Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

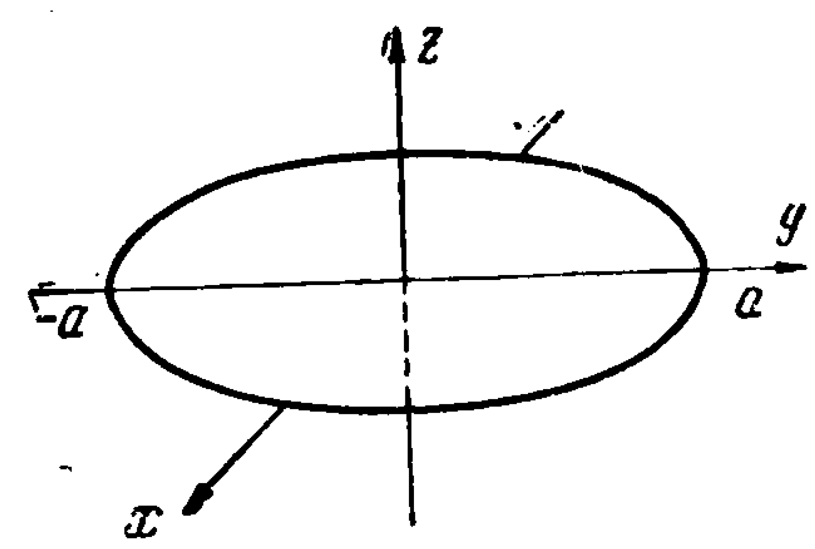
ОБОБЩЕНИЕ КРИТЕРИЯ ГРИФФИТСА — СНЕДДОНА НА СЛУЧАЙ НЕОДНОРОДНОГО ТЕЛА

В. И. Моссаковский, М. Т. Рыбка

(Днепропетровск)

В работе решена задача теории упругости для двух соединенных полупространств с круглой трещиной в плоскости соединения. Исходя из концепции Гриффитса, найдена величина разрушающих усилий.

§ 1. Постановка задачи и вывод граничных условий. Рассматривается задача о двух упругих полупространствах с различными упругими свойствами. В плоскости соединения этих полупространств имеется круглая трещина радиуса a. На бесконечности приложены растягивающие усилия $p = \text{const}$, перпендикулярные к плоскости трещины. Прямоугольные координаты выбираем таким образом, чтобы граница упругих полупространств совпадала с плоскостью $z = 0$; начало поместим в центре трещины (фигура).



Решение этой задачи ищем в виде [1]

$$u = \varphi_1 + z\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad v = \varphi_2 + z\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$w = \varphi_3 + z\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{1.1}$$

Здесь $u(x, y, z)$, $v(x y, z)$, $w(x, y, z)$ — проекции упругих перемещений на оси прямоугольных координат; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и ψ — гармонические в пространстве функции от x, y, z, связанные зависимостью

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{1}{4\nu - 3}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right) \tag{1.2}$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Выражая напряжения через деформации и используя формулы (1.1), находим компоненты тензора напряжений σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} на плоскости $z = 0$

$$\sigma_z(x, y, 0) = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial z}(\varphi_3 + \psi) + \lambda\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right) \tag{1.3}$$

$$\tau_{xz}(x, y, 0) = \mu\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right), \qquad \tau_{yz}(x, y, 0) = \mu\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$

где λ и μ — коэффициенты Ляме. Из (1.1), положив $z = 0$, получим

$$u(x, y, 0) = \varphi_1(x, y, 0), \qquad v(x, y, 0) = \varphi_2(x, y, 0)$$

$$w(x, y, 0) = \varphi_3(x, y, 0) \tag{1.4}$$

Все величины, относящиеся к верхнему полупространству, обозначим индексом плюс, к нижнему — минус.

