

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ПОДЗЕМНОМ ВЗРЫВЕ В МЯГКИХ ГРУНТАХ

С. С. Григорян

(Москва)

Решение задачи о взрыве заряда ВВ в грунте представляет интерес для нужд сейсморазведки, горного дела, создания подземных емкостей взрывным способом. В разных случаях необходимо иметь сведения о различных характеристиках этого решения — об энергии и форме упругих волн, излучаемых очагом взрыва, о динамике образования взрывной полости, о полях напряжений и скоростей в ближней зоне взрыва, где существенно проявляется неупругое поведение грунта, и т. д. Известны некоторые приближенные решения этой задачи [1-7], основанные на весьма сильных упрощающих схематизациях явления и не дающие достаточно удовлетворительных количественных и качественных результатов. Ниже делается попытка, пользуясь имеющимися теоретическими представлениями о поведении грунтов [8-10], а также результатами специально поставленных на их основе опытов [11-15], дать более строгую постановку и эффективное решение задачи о подземном взрыве в грунте.

1. Уравнения задачи для случая центрально-симметричного движения грунта, как это следует из [9], имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} + v \frac{\partial \theta}{\partial r} + (1 - \theta) \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r} \right) &= 0 \\ \rho_0 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) - (1 - \theta) \left[\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) \right] &= 0 \\ \frac{\partial \theta_*}{\partial t} + v \frac{\partial \theta_*}{\partial r} = \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) e \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) e (\theta - \theta_*) & \quad (1.1) \\ 2G \left[\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r} \right) \right] = \frac{\partial (\sigma_r + p)}{\partial t} + v \frac{\partial (\sigma_r + p)}{\partial r} + \Lambda (\sigma_r + p) \\ G \left[\frac{v}{r} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r} \right) \right] = \frac{\partial (\sigma_\varphi + p)}{\partial t} + v \frac{\partial (\sigma_\varphi + p)}{\partial r} + \Lambda (\sigma_\varphi + p) \\ 2F(p) \Lambda = \left[\frac{4}{3} G (\sigma_r - \sigma_\varphi) \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) - F'(p) \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \right. \right. \\ \left. \left. + v \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right] e [J_2 - F(p)] e \left[\frac{4}{3} G (\sigma_r - \sigma_\varphi) \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) - F'(p) \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right] \\ e(z) = \begin{cases} 1 (z \geq 0) \\ 0 (z < 0) \end{cases}, \quad 2J_2 \equiv (\sigma_r + p)^2 + 2(\sigma_\varphi + p)^2 \end{aligned}$$

$$-3p \equiv \sigma_r + 2\sigma_\varphi, \quad p - p_0 = f(\theta, \theta_*) \quad \left(\theta \equiv 1 - \frac{\rho_0}{\rho}, \quad \theta_* \equiv 1 - \frac{\rho_0}{\rho_*} \right)$$

Начальные и граничные условия задачи

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, 0) = \sigma_\varphi(r, 0) = -p_0, \quad v(r, 0) = 0 \\ \theta(r, 0) = \theta_*(r, 0) = 0, \quad r \geq a_0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r(a, t) = -\psi(a), \quad v(a, t) = da/dt \\ \sigma_r(r, t) \rightarrow -p_0, \quad \sigma_\varphi(r, t) \rightarrow -p_0, \quad v(r, t) \rightarrow 0 \\ \theta(r, t) \rightarrow 0, \quad \theta_*(r, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь r, t — координата и время; v — скорость; σ_r, σ_φ — главные напряжения; ρ, ρ_0 — текущая и начальная плотности; G — модуль сдвига, p_0 — начальное давление в грунте; функции $F(p)$ и $f(\theta, \theta_*)$ описывают условие пластичности и объемную сжимаемость грунта.

Функция $\psi(a)$, фигурирующая в первом из условий (1.3), выражает применяемое обычно предположение об адиабатическом и квазистационарном изменении состояния в газообразных продуктах взрыва и для обычных ВВ (например, тротила) может быть взята в виде

$$\psi(a) = p_{00} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3\gamma} \quad (\text{для тротила } \gamma \approx 1.25, p_{00} \approx 2 \cdot 10^4 \text{ кг/см}) \quad (1.4)$$

Неизвестная функция $a = a(t)$ описывает закон движения границы взрывной полости и должна быть найдена в процессе решения задачи.

Как показывают опыты [11-16], функция $F(p)$ для песков, суглинков, лёсса, глины (а такие грунты здесь только и будут рассматриваться) имеет вид

$$6F(p) = (kp + b)^2 \quad (1.5)$$

в диапазоне изменения p от небольших значений до сотен атмосфер. В задаче о взрыве давление p меняется от нескольких десятков тысяч атмосфер (значение p_{00} в (1.4)) до малых величин порядка p_0 .

Функция $F(p)$ при больших значениях p (по-видимому, порядка тысяч и десятков тысяч атмосфер) должна оставаться ограниченной [10, 16], т. е. соотношение (1.5) не может использоваться при решении задачи о взрыве всюду в приведенном в движении грунте во все моменты времени. Определенных экспериментальных сведений о значении p , начиная с которого прекращается возрастание $F(p)$, пока не имеется. Однако, учитывая резкое падение всех напряжений и, в частности, p в малой окрестности взрывной полости в первые мгновения после детонации заряда ВВ, по-видимому, без большой ошибки можно принять допущение, что соотношение (1.5) имеет место для всех значений p , встречающихся в задаче.

На первых порах, когда движением охвачена небольшая область грунта вокруг взрывной полости, как можно показать, эта область будет ограничена от грунта, не вовлеченного еще в движение, сферической поверхностью сильного разрыва — ударной волной, распространяющейся по покоящемуся грунту. Состояние частицы грунта, непосредственно находящейся за этой поверхностью, определяется зависимостью σ_r от $\theta = \theta_*$, получающейся при рассмотрении одноосного деформирования элемента грунта, и при больших значениях σ_r может соответствовать деформации с упругим сдвигом, т. е. будет $J_2 < F(p)$, а при более низких значениях σ_r — деформации с пластическим сдвигом, т. е. будет $J_2 = F(p)$. Разграничивающее эти режимы значение σ_r определяется [16, 17] видом функций $F(p)$ и $p_* - p_0 = \chi(\theta_*) \equiv f(\theta_*, \theta_*)$.

После прохождения ударной волны через частицу последняя начинает перемещаться в сторону возрастающих r , развиваются сдвиговые деформации, и в некоторый момент времени они становятся такими, что начинается пластическое течение, т. е. при больших значениях σ_r упругие деформации, при которых $\Lambda = 0$, будут иметь место лишь в некотором слое, примыкающем к поверхности ударной волны. Упругие сдвиговые деформации ввиду большого значения G ($G \sim 10^8 \text{ кг/см}^2$), как это видно из (1.1), могут иметь место лишь при небольших значениях смещений частиц, и можно ожидать, что этот слой будет относительно тонок. Поэтому для упрощения математической задачи можно пренебречь существованием этого слоя и считать, что пластическое течение начинается непосредственно за фронтом ударной волны. Вероятно, это допущение вносит в решение задачи пренебрежимо малую ошибку.

В выражении для Λ (см. (1.1)) при $J_2 = F(p)$ разность $\sigma_r - \sigma_\varphi < 0$. Как это будет видно из построенного ниже решения задачи, в начальной стадии движения имеют место также неравенства $\partial p / \partial t + v \partial p / \partial r < 0$, $\partial v / \partial r < 0$. Кроме того, в на-

чальной стадии $v > 0$. Все это означает, что если условие пластичности выполняется на поверхности ударной волны, то оно в начальной стадии сохранится и всюду за этой поверхностью.

Сделанные допущения позволяют упростить исходную систему уравнений (1.1).

