. АН СССР, 1962, т. 144, № 4, стр. 743—746.