Граничные условия задачи будут следующие. На трещине сверху и снизу нормальные напряжения σ_z^+, σ_z^- равны p, касательные напряжения отсутствуют. Вне трещины в плоскости соединения полупространств выполняются условия спайки. Учитывая формулы (1.3) и (1.4), условия для определения неизвестных функций φ_1, φ_2, φ_3 и ψ можно записать в виде

$$(\lambda_1 + 2\mu_1)\frac{\partial}{\partial z}(\varphi_3^+ + \psi^+) + \lambda_1\left(\frac{\partial\varphi_1^+}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2^+}{\partial y}\right) = p, \qquad \mu_1\left(\frac{\partial\varphi_1^+}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_3^+}{\partial x} + \frac{\partial\psi^+}{\partial x}\right) = 0$$

$$(\lambda_2 + 2\mu_2)\frac{\partial}{\partial z}(\varphi_3^- + \psi^-) + \lambda_2\left(\frac{\partial\varphi_1^-}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2^-}{\partial y}\right) = p, \qquad \mu_2\left(\frac{\partial\varphi_1^-}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_3^-}{\partial x} + \frac{\partial\psi^-}{\partial x}\right) = 0$$

$$\mu_1\left(\frac{\partial\varphi_2^+}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_3^+}{\partial y} + \frac{\partial\psi^+}{\partial y}\right) = 0, \qquad \mu_2\left(\frac{\partial\varphi_2^-}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_3^-}{\partial y} + \frac{\partial\psi^-}{\partial y}\right) = 0$$

$$(\text{внутри трещины } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} < a) \tag{1.5}$$

$$(\lambda_1 + 2\mu_1)\frac{\partial}{\partial z}(\varphi_3^+ + \psi^+) + \lambda_1\left(\frac{\partial\varphi_1^+}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2^+}{\partial y}\right) =$$

$$= (\lambda_2 + 2\mu_2)\frac{\partial}{\partial z}(\varphi_3^- + \psi^-) + \lambda_2\left(\frac{\partial\varphi_1^-}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2^-}{\partial y}\right)$$

$$\mu_1\left(\frac{\partial\varphi_1^+}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_3^+}{\partial x} + \frac{\partial\psi^+}{\partial x}\right) = \mu_2\left(\frac{\partial\varphi_1^-}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_3^-}{\partial x} + \frac{\partial\psi^-}{\partial x}\right)$$

$$\mu_2\left(\frac{\partial\varphi_2^+}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_3^+}{\partial y} + \frac{\partial\psi^+}{\partial y}\right) = \mu_2\left(\frac{\partial\varphi_2^-}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_3^-}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$

$$\varphi_1^+ = \varphi_1^-, \qquad \varphi_2^+ = \varphi_2^-, \qquad \varphi_3^+ = \varphi_3^- \qquad (\text{вне трещины } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > a) \tag{1.6}$$

Здесь λ_1, μ_1 и λ_2, μ_2 — коэффициенты Ляме соответственно для верхнего и нижнего полупространств. Введем гармонические, соответственно в верхнем и нижнем полупространствах, функции

$$\psi^+ = \frac{1}{4\nu_1 - 3}(\varphi_4^+ + \varphi_3^+), \qquad \psi^- = \frac{1}{4\nu_2 - 3}(\varphi_4^- + \varphi_3^-)$$

$$\left(\nu_k = \frac{\lambda_k}{2(\lambda_k + \mu_k)} \quad (k = 1, 2)\right) \tag{1.7}$$

Из (1.2) и (1.7) следует, что

$$\frac{\partial\varphi_4^+}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_1^+}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2^+}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\varphi_4^-}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_1^-}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2^-}{\partial y} \tag{1.8}$$

Используя (1.2), (1.8), из первого и второго уравнений (1.5) получим

$$\frac{\partial\varphi_3^+}{\partial z} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial\varphi_4^+}{\partial z} = C_1, \qquad \frac{\partial\varphi_3^-}{\partial z} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial\varphi_4^-}{\partial z} = C_2 \tag{1.9}$$

$$\left(A_k = \frac{\lambda_k + 2\mu_k}{\mu_k}, \quad C_k = \frac{\lambda_k + 3\mu_k}{2\mu_k(\lambda_k + 2\mu_k)}p \quad (k = 1, 2)\right)$$