В дальнейшем будем пользоваться упрощенной системой, имеющей вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v \frac{\partial \theta}{\partial r} + (1 - \theta) \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r} \right) = 0, \quad \frac{\partial \theta_*}{\partial t} + v \frac{\partial \theta_*}{\partial r} = 0$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) - (1 - \theta) \left[\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) \right] = 0 \quad (1.6)$$

$$\sigma_\varphi = \alpha \sigma_r + \beta, \quad -3p = \sigma_r + 2\sigma_\varphi, \quad \alpha = \frac{3\sqrt{2} - k}{3\sqrt{2} + 2k}, \quad \beta = \frac{3b}{3\sqrt{2} + 2k}$$

$$\theta = \theta_* + \varepsilon \varphi(p - p_0, \theta_*),$$

Здесь ε — малый параметр ($\varepsilon \ll 1$). Малость параметра ε связана с тем, что, как показывают опыты, разгрузочные ветви диаграммы $\theta = \theta(p - p_0, \theta_*)$ для рассматриваемых грунтов наклонены к оси p весьма незначительно.

Поэтому можно ввести в качестве ε характерное значение этого наклона и считать $\varphi(p - p_0, \theta_*) \sim 1$.

Условия (1.2), (1.3) частично меняются: вместо условий для $r \rightarrow \infty$ возникают условия на ударной волне

$$-\sigma_{r*} \equiv -\sigma_r(R, t) = p_0 + \rho_0 \theta_* (dR/dt)^2, \quad v_* \equiv v(R, t) = \theta_* dR/dt \quad (1.7)$$

Здесь $r = R(t)$ — неизвестный закон движения ударной волны. С течением времени ударная волна будет ослабляться, скорость ее распространения dR/dt будет падать, и наступит момент, когда она станет равной скорости распространения малых упругих возмущений в покое недеформированном грунте впереди ударной волны

$$c_0 = [-\rho_0^{-1} d\sigma_r(\theta)/d\theta]_{\theta=0}^{1/2}$$

Здесь $\sigma_r = \sigma_r(\theta)$ — зависимость, соответствующая одноосной деформации. В принятых в теории упругости обозначениях для c_0 будем иметь

$$\rho_0 c_0^2 = \lambda + 2\mu = \lambda + 2G = K + \frac{4}{3}G, \quad K = (dp/d\theta)_{\theta=0} \quad (1.8)$$

Здесь $\lambda, \mu = G$ — коэффициенты Ламэ.

Начиная с этого момента времени, впереди ударной волны возникнет малое движение, начнется излучение упругой волны фронтом ударной волны, и дальнейшее построение решения задачи следует производить с учетом этой волны. Опыты показывают [11,13], что, действительно, при распространении взрывной волны на некотором расстоянии от очага взрыва вперед выходят малые упругие возмущения.

Возможность излучения упругой волны определяется свойствами зависимости $\sigma_x = \sigma_x(\theta)$, полученной при одноосной деформации из начального недеформированного состояния. При малых деформациях это будет упругое соотношение

$$-\sigma_{xe}(\theta) = p(\theta) + \frac{4}{3}G\theta, \quad \theta = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (u - \text{смещение}) \quad (1.9)$$

Если с ростом θ начнется пластическая сдвиговая деформация, то соотношение (1.9) заменится другим, полученным при помощи условия пластичности (1.5)

$$-\sigma_{xp}(\theta) = mp(\theta) + q, \quad m = \frac{3}{1+2\alpha}, \quad q = \frac{2\beta}{1+2\alpha} \quad (1.10)$$

Очевидно, переход к пластическому сдвигу возможен, когда кривые (1.9) и (1.10) на плоскости $\sigma_x\theta$ имеют точку пересечения ($\theta = \theta_1, \sigma_x = -\sigma_1$).

Если выполняется условие

$$K < \frac{2\sqrt{2}G}{k} \quad (1.11)$$

то такое пересечение имеет место всегда. Если же неравенство (1.11) не выполняется, то пересечения не будет при $p''(\theta) \geq 0$ для всех значений θ ; оно может быть и в этом случае, если $p''(\theta)$ отрицательна при малых значениях θ и положительна при больших. Во всех случаях, когда есть пересечение, диаграмма одноосной деформации при $\theta < \theta_1$ будет совпадать с (1.9), а при $\theta > \theta_1$ — с (1.10); однако при значительных p может снова наступить пластический сдвиг [16,17].

В точке пересечения величина $-d\sigma_x/d\theta$ будет скачком уменьшаться. Если при $\theta \leq \theta_1$ будет $p(\theta) = K\theta$ (линейная упругость), то возмущения впереди ударной волны будут описываться линейными уравнениями теории упругости, если же зависимость $p(\theta)$ нелинейна, то будут нелинейными и уравнения, описывающие возмущения перед ударной волной. Эта нелинейность, однако, обычно незначительна, и, по-видимому, можно ограничиться линейным случаем.

Построение решения задачи следует производить, сопрягая решение уравнений (1.6) с решением уравнений, описывающих возмущения перед ударной волной, при помощи условий на ударной волне, которые будут отличаться от (1.7) из-за наличия возмущений перед волной. Этих условий, однако, будет недостаточно, так как сами возмущения перед волной неизвестны, поэтому к ним должно быть добавлено еще одно (как будет видно из нижеследующего, именно одно) условие.

Для случая одномерного плоского движения выбор этого условия элементарен [18, 17] и сводится к следующему. Если при $0 \leq \theta < \theta_1$ выполняется неравенство $p''(\theta) > 0$, то этим условием будет $\sigma_x = -\sigma_1$. Если же при $0 \leq \theta < \theta_1$ выполнено неравенство $p''(\theta) < 0$, то это условие сводится к равенству

$$\frac{dR}{dt} - v_e = c_e \equiv \left[-\frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma_{xe}(\theta)}{d\theta} \right]^{1/2}$$

при $0 \leq \theta < \theta_1$ и к равенству $\sigma_x = -\sigma_1$ при $\theta = \theta_1$; в последнем случае будет выполняться неравенство

$$dR/dt - v_e < c_e(\theta_1)$$

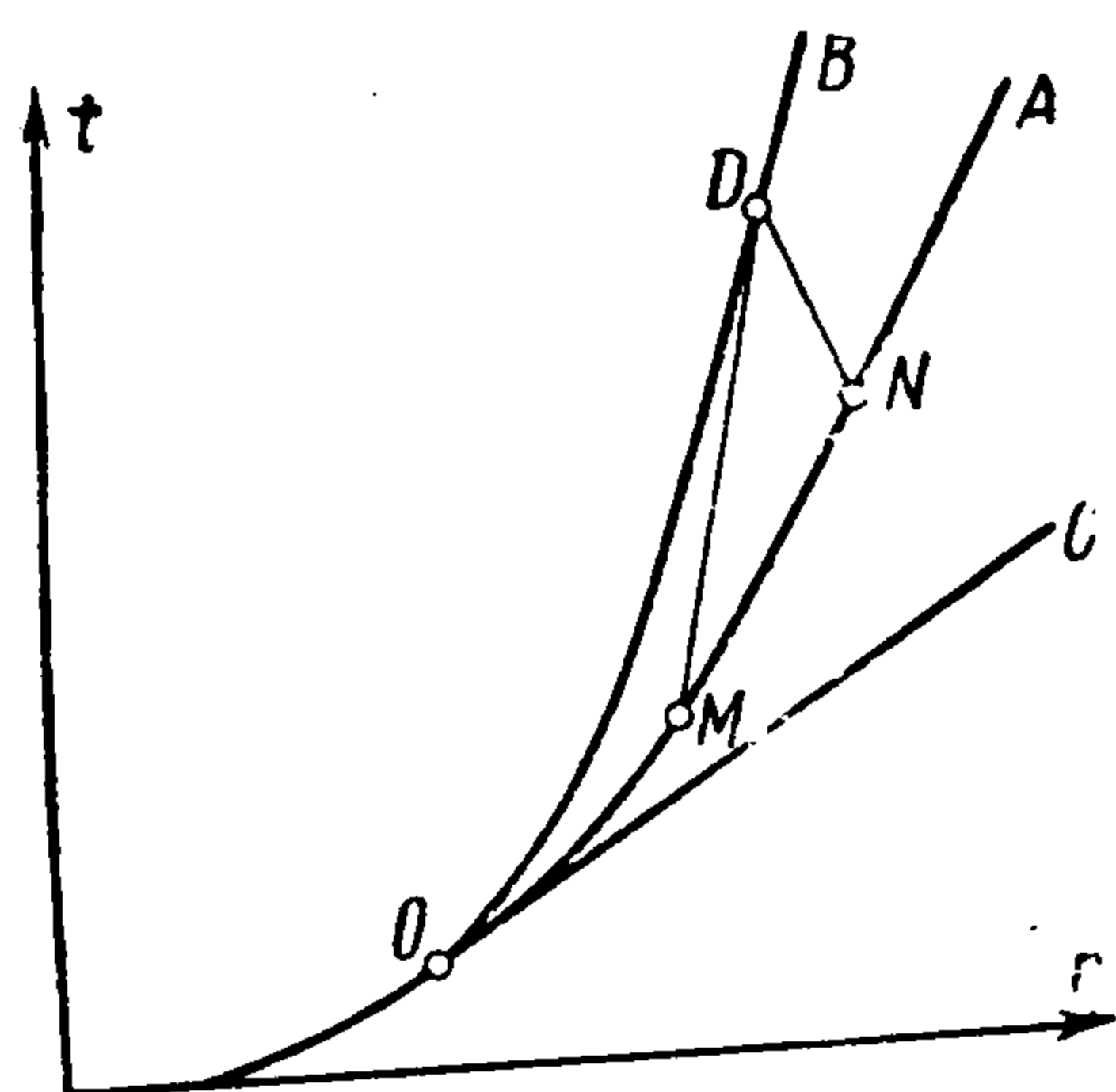
Здесь v_e — скорость частицы непосредственно перед волной. Она много меньше dR/dt и c_e , поэтому в неравенствах можно ее опустить.