Продифференцируем третье и пятое уравнение из (1.5) соответственно по x и по y и сложим

$$\mu_1\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\varphi_3^+ + \psi^+) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi_1^+}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2^+}{\partial y}\right)\right] = 0 \tag{1.10}$$

Так как функции φ_3 и ψ гармонические, то

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\varphi_3^+ + \psi^+) = -\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\varphi_3^+ + \psi^+) \tag{1.11}$$

Подставляя (1.11) в (1.10) и учитывая (1.7) и (1.8), получим

$$\frac{\partial^2\varphi_3^+}{\partial z^2}+A_1\frac{\partial^2\varphi_4^+}{\partial z^2}=0 \qquad (\rho<a) \tag{1.12}$$

Аналогично из четвертого и шестого уравнений (1.5) находим

$$\frac{\partial^2\varphi_3^-}{\partial z^2}+A_2\frac{\partial^2\varphi_4^-}{\partial z^2}=0 \qquad (\rho<a) \tag{1.13}$$

Используя (1.2) и (1.8), первое уравнение (1.6) запишем в виде

$$B_1\frac{\partial\varphi_3^+}{\partial z}-D_1\frac{\partial\varphi_4^+}{\partial z}=B_2\frac{\partial\varphi_3^-}{\partial z}-D_2\frac{\partial\varphi_4^-}{\partial z} \qquad (\rho>a) \tag{1.14}$$

$$B_k=\frac{\mu_k(\lambda_k+2\mu_k)}{\lambda_k+3\mu_k}, \qquad D_k=\frac{\mu_k^2}{\lambda_k+3\mu_k} \qquad (k=1,\,2) \tag{1.15}$$

Дифференцируя второе и третье уравнения (1.6) по x и по y соответственно, складывая и учитывая (1.7), получим

$$D_1\frac{\partial^2\varphi_3^+}{\partial z^2}-B_1\frac{\partial^2\varphi_4^+}{\partial z^2}=D_2\frac{\partial^2\varphi_3^-}{\partial z^2}-B_2\frac{\partial^2\varphi_4^-}{\partial z^2} \qquad (\rho>a) \tag{1.16}$$

Умножая первое уравнение (1.9) на B_1, второе на B_2, вычитая и учитывая, что $B_1\,/\,A_1=D_1$, $B_2\,/\,A_2=D_2$, $C_1B_1-C_2B_2=0$, получим

$$B_1\frac{\partial\varphi_3^+}{\partial z}-D_1\frac{\partial\varphi_4^+}{\partial z}-B_2\frac{\partial\varphi_3^-}{\partial z}+D_2\frac{\partial\varphi_4^-}{\partial z}=0 \qquad (\rho<a) \tag{1.17}$$

Аналогично из (1.3) и (1.13) находим

$$D_1\frac{\partial^2\varphi_3^+}{\partial z^2}-B_1\frac{\partial^2\varphi_4^+}{\partial z^2}-D_2\frac{\partial^2\varphi_3^-}{\partial z^2}+B_2\frac{\partial^2\varphi_4^-}{\partial z^2}=0 \qquad (\rho<a) \tag{1.18}$$

Проинтегрировав уравнение (1.13), получим $\varphi_3^- - A_2\varphi_4^- = K_2(x,\,y)$, где $K_2(x,\,y)$ — неизвестная гармоническая функция.

В рассматриваемом случае напряженное состояние является осесимметричным, поэтому осесимметричными должны быть функции φ_3^- и φ_4^-. Следовательно, $K_2(x,\,y)=C$ — постоянная, подлежащая определению.

Таким образом, граничные условия для определения φ_3 и φ_4 будут

$$\frac{\partial\varphi_3^-}{\partial z}-\frac{1}{A_2}\frac{\partial\varphi_4^-}{\partial z}=C_2, \qquad \varphi_3^- - A_2\varphi_4^- = C \qquad (\rho<a) \tag{1.19}$$

$$\varphi_3^+=\varphi_3^-, \qquad \frac{\partial\varphi_4^+}{\partial z}=\frac{\partial\varphi_4^-}{\partial z} \qquad (\rho>a) \tag{1.20}$$

$$\left.\begin{aligned} &D_1\frac{\partial^2\varphi_3^+}{\partial z^2}-D_2\frac{\partial^2\varphi_3^-}{\partial z^2}-B_1\frac{\partial^2\varphi_4^+}{\partial z^2}+B_2\frac{\partial^2\varphi_4^-}{\partial z^2}=0\\ &B_1\frac{\partial\varphi_3^+}{\partial z}-B_2\frac{\partial\varphi_3^-}{\partial z}-D_1\frac{\partial\varphi_4^+}{\partial z}+D_2\frac{\partial\varphi_4^-}{\partial z}=0\end{aligned}\right\} \qquad (z=0) \tag{1.21}$$

Введем в рассмотрение функции

$$\varphi_3^*(x,\,y,\,z)=\varphi_3(x,\,y,\,-z), \qquad \varphi_4^*(x,\,y,\,z)=\varphi_4(x,\,y,\,-z)$$

Из соотношений (1.21) находим

$$\begin{aligned}\varphi_3^*&=E\varphi_3^- - H\varphi_4^-\\ \varphi_4^*&=H\varphi_3^- - E\varphi_4^-\end{aligned} \qquad \left(E=\frac{B_1B_2+D_1D_2}{D_1^2-B_1^2},\ H=\frac{B_1D_2+B_2D_1}{D_1^2-B_1^2}\right) \tag{1.22}$$

Теперь граничные условия вне трещины преобразуем к виду

$$\varphi_3^- - A_0\varphi_4^- = 0, \qquad \frac{\partial\varphi_3^-}{\partial z}-\frac{1}{A_0}\frac{\partial\varphi_4^-}{\partial z}=0 \qquad (\rho>a) \qquad \left(A_0=\frac{H}{E-1}\right) \tag{1.23}$$

Введем функции $F_1(x,y,z)$ и $F_2(x,y,z)$ при помощи соотношений

$$F_1 = \varphi_3^- - A_2\varphi_4^-, \qquad F_2 = \varphi_3^- - \frac{1}{A_2}\varphi_4^- \tag{1.24}$$

Из (1.19) и (1.23) получим для этих функций задачу теории потенциала:

$$F_1(x, y, 0) = C, \qquad \left[\frac{\partial F_2(x, y, z)}{\partial z}\right]_{z=0} = C_2 \qquad (\rho < a) \tag{1.25}$$

$$F_1(x,y,0) - AF_2(x,y,0) = 0, \quad \left[\frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial z} - B\frac{\partial F_2(x, y, z)}{\partial z}\right]_{z=0} = 0 \quad (\rho > a)$$

$$\left(A = \frac{A_2 - A_0}{1 - A_0 A_2} A_2, \quad B = \frac{1 - A_0 A_2}{A_2 - A_0} A_2\right)$$

§ 2. Сведение осесимметричной задачи теории потенциала для пространства к вспомогательной плоской задаче теории потенциала. В полупространстве $z < 0$ заданы две гармонические функции $F_1(x, y, z)$ и $F_2(x, y, z)$, удовлетворяющие граничным условиям (1.25).