В рассматриваемом же случае дело сложнее, ибо здесь уже не существует диаграммы $\sigma_r = \sigma_r(\theta)$ (σ_r зависит от двух аргументов du/dr и u/r ; u — смещение), свойства которой определяют выбор дополни-

тельного условия. Однако соображения об устойчивости ударной волны и эволюционности решения, которые позволяют сделать выбор этого условия в плоском случае [17], легко реализовать и в данном случае. Если $p''(\theta) < 0$ при $0 \leq \theta < \theta_1$, то условие устойчивости вновь приводит к соотношению

$$\frac{dR}{dt} = \left[-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \sigma_{re}(\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi)}{\partial \varepsilon_r} \right]^{1/2}, \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} \quad (1.12)$$

Так как возмущение перед ударной волной распространяется по покоящейся среде, оно будет представлять собой волну одного направления



Фиг. 1

(расходящуюся), поэтому условия (1.12) в рассматриваемом случае достаточно для решения задачи. В случае же $p''(\theta) \geq 0$ при $0 \leq \theta < \theta_1$ передний фронт возмущения будет тоже ударной волной. Интенсивность этой волны, а также непрерывное движение за ней до основной ударной волны определяются одной функцией, которая неизвестна и определится, если добавить одно недостающее условие, связывающее параметры движения непосредственно перед основной ударной волной. Можно показать, что этим условием будет условие пластичности (1.5).

Допустим, что это не так, т. е. что на плоскости rt правее линии $r = R(t)$ имеется линия, ограничивающая слева область движения, где сдвиг протекает упруго (фиг. 1, линия OA). В области между этой линией и линией $r = R(t)$ выполняется условие (1.5) — сдвиг протекает пластически. Случай, когда всюду правее линии $r = R(t)$ вплоть до нее сдвиг упруг, очевидно, невозможен, так как при $p''(\theta) \geq 0$ ($0 \leq \theta < \theta_1$) было бы $dR/dt > c_e$, что несовместимо с тем обстоятельством, что линия $r = R(t)$ должна проходить через точку O (момент излучения упругой волны) в область, где $dR/dt < c_{e0}$, а $c_e \geq c_{e0}$ (c_{e0} — значение c_e непосредственно за передним фронтом возмущений, наклон линии OC). В силу условия (1.11) скорость распространения малых возмущений в пластической области BOA будет меньше, чем в упругой области AOC . Очевидно также, что скорость распространения граничного состояния (наклон линии OA) в каждой точке на OA должна быть заключена между значениями этих скоростей возмущений в точках на OA .

Рассмотрим теперь характеристики двух семейств MD и ND для пластических уравнений. Очевидно, если решение на MN известно, то в треугольнике MDN имеем задачу Коши, которая решается однозначно и определяет значения искомых функций в точке D на ударной волне OB , что делает условия на ней в точке D полностью определенными и достаточными для построения решения левее ударной волны. Кроме того, если линия OA задана, то решение полностью определяется и в упругой области AOC . Таким образом, задание этой линии полностью определяет решение задачи в целом, причем такое задание может быть сделано совершенно произвольно, и решение будет неединственным. Решение задачи оказывается неэволюционным, т. е. задание искомых функций в некоторый момент времени $t = t_1$ однозначно не определяет решения в последующие моменты времени. Противоречие устраняется, если допустить, что пластическая область BOA отсутствует, т. е. что условие (1.5) удовлетворяется только непосредственно впереди ударной волны на линии OB . Это означает, что в качестве недостающего условия, связывающего значения параметров движения на ударной волне, следует взять соотношение (1.5).

Для простоты в дальнейшем будем рассматривать линейные соотношения для описания движения перед ударной волной. В этом случае получающиеся из (1.1) при $\Lambda \equiv 0$ и $\theta_* = \theta \ll 1$ зависимости между напряжениями и скоростями деформации после интегрирования по времени переходят в закон Гука

$$\begin{aligned}\sigma_{re} &= \left(K - \frac{2}{3}G\right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r}\right) + 2G \frac{\partial u}{\partial r} - p_0 \\ \sigma_{\varphi e} &= \left(K - \frac{2}{3}G\right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r}\right) + 2G \frac{u}{r} - p_0\end{aligned}\quad (1.13)$$

Как известно, решение задачи о расходящейся центрально-симметричной упругой волне выражается через одну функцию по формулам

$$\begin{aligned}u_e &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{\Phi(c_0 t - r)}{r} = -\frac{\Phi}{r^2} - \frac{\Phi'}{r}, \quad v_e \equiv \frac{\partial u}{\partial t} = -c_0 \left(\frac{\Phi''}{r} + \frac{\Phi'}{r^2}\right) \\ \sigma_{re} &= \rho_0 c_0^2 \left[\frac{1}{r} \Phi'' + 4\gamma^2 \left(\frac{1}{r^2} \Phi' + \frac{1}{r^3} \Phi\right)\right] - p_0 \\ \sigma_{\varphi e} &= \rho_0 c_0^2 \left[\frac{1-2\gamma^2}{r} \Phi'' - 2\gamma^2 \left(\frac{1}{r^2} \Phi' + \frac{1}{r^3} \Phi\right)\right] - p_0 \\ \gamma^2 &= \frac{G}{K + \frac{4}{3}G} = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\end{aligned}\quad (1.14)$$

Здесь γ — отношение скоростей поперечных и продольных упругих волн, σ — коэффициент Пуассона, штрихи у Φ означают дифференцирование. Условия на ударной волне $r = R(t)$ запишутся в виде

$$\begin{aligned}- (\sigma_{r*} - \sigma_{re*}) &= \rho_0 \frac{\theta_* - \theta_{e*}}{(1 - \theta_{e*})^2} (R' - v_{e*})^2, \quad \sigma_{\varphi*} = \alpha \sigma_{re*} + \beta \\ R' (\theta_{e*} - \theta_*) &= (1 - \theta_*) v_{e*} - (1 - \theta_{e*}) v_*\end{aligned}\quad (1.15)$$