Функции $F_1(x, y, z)$ и $F_2(x, y, z)$, в силу независимости их от угла φ, обозначим соответственно $F_1(\rho, z)$ и $F_2(\rho, z)$ и представим в виде

$$F_k(\rho, z) = \int_0^\infty f_k(\alpha) J_0(\rho\alpha) e^{\alpha z} d\alpha \qquad (k = 1, 2) \tag{2.1}$$

Дифференцируя (2.1) по z, получим

$$\frac{\partial F_k(\rho, z)}{\partial z} = \int_0^\infty f_k(\alpha)\, \alpha J_0(\rho\alpha) e^{\alpha z} d\alpha \qquad (k = 1, 2) \tag{2.2}$$

где $J_0(\alpha z)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Воспользуемся представлением функций Бесселя в виде контурных интегралов [2]

$$\begin{aligned} J_0(\rho\alpha) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{2^{-s}\Gamma(1/2 - 1/2 s)}{\Gamma(1/2 + 1/2 s)} \rho^{s-1}\alpha^{s-1} ds \\ \alpha J_0(\rho\alpha) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{2^{1-s}\Gamma(1 - 1/2 s)}{\Gamma(1/2 s)} \rho^{s-2}\alpha^{s-1} ds \end{aligned} \tag{2.3}$$

Подставив эти выражения в формулы (2.1) и (2.2), изменив порядок интегрирования в полученных двойных интегралах и обозначив

$$\int_0^\infty f_k(\alpha)\, \alpha^{s-1} e^{\alpha z} d\alpha = \Phi_k(s, z) \qquad (k = 1, 2) \tag{2.4}$$

получим

$$\begin{aligned} F_k(\rho, z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi_k(s, z) \frac{2^{-s}\Gamma(1/2 - 1/2 s)}{\Gamma(1/2 + 1/2 s)} \rho^{s-1} ds \\ \frac{\partial F_k(\rho, z)}{\partial z} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi_k(s, z) \frac{2^{1-s}\Gamma(1 - 1/2 s)}{\Gamma(1/2 s)} \rho^{s-2} ds \end{aligned} \qquad (k = 1, 2) \tag{2.5}$$

Введем функции $U_1(x, z)$ и $U_2(x, z)$, гармонические в полуплоскости $z < 0$, антисимметричные относительно x, при помощи соотношений

$$U_k(x, z) = \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} f_k(\alpha) \sin(\alpha x) e^{\alpha z} d\alpha \qquad (k = 1, 2) \tag{2.6}$$

Дифференцируя (2.6) по z, получим

$$\frac{\partial U_k(x, z)}{\partial z} = \int_0^\infty f_k(\alpha) \sin(\alpha x) e^{\alpha z} d\alpha \tag{2.7}$$

Подставим в (2.6), (2.7) вместо функций $\alpha^{-1}\sin(\alpha x)$, $\sin(\alpha x)$ их представления

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sqrt{\pi}\,\frac{2^{1-s}\Gamma(1/2 - 1/2 s)}{\Gamma(1 + 1/2 s)} x^s \alpha^{s-1} ds \\ \sin(\alpha x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sqrt{\pi}\,\frac{2^{2-s}\Gamma(1 - 1/2 s)}{\Gamma(1/2 + 1/2 s)} x^{s-1} \alpha^{s-1} ds \end{aligned} \tag{2.8}$$

Изменив порядок интегрирования и воспользовавшись (2.4), получим

$$\begin{aligned} U_k(x, z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sqrt{\pi}\,\Phi_k(s, z)\frac{2^{1-s}\Gamma(1/2 - 1/2 s)}{\Gamma(1 + 1/2 s)} x^s ds \\ \frac{\partial U_k(x, z)}{\partial z} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sqrt{\pi}\,\Phi_k(s, z)\frac{2^{2-s}\Gamma(1 - 1/2 s)}{\Gamma(1/2 + 1/2 s)} x^{s-1} ds \end{aligned} \qquad (k = 1, 2) \tag{2.9}$$

Из известной формулы

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1 - x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

легко получить [3]

$$\begin{aligned} \int_0^x \rho^{2\alpha-1}(x^2 - \rho^2)^{\beta-1} d\rho &= \frac{1}{4}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} x^{2\alpha+2\beta-2} \\ \int_x^\infty \rho^{-2\alpha-2\beta+1}(\rho^2 - x^2)^{\beta-1} d\rho &= \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} x^{-2\alpha} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Воспользовавшись формулами (2.10), из (2.5) и (2.9) находим

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \frac{F_k(\rho, z)}{\sqrt{x^2 - \rho^2}}\rho d\rho = \frac{1}{2}\frac{\partial U_k(x, z)}{\partial x}, \quad -\frac{\partial}{\partial x}\int_x^\infty \frac{F_k(\rho, z)}{\sqrt{\rho^2 - x^2}}\rho d\rho = \frac{1}{4}\frac{\partial U_k(x, z)}{\partial z} \tag{2.11}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\rho \frac{\partial U_k(x, z)}{\partial x}\frac{dx}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} = F_k(\rho, z), \quad \frac{1}{2\pi\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\int_0^\rho \frac{\partial U_k(x, z)}{\partial z}\frac{x dx}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} = \frac{\partial F_k(\rho, z)}{\partial z} \tag{2.12}$$

$$-\frac{1}{2\pi\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\int_\rho^\infty \frac{\partial U_k(x, z)}{\partial x}\frac{x dx}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} = \frac{\partial F_k(\rho, z)}{\partial z}, \quad \frac{1}{2\pi}\int_\rho^\infty \frac{\partial U_k(x, z)}{\partial z}\frac{dx}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} = F_k(\rho, z)$$

$$(k = 1, 2) \tag{2.13}$$

На основании формул (2.12), справедливых и при $z = 0$, граничные условия (1.23) приведем к виду

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U_1(x, 0)}{\partial x} = g_1(x), \qquad \left[\frac{\partial U_2(x, z)}{\partial z}\right]_{z=0} = g_2(x) \qquad (|x| < a) \\ &\frac{\partial U_1(x, 0)}{\partial x} - B\frac{\partial U_2(x, 0)}{\partial x} = 0, \qquad \left[\frac{\partial U_1(x, z)}{\partial z} - A\frac{\partial U_2(x, z)}{\partial z}\right]_{z=0} = 0 \qquad (|x| > a) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Здесь

$$g_1(x) = 4\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{C\rho d\rho}{\sqrt{x^2-\rho^2}}, \qquad g_2(x) = 4\int_0^x \frac{C_2\rho d\rho}{\sqrt{x^2-\rho^2}} \qquad (0 < x < a)$$

Таким образом, осесимметричная задача теории потенциала, поставленная в начале этого параграфа, сведена к следующей плоской задаче теории потенциала: найти значения гармонических в полуплоскости $z < 0$ функций $U_1(x, z)$ и $U_2(x, z)$, если заданы граничные условия (2.14).

§ 3. Решение плоской задачи теории потенциала. В дальнейшем, следуя Н. И. Мусхелишвили [4], полуплоскость $z < 0$ обозначим S^-, верхнюю полуплоскость $z > 0$ обозначим S^+. Отрезок $-a < x < a$ оси Ox обозначим L', остальную часть этой оси — L''. Гармонические в полуплоскости $z < 0$ функции $U_1(x, z)$ и $U_2(x, z)$ будем рассматривать как действительные части аналитических функций $\Phi_1(\zeta)$ и $\Phi_2(\zeta)$ $(\zeta = x + iz)$

$$U_k(x, z) = {}^1/_2\Phi_k(\zeta) + {}^1/_2\overline{\Phi_k(\zeta)} \qquad (k = 1, 2) \tag{3.1}$$

Из (3.1) получим

$$\frac{\partial U_k}{\partial x} = \frac{1}{2}\Phi_k'(\zeta) + \frac{1}{2}\overline{\Phi_k'(\zeta)}, \qquad \frac{\partial U_k}{\partial z} = \frac{i}{2}\Phi_k'(\zeta) - \frac{i}{2}\overline{\Phi_k'(\zeta)} \qquad (k = 1, 2) \tag{3.2}$$