Здесь и в дальнейшем точка означает производную по времени, а индексом * отмечены значения величин на ударной волне. Так как в упругой волне $\theta_e \ll 1$, условия (1.15) можно упростить

$$\begin{aligned}- (\sigma_{r*} - \sigma_{re*}) &= \rho_0 (\theta_* - \theta_{e*}) (R' - v_{e*})^2, \quad \sigma_{\varphi e*} = \alpha \sigma_{re*} + \beta \\ R' (\theta_* - \theta_{e*}) &= v_* - (1 - \theta_*) v_{e*}\end{aligned}\quad (1.16)$$

Легко показать, что выражение Λ для частиц, расположенных непосредственно перед ударной волной, будет равно нулю. В самой же упругой волне, т. е. при $r > R(t)$, условие того, что сдвиг протекает упруго $J_2 < F(p)$, сводится к

$$\left| \frac{1}{r} \Phi''(\xi) + \frac{3}{r^2} \Phi'(\xi) + \frac{3}{r^3} \Phi(\xi) \right| < \left| \frac{kK}{2\sqrt{2}Gr} \Phi''(\xi) - \frac{b-p_0}{2\sqrt{2}G} \right| \quad (1.17)$$

В точке каждой характеристики $\xi = c_0 t - r = \text{const}$ при $r = R$ это неравенство превращается в равенство. Поскольку при $\xi = \text{const}$ и $R < r \rightarrow \infty$ левая сторона в (1.17) стремится к нулю, а правая — к положительной величине, можно ожидать, что условие (1.17) будет выполнено, т. е. что впереди ударной волны не возникнет областей с пластическим сдвигом

(последнее обстоятельство существенно осложнило бы решение задачи). Конечно, при фактическом построении решения следует проверять выполнение условия (1.17) всюду в области $r > R(t)$.

С течением времени наступит момент t_1 , когда ударная волна полностью истощится, т. е. при $r = R_\infty = R(t_1)$ будут выполнены равенства $v_* = v_{e*}$, $\theta_* = \theta_{e*}$, $\sigma_{r*} = \sigma_{re*}$, после чего движение всюду будет непрерывным, при этом в области $r > R_\infty$ оно будет представлять собой расходящуюся упругую волну типа (1.14), которую следует непрерывно стыковать с решением уравнений (1.1) в области $r < R_\infty$.

2. Будем искать решение уравнений (1.6) в виде рядов по степеням малого параметра ε , т. е.

$$\begin{aligned} v &= v^0 + \varepsilon v^1 + \dots, \quad p = p^0 + \varepsilon p^1 + \dots, \quad \theta_* = \theta_*^0 + \varepsilon \theta_*^1 \\ \sigma_r &= \sigma_r^0 + \varepsilon \sigma_r^1 + \dots, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\varphi^0 + \varepsilon \sigma_\varphi^1 + \dots, \quad \theta = \theta^0 + \varepsilon \theta^1 + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

Подставив (2.1) в (1.6), получим уравнения первого приближения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta^0}{\partial t} + v^0 \frac{\partial \theta^0}{\partial r} + (1 - \theta^0) \left(\frac{\partial v^0}{\partial r} + \frac{2v^0}{r} \right) &= 0, \quad \frac{\partial \theta_*^0}{\partial t} + v^0 \frac{\partial \theta_*^0}{\partial r} = 0 \\ \rho_0 \left(\frac{\partial v^0}{\partial t} + v^0 \frac{\partial v^0}{\partial r} \right) - (1 - \theta^0) \left[\frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_r^0 - \sigma_\varphi^0) \right] &= 0 \\ \sigma_\varphi^0 &= \alpha \sigma_r^0 + \beta, \quad -3p^0 = \sigma_r^0 + 2\sigma_\varphi^0, \quad \theta^0 = \theta_*^0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнения второго приближения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta^1}{\partial t} + v^0 \frac{\partial \theta^1}{\partial r} + v^1 \frac{\partial \theta^0}{\partial r} + (1 - \theta^0) \left(\frac{\partial v^1}{\partial r} + \frac{2v^1}{r} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \theta_*^1}{\partial t} + v^0 \frac{\partial \theta_*^1}{\partial r} + v^1 \frac{\partial \theta_*^0}{\partial r} &= 0 \\ \rho_0 \left(\frac{\partial v^1}{\partial t} + v^0 \frac{\partial v^1}{\partial r} + v^1 \frac{\partial v^0}{\partial r} \right) - (1 - \theta^0) \left[\frac{\partial \sigma_r^1}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_r^1 - \sigma_\varphi^1) \right] + \\ + \theta^1 \left[\frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_r^0 - \sigma_\varphi^0) \right] &= 0, \quad \sigma_\varphi^1 = \alpha \sigma_r^1 \\ p^1 &= -\frac{1+2\alpha}{3} \sigma_r^1, \quad \theta^1 = \theta_*^1 - \varphi(p^0 - p_0, \theta_*^0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Уравнения для последующих приближений не выписываем, они громоздки и не нужны практически для решения задачи. Система (2.2) нелинейна и совпадает с уравнениями задачи для частного случая среды со свойством $d\theta/dt = 0$ при $dp/dt < 0$ (несжимаемая среда при объемной разгрузке). Все известные попытки решения этой задачи делались именно с этим предположением о среде [1-7]. Система (2.3) линейна и может быть решена после построения первого приближения.

Решения систем (2.2) и (2.3) с нужным числом произвольных функций находятся в квадратурах. Имеем для (2.2)

$$\begin{aligned} v^0 &= c^0(t) r^{-2}, \quad \theta_*^0 = f(\zeta) = f(r^3 - 3 \int c^0(t) dt), \quad p^0 = -\frac{1+2\alpha}{3} \sigma_r^0 - \frac{2}{3} \beta \\ \theta^0 &= \theta_*^0, \quad \sigma_\varphi^0 = \alpha \sigma_r^0 + \beta, \quad \sigma_r^0 = r^{-2(1-\alpha)} \left\{ \Pi^0(t) + \frac{\beta}{1-\alpha} r^{2(1-\alpha)} + \right. \\ &+ \left. \frac{dc^0(t)}{dt} \int \frac{r^{-2\alpha} dr}{1 - \theta_*^0(r, t)} - 2 [c^0(t)]^2 \int \frac{r^{-(2\alpha+3)} dr}{1 - \theta_*^0(r, t)} \right\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для системы второго приближения (2.3) имеем

$$\begin{aligned} v^1 &= r^{-2} \left[\int r^2 A(r, t) dr + c^1(t) \right], & \theta_*^1 &= \int B_*(\zeta, t) d\zeta + K(t) \\ \theta^1 &= \theta_*^1 - \varphi(p^0 - p_0, \theta_*^0), & \sigma_r^1 &= r^{-2(1-\alpha)} \left[\Pi^1(t) + \int D(r, t) dr \right] \\ \sigma_\varphi^1 &= \alpha \sigma_r^1, & p^1 &= -\frac{1+2\alpha}{3} \sigma_r^1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$A(r, t) \equiv \frac{1}{1-\theta_*^0} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v^0 \frac{\partial}{\partial r} \right) \varphi(p^0 - p_0, \theta_*^0), \quad \zeta \equiv r^3 - 3 \int c^0(t) dt$$

$$B_*(\zeta, t) = B(r, t) \equiv -v^1 \frac{\partial \theta_*^0}{\partial r} = -3f'(\zeta) \left[\int r^2 A(r, t) dr + c^1(t) \right]$$

$$D(r, t) \equiv \frac{1}{1-\theta_*^0} \left\{ \frac{\partial v^1}{\partial t} + v^0 \frac{\partial v^1}{\partial r} + v^1 \frac{\partial v^0}{\partial r} + \theta^1 \left[\frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_r^0 - \sigma_\varphi^0) \right] \right\}$$

В этих формулах $c^0(t), c^1(t), \Pi^0(t), \Pi^1(t), f(\zeta), K(t)$ — произвольные функции своих аргументов. Они должны быть определены из граничных условий задачи, т. е. из (1.2) — (1.4), (1.7), (1.16).

Неизвестные функции $a(t), R(t)$ также ищем в виде рядов

$$a = a^0 + \varepsilon a^1 + \dots, \quad R = R^0 + \varepsilon R^1 + \dots \quad (2.6)$$

Граничные условия на поверхности взрывной полости дают:

для первого приближения (2.7)

$$-\sigma_r^0(a^0, t) = \psi(a^0), \quad v^0(a^0, t) = (a^0)'$$

для второго приближения (2.8)

$$-\sigma_r^1(a^0, t) = \left[\psi'(a^0) + \frac{\partial}{\partial r} \sigma_r^0(a^0, t) \right] a^1, \quad v^1(a^0, t) = \frac{da^1}{dt} - a^1 \frac{\partial}{\partial r} v^0(a^0, t)$$

Условия на ударной волне дают:

для первого приближения (2.9)

$$-(\sigma_r^0 - \sigma_{re}^0)_{r=R^0} = \rho_0 [(\theta_*^0 - \theta_e^0) (R^{0*} - v_e^0)^2]_{r=R^0}$$

$$R^{0*} (\theta_*^0 - \theta_e^0)_{r=R^0} = [v^0 - v_e^0 (1 - \theta_*^0)]_{r=R^0}, \quad (\sigma_{\varphi e}^0 - \alpha \sigma_{re}^0)_{r=R^0} - \beta = 0$$

для второго приближения (2.10)

$$\begin{aligned} -[\sigma_r^1 - \sigma_{re}^1 + R^1 \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r^0 - \sigma_{re}^0)]_{r=R^0} &= \rho_0 \{ 2(\theta_*^0 - \theta_e^0) (R^{0*} - v_e^0) (R^{1*} - v_e^1) + \\ &+ (R^{0*} - v_e^0)^2 (\theta_*^1 - \theta_e^1) + R^1 \frac{\partial}{\partial r} [(\theta_*^0 - \theta_e^0) (R^{0*} - v_e^0)^2] \}_{r=R^0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [R^{1*} (\theta_*^0 - \theta_e^0) + R^{0*} (\theta_*^1 - \theta_e^1) + R^{0*} R^{1*} \frac{\partial}{\partial r} (\theta_*^0 - \theta_e^0)]_{r=R^0} &= \\ = \left\{ v^1 - v_e^1 (1 - \theta_*^0) + v_e^0 \theta_*^1 + R^1 \frac{\partial}{\partial r} [v^0 - v_e^0 (1 - \theta_*^0)] \right\}_{r=R^0} \end{aligned}$$

$$[\sigma_{\varphi e}^1 - \alpha \sigma_{re}^1 + R^1 \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_{\varphi e}^0 - \alpha \sigma_{re}^0)]_{r=R^0} = 0$$

Условия на ударной волне до момента возникновения упругих волн получаются из (2.9), (2.10), если положить $v_e = 0, \theta_e = 0, \sigma_{re} = -p_0$.

Из полученных формул видно, что основной задачей является нелинейная задача первого приближения. После ее решения построение решения во втором приближении сводится к решению линейной задачи.

3. Займемся решением задачи первого приближения. Подстановка формул (2.4) в условия (2.7), (2.9) дает (3.1)

$$c^0(t) = (a^0)^2 \frac{da^0}{dt}, \quad \zeta = r^3 - (a^0)^3, \quad \Pi^0(t) = -\left[\psi(a^0) + \frac{\beta}{1-\alpha}\right] (a^0)^{2(1-\alpha)}$$

$$p^0(R^0, t) - p_0 = -\frac{1+2\alpha}{3} \sigma_r^0(R^0, t) - \frac{2}{3} \beta$$

$$\theta_*^0(R^0, t) = f(\zeta_*) \equiv f[(R^0)^3 - (a^0)^3] = \theta_* [p^0(R^0, t) - p_0]$$

$$\begin{aligned} -\sigma_r^0(R^0, t) &\equiv (R^0)^{-2(1-\alpha)} \left\{ \psi(a^0) (a^0)^{2(1-\alpha)} + \frac{\beta}{1-\alpha} \left[(a^0)^{2(1-\alpha)} - (R^0)^{2(1-\alpha)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \frac{d^2(a^0)^3}{dt^2} \int_{a^0}^{R^0} \frac{r^{-2\alpha} dr}{1-\theta_*^0(r, t)} + \frac{2}{9} \left[\frac{d(a^0)^3}{dt} \right]^2 \int_{a^0}^{R^0} \frac{r^{-(2\alpha+3)} dr}{1-\theta_*^0(r, t)} \right\} = \\ &= \rho_0 [\theta_*^0(R^0, t) - \theta_e^0(R^0, t)] [R^0 - v_e^0(R^0, t)]^2 - \sigma_{re}^0(R^0, t) \end{aligned}$$

$$R^0 [\theta_*^0(R^0, t) - \theta_e^0(R^0, t)] = \left(\frac{a^0}{R^0}\right)^2 \frac{da^0}{dt} - v_e^0(R^0, t) [1 - \theta_*^0(R^0, t)]$$

$$\sigma_{\varphi e}^0(R^0, t) - \alpha \sigma_{re}^0(R^0, t) - \beta = 0$$

Здесь $\theta_* = \theta_*(p_*^0 - p_0)$ — известная функция, описывающая нагрузочную ветвь диаграммы объемного сжатия грунта.

Соотношения (3.1) вместе с выражениями для упругих величин (1.13), (1.14) представляют собой замкнутую систему уравнений для определения функций

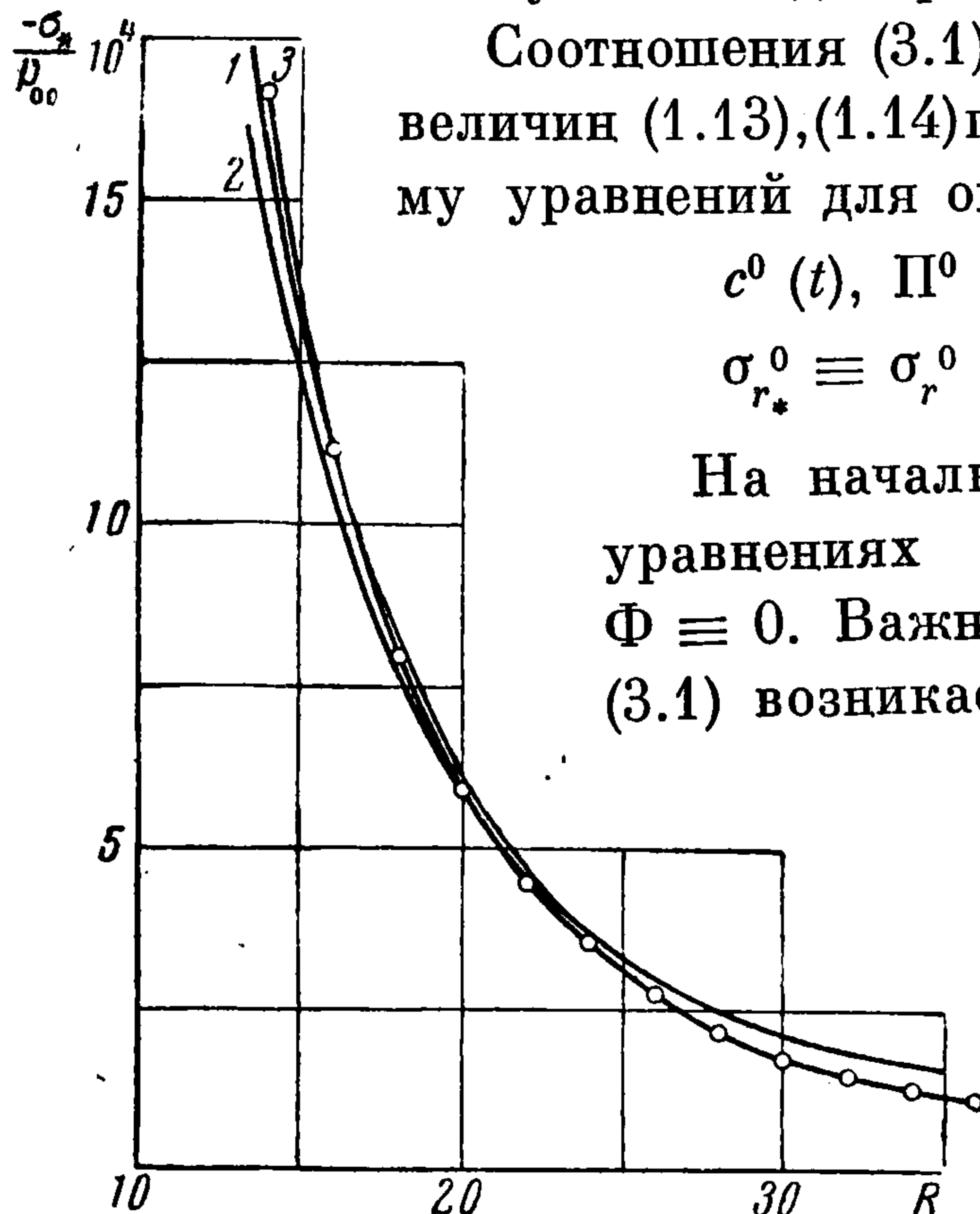
$$c^0(t), \quad \Pi^0(t), \quad f(\zeta), \quad a^0(t), \quad R^0(t), \quad \Phi(c_0 t - r),$$

$$\sigma_{r*}^0 \equiv \sigma_r^0(R^0, t), \quad p_*^0 \equiv p^0(R^0, t), \quad \theta_*^0(R^0, t)$$

На начальном этапе, когда $R^0 \geq c_0$, в этих уравнениях упругие члены отсутствуют, т. е. $\Phi \equiv 0$. Важно подчеркнуть, что для системы (3.1) возникает задача Коши, которую в принципе нетрудно решить численно с использованием электронных счетных машин.

Процедура решения может быть упрощена, если заметить следующее. Величина θ даже при весьма значительных давлениях очень мала, т. е. в соотношениях (3.1) имеем $\theta_*^0 \ll 1$, и если в выражениях под интегралами пренебречь θ_*^0 по сравнению с единицей,

то интегралы возьмутся, и решение системы (3.1) упростится. При этом будет, в частности, определена и функция θ_*^0 . Эту функцию можно подставить в интегралы в (3.1) и повторить процесс построения решения. Этих двух итераций будет, по-видимому, достаточно. Можно, с другой точки зрения, считать, что в задаче (3.1) есть второй малый параметр $\varepsilon_1 = \max \theta_*^0 \ll 1$. Тогда, разложив решение задачи (3.1) в ряд по степеням ε_1 и удержав первые два члена, получим упомянутые две итерации.

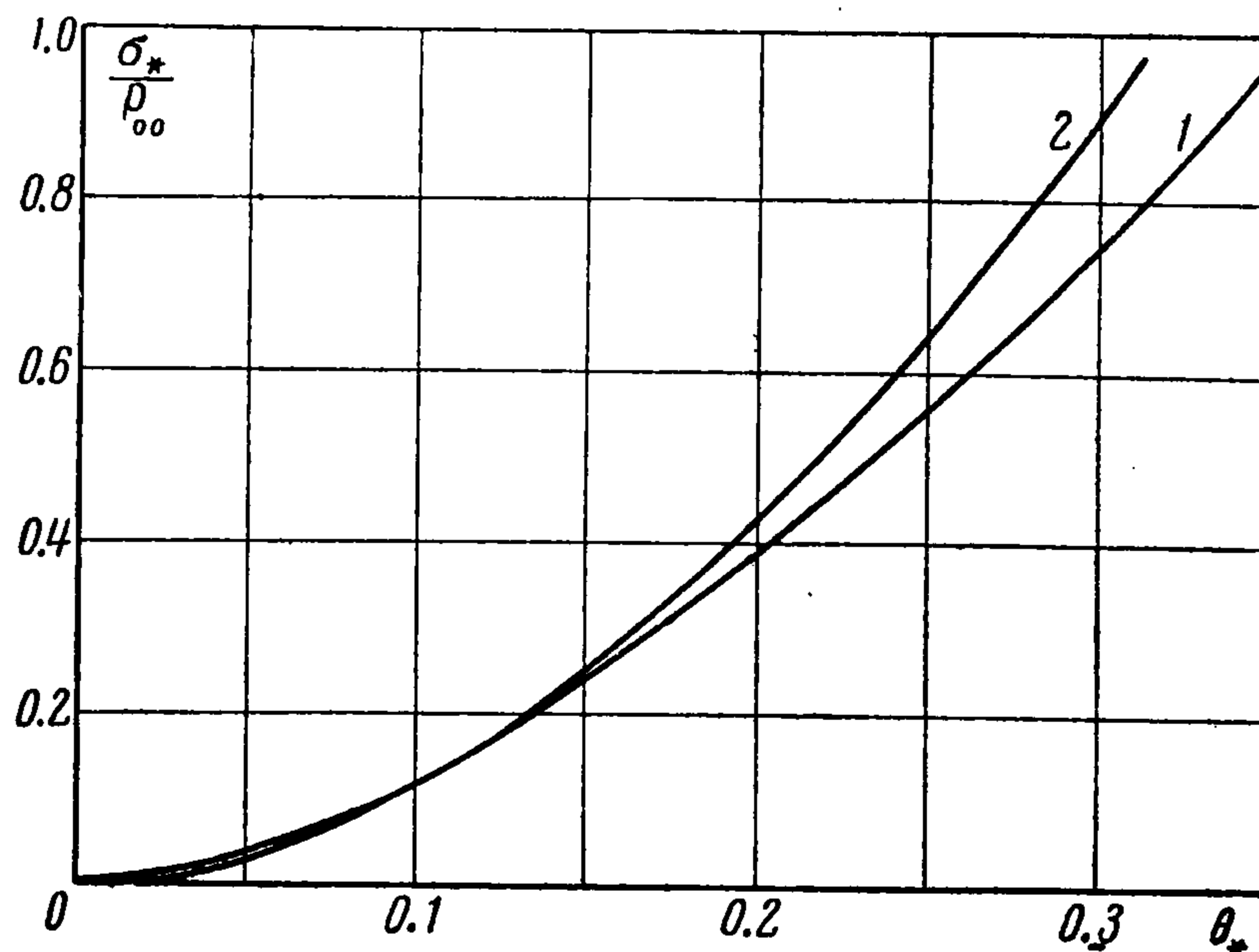


Фиг. 2

На фиг. 2 приводятся результаты решения системы (3.1) для песчаного грунта ненарушенной структуры (необходимые экспериментальные данные взяты из [12]) для начального этапа, когда упругой волны еще нет¹. По оси абсцисс отложен безразмерный радиус ударной волны (отнесенный к радиусу заряда), по оси ординат безразмерное радиальное напряжение на ударной волне. Кривая 1 соответствует точному решению, полученному путем задания функции $\theta_*(R)$ из эксперимента (вместо функции $\theta_*(p_* - p_0)$; как было замечено Г. В. Рыковым, задание $\theta_*(R)$ позволяет задачу в лагранжевых координатах решить в явном виде в квадратурах). Кривая 2 соответствует первой итерации с аппроксимацией, полученной из точного решения зависимости $\theta_*(p_* - p_0)$ выражением

$$\theta_* = [(p_* - p_0) / A]^n$$

(точное решение и аппроксимация даны на фиг. 3 кривыми 1 и 2 соответственно). Кривая 3 на фиг. 2 получена из тех же экспериментов, из которых взята зависимость $\theta_* = \theta_*(R)$ при построении точного решения. Видно, что первая итерация дает достаточно хорошее приближение к решению. Имеющееся расхождение может быть связано не столько с грубостью первой итерации, сколько с заметной разницей в использованных



Фиг. 3

в обоих решениях зависимостях $\theta_* = \theta_*(p_* - p_0)$ (фиг. 3). Расхождение с экспериментом при $R > 20$ видимо связано с пренебрежением упругой волной в расчетах, так как на этих расстояниях в опытах упругая волна регистрируется.

Выясним теперь, до каких пор можно пользоваться получаемым описанным выше способом решением, основанным на допущении, что сдвиг за ударной волной протекает пластически. Подставив полученные формулы в выражение для Λ из (1.1), получим, что сдвиг будет для решения в первом приближении пластическим, если выполняется неравенство

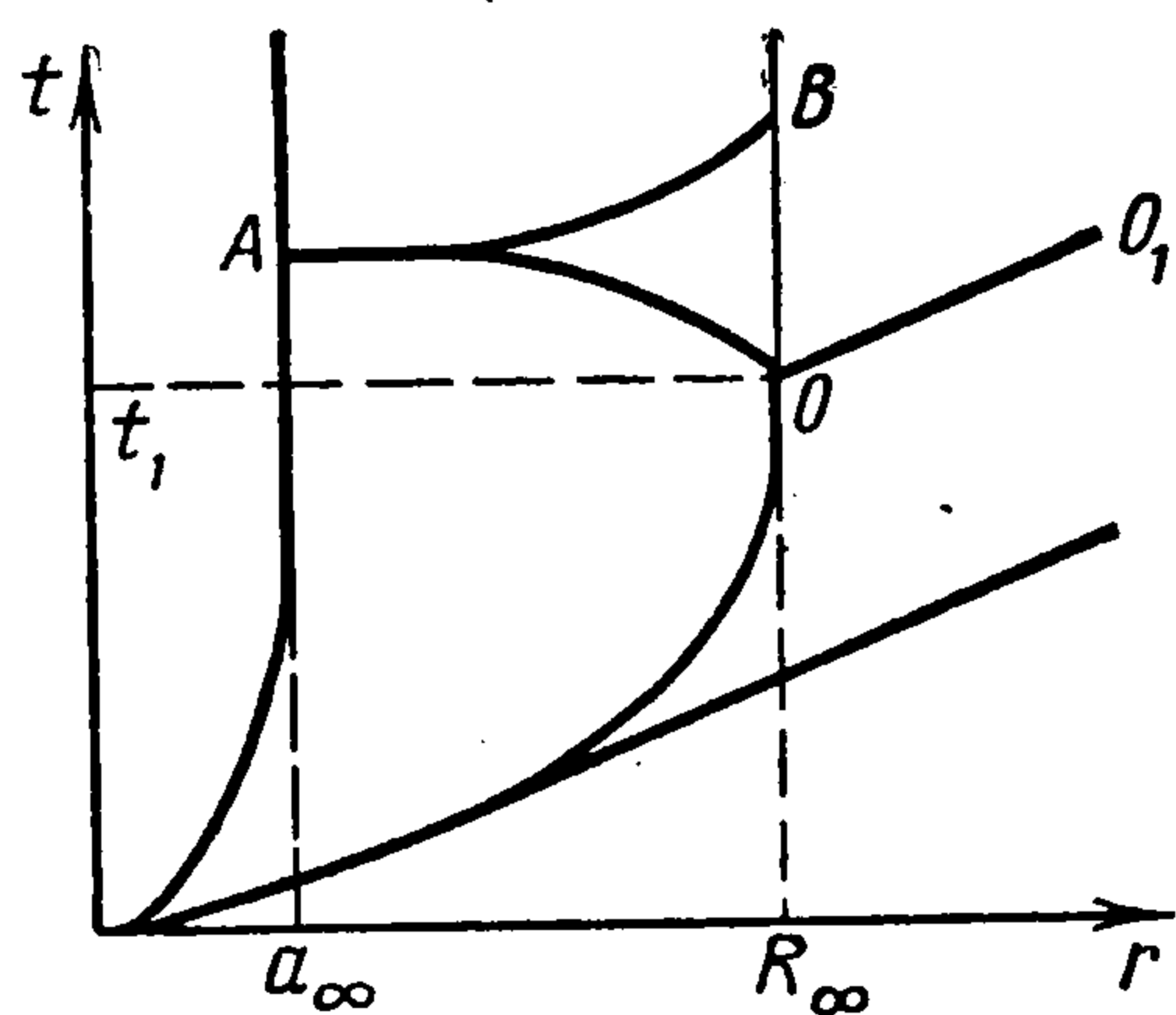
$$\Lambda^* \equiv \frac{4}{3} G [\sigma_r (1 - \alpha) - \beta] \left(-\frac{3c^0}{r^3} \right) - F'(p) \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{c^0}{r^2} \frac{\partial p}{\partial r} \right) > 0 \quad (3.2)$$

Поскольку $\sigma_r < 0$, $1 - \alpha > 0$, $\beta > 0$ и, как показывают вычисления для начальной стадии движения, $dp/dt < 0$, то, пока $c^0 > 0$, т. е. пока $da^0/dt > 0$ и $dp/dt < 0$, сдвиг будет пластическим. Только в моменты времени, близкие к моменту прекращения расширения взрывной полости (т. е. к моменту, когда $c^0 = 0$), начнется упругая разгрузка по деформации сдвига. Строя решение задачи, нужно следить за знаком Λ^* , и в момент времени, когда Λ^* обратится в нуль, из точки, где это произошло, должно начаться построение волны упругой разгрузки по деформации сдвига. Учет второго приближения, конечно, несколько (но незначительно) изменит величину Λ^* , поэтому такой учет может только несущественно повлиять на значение указанного момента времени. Следует, однако, заметить, что на этой поздней стадии движения главным членом в выражении

¹ Расчеты выполнены Т. Б. Лариной на машине «Стрела» в ВЦ МГУ.

для Λ^* будет первый, так как он имеет порядок $G\sigma_r v/r$, а второй член — порядок $\sigma_r^2 v/r$, и, значит, отношение этих членов имеет порядок $G/\sigma_r \sim G/p_0 \sim 10^3$. Поэтому с большой точностью момент возникновения упругой сдвиговой разгрузки совпадает с моментом прекращения расширения полости ($da^0/dt = 0$). Так как в этот момент $\Lambda^* = 0$ для всех значений r , разгрузка начинается одновременно во всех частицах от поверхности полости до ударной волны или до частицы, в которой интенсивность ударной волны обратилась в нуль.

Начиная с этого момента времени, движение будет всюду описываться линейными уравнениями теории упругости, причем в частицах, по которым прошла ударная волна, модуль объемной сжимаемости K и плот-



Фиг. 4

ность будут отличаться от начальных значений (K определяется в каждой частице соответствующей разгрузочной ветвью диаграммы объемного сжатия). Отличием плотности от невозмущенного значения можно пренебречь ввиду его малости ($\theta \ll 1$), тогда как K будет меняться значительно, убывая от весьма больших значений с ростом r и непрерывно переходя в невозмущенное значение при $r = R_\infty$. В области $r > R_\infty$ решение задачи будет определяться формулами

(1.14) с пока неизвестной функцией Φ .

В области $a_\infty \leq r \leq R_\infty$ движение будет описываться хотя и линейными уравнениями, однако коэффициенты уравнений будут из-за переменности K функциями r , и уравнения будут неоднородными, поэтому общего решения типа (1.14) для них выписать нельзя. Решение можно строить численно, например, методом характеристик. Однако можно построить простое приближенное решение задачи и для этого случая. Приближение состоит в том, что модуль объемной сжимаемости K , который почти везде в области $a_\infty \leq r \leq R_\infty$ очень велик, полагается равным бесконечности, что сводит задачу в этой области к статической. Это решение будет плохим непосредственно вблизи прямой $t = t_1$ (t_1 — момент начала разгрузки (фиг. 4)). Действительно, этим решением распределение напряжений, достигнутое в момент t_1 , которое не удовлетворяет уравнениям равновесия (так как в момент $t = t_1$ равны нулю только скорости, но не ускорения), скачком заменяется распределением, удовлетворяющим уравнениям равновесия (т. е. это решение скачком обращает ускорения в нуль). В точном решении этот процесс происходит постепенно, однако ввиду медленности движения вблизи полости решение, полученное здесь в предположении несжимаемости среды ($K = \infty$), будет мало отличаться от точного решения [10], исключая узкую полосу вблизи отрезка $t = t_1$, $a_\infty \leq r \leq R_\infty$. Для оценки размеров этой полосы можно считать, что она ограничивается сверху куском отраженной от линии $r = a_\infty$ характеристики, выходящей влево из точки $t = t_1$, $r = R_\infty$ (фиг. 4; в случае $K = \infty$ эта полоска имеет нулевую ширину, она совпадает с отрезком $t = t_1$, в точном решении она ограничена сверху кривой AB).

В приближенном решении на характеристике OO_1 напряжения и скорость будут терпеть разрыв, которого в точном решении нет.

Приближенное решение можно уточнить, построив точно (это легко сделать) линию OAB и плавно соединив на отрезке OB значения напряжений в точке O с их значениями в точке B , получающимися из статического решения в области $a_\infty \leq r \leq R_\infty$, которые сохраняются постоянными на прямой $r = R_\infty$ выше точки B . По получающемуся таким образом распределению σ_r при $r = R_\infty$ можно достроить упругую волну, т. е. найти функцию Φ для соотношений (1.14) в области выше характеристики OO_1 .

Выпишем формулы для описанного приближенного решения. При $K = \infty$ решение в области $a_\infty \leq r \leq R_\infty$ определяется соотношениями

$$\sigma_r = 2G \frac{\partial u}{\partial r} - p_0, \quad \sigma_\varphi = 2G \frac{u}{r} - p_0, \quad u = \frac{A}{r^2} \quad (3.3)$$

где $A = \text{const}$, u — дополнительное смещение относительно состояния, достигнутого к моменту $t = t_1$. Граничное условие на полости определяет постоянную

$$A = [\psi(a_\infty) - p_0] \frac{a_\infty^3}{4G} \quad (3.4)$$

Распределение напряжений вдоль прямой $r = R_\infty$ (фиг. 4) определяется функцией $\sigma_r(R_\infty, t) = f(t)$, плавно меняющейся при изменении t от t_1 до t_2 , где t_2 — момент, соответствующий точке B , от значения σ_r в точке O , известного из решения задачи при $t \leq t_1$, до значения в точке B , определяемого формулами (3.3), (3.4) при $r = R_\infty$. При $t > t_2$ величина σ_r остается постоянной. Плавное сопряжение следует делать, сохраняя непрерывной производную σ_r по t в точках O и B ¹. Для функции Φ получаем, удовлетворяя условию непрерывности σ_r при $r = R_\infty$, уравнение

$$\rho_0 c_0^2 \left\{ \frac{1}{R_\infty} \Phi''(c_0 t - R_\infty) + 4\gamma^2 \left[\frac{1}{R_\infty^2} \Phi'(c_0 t - R_\infty) + \frac{1}{R_\infty^3} \Phi(c_0 t - R_\infty) \right] \right\} - p_0 = f(t) \quad (3.5)$$

решение которого имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) = & e^{-\alpha(\xi-\xi_1)} [A \sin(\sqrt{\beta-\alpha^2}\xi) + B \cos(\sqrt{\beta-\alpha^2}\xi)] + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\beta-\alpha^2}} \int_{\xi_1}^{\xi} F(\zeta) e^{-\alpha(\xi-\zeta)} \sin[\sqrt{\beta-\alpha^2}(\xi-\zeta)] d\zeta \\ F(\zeta) = & \frac{R_\infty}{\rho_0 c_0^2} \left[f\left(\frac{\zeta+R_\infty}{c_0}\right) + p_0 \right], \quad \xi_1 = c_0 t_1 - R_\infty \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\alpha = \frac{2\gamma^2}{R_\infty}, \quad A = \Phi_1 \sin(\sqrt{\beta-\alpha^2}\xi_1) + (\Phi_1' + \alpha\Phi_1) \frac{\cos(\sqrt{\beta-\alpha^2}\xi_1)}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}$$

$$\beta = \frac{4\gamma^2}{R_\infty^2}, \quad B = \Phi_1 \cos(\sqrt{\beta-\alpha^2}\xi_1) - (\Phi_1' + \alpha\Phi_1) \frac{\sin(\sqrt{\beta-\alpha^2}\xi_1)}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}$$

¹ Более точный результат можно получить точно определив из анализа решения в окрестности точки O значение $d\sigma_r/dt$ в точке O и используя это значение при сопряжении.]

Начальные значения $\Phi_1 = \Phi(\xi_1)$, $\Phi_1' = \Phi'(\xi_1)$ в (3.6) берутся из решения, построенного ранее для значений $\xi \leq \xi_1$.

Этим завершается полное построение решения задачи первого приближения. Разумеется, для $t > t_1$ можно построить и точное решение — для этого численно методом характеристик решение строится в области $t > t_1$, $a_\infty \leq r \leq R_\infty$ до момента времени t_2 , начиная с которого $\sigma_r(R_\infty, t)$ не станет практически постоянной величиной, даваемой формулами (3.3), (3.4), а затем решение продолжается при помощи формул (3.6) с соответствующими начальными значениями $\Phi(\xi_2)$, $\Phi'(\xi_2)$ ($\xi_2 = c_0 t_2 - R_\infty$).

Построив решение первого приближения, можно решить линейную задачу второго приближения, пользуясь выведенными выше квадратурами (3.5) и граничными условиями (2.8), (2.10), определяющими произвольные функции.

Однако наиболее интересные свойства решения, в частности, свойства излучаемой упругой волны, в первом приближении практически определяются точно.

Поступила 16 VI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю., Зволинский Н. В., Степаненко И. З. К динамике грунтовых масс. Докл. АН СССР, 1954, т. 95, № 4.
2. Компанец А. С. Ударные волны в пластической уплотняющейся среде. Докл. АН СССР, 1956, т. 109, № 1.
3. Родионов В. Н., Ромашов А. Н., Сухотин А. И. Взрыв в уплотняющейся неограниченной среде. Докл. АН СССР, 1958, т. 123, № 4.
4. Андрианкин Э. И., Корявов В. П. Ударная волна в переменнo уплотняемой пластической среде. Докл. АН СССР, 1959, т. 128, № 2.
5. Сагомоян А. Я. Одномерные движения грунта со сферическими, цилиндрическими и плоскими волнами. Сб. «Динамика грунтов», Академия строительства и архитектуры СССР, 1961, № 44.
6. Зволинский Н. В. Об излучении упругой волны при сферическом взрыве в грунте. ПММ, 1960, т. 24, вып. 1.
7. Ловецкий Е. Е. Некоторые вопросы теории взрыва в пористом грунте. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 6.
8. Григорян С. С. Об общих уравнениях динамики грунтов. Докл. АН СССР, 1959, т. 124, № 2.
9. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
10. Григорян С. С. О некоторых упрощениях в описании движения мягких грунтов. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
11. Алексеенко В. Д., Григорян С. С., Новгородов А. Ф., Рыков Г. В. Некоторые экспериментальные исследования по динамике мягких грунтов. Докл. АН СССР, 1960, т. 133, № 6.
12. Алексеенко В. Д., Григорян С. С., Кошелёв Л. И., Новгородов А. Ф., Рыков Г. В. Измерение волн напряжений в мягких грунтах. ПМТФ, 1963, № 2.
13. Григорян С. С., Ляхов Г. М., Мельников В. В., Рыков Г. В. Взрывные волны в лёссовидном грунте. ПМТФ, 1963, № 4.
14. Алексеенко В. Д. Экспериментальное исследование динамического поля напряжений в мягком грунте при контактном взрыве. ПМТФ, 1963, № 5.
15. Рыков Г. В. Экспериментальное исследование поля напряжений при взрыве в песчаном грунте. ПМТФ, 1964, № 1.
16. Григорян С. С., Черноусько Ф. Л. Одномерные квазистатические движения грунта. ПММ, 1961, т. 25, вып. 1.
17. Григорян С. С., Черноусько Ф. Л. Задача о поршне для уравнений динамики грунтов. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
18. Баренблатт Г. И. О распространении мгновенных возмущений в среде с нелинейной зависимостью напряжений от деформации. ПММ, 1953, т. 17, вып. 4.