Устремляя в формулах (3.2) z к нулю и подставляя полученные значения функций $\partial U_k / \partial x$ и $\partial U_k / \partial z$ в условия (2.14), получим граничные условия для определения функций $\Phi_1(\zeta)$ и $\Phi_2(\zeta)$ в виде

$$\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}\Phi_1'^- + \overline{\Phi_1'}^+ &= 2g_1(x)\\ \Phi_2'^- - \overline{\Phi_2'}^+ &= -2ig_1(x)\end{aligned}\right\} \text{ на } L' \\
&\left.\begin{aligned}\Phi_1'^- + \overline{\Phi_1'}^+ - B\Phi_2'^- - B\overline{\Phi_2'}^+ &= 0\\ \Phi_1'^- - \overline{\Phi_1'}^+ - A\Phi_2'^- + A\overline{\Phi_2'}^+ &= 0\end{aligned}\right\} \text{ на } L''
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Введем функции $\Omega_1(\zeta)$ и $\Omega_2(\zeta)$, аналитические по всей плоскости ζ, за исключением разреза, совпадающего с L', посредством соотношений

$$\begin{aligned}
&\Phi_1'(\zeta) - B\Phi_2'(\zeta) = \Omega_1(\zeta), \qquad \Phi_1'(\zeta) - A\Phi_2'(\zeta) = \Omega_2(\zeta) \text{ в } S^- \\
&\overline{\Phi_1'}(\zeta) - B\overline{\Phi_2'}(\zeta) = -\Omega_1(\zeta), \qquad \overline{\Phi_1'}(\zeta) - A\overline{\Phi_2'}(\zeta) = \Omega_2(\zeta) \text{ в } S^+
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Граничные условия для $\Omega_1(\zeta)$ и $\Omega_2(\zeta)$ на L' будут

$$\begin{aligned}
&\frac{A}{A-B}\Omega_1^- - \frac{B}{A-B}\Omega_2^- - \frac{A}{A-B}\Omega_1^+ - \frac{B}{A-B}\Omega_2^+ = 2g_1(x) \\
&\frac{1}{A-B}\Omega_1^- - \frac{1}{A-B}\Omega_2^- + \frac{1}{A-B}\Omega_1^+ + \frac{1}{A-B}\Omega_2^+ = -2ig_2(x)
\end{aligned} \quad \text{на } L' \tag{3.5}$$

Условия на L'' удовлетворены выбором функций $\Omega_1(\zeta)$ и $\Omega_2(\zeta)$. Уравнения (3.5) приводятся к задачам линейного сопряжения:

$$\left[\Omega_1(x) - \frac{B+\sqrt{AB}}{A+\sqrt{AB}}\Omega_2(x)\right]^- - \frac{A-\sqrt{AB}}{A+\sqrt{AB}}\left[\Omega_1(x) - \frac{B+\sqrt{AB}}{A+\sqrt{AB}}\Omega_2(x)\right]^+ =$$

$$= \frac{2(A-B)}{A+\sqrt{AB}}\left[g_1(x) - i\sqrt{AB}g_2(x)\right]$$

$$\left[\Omega_1(x)-\frac{B-\sqrt{AB}}{A-\sqrt{AB}}\Omega_2(x)\right]^- -\frac{A+\sqrt{AB}}{A-\sqrt{AB}}\left[\Omega_1(x)-\frac{B-\sqrt{AB}}{A-\sqrt{AB}}\Omega_2(x)\right]^+ =$$

$$=\frac{2(A-B)}{A-\sqrt{AB}}\left[g_1(x)+i\sqrt{AB}g_2(x)\right] \tag{3.6}$$

Решая задачи линейного сопряжения (3.6), находим

$$\Omega_1(\zeta)=2(A-B)\left\{\left(2a\gamma C_2 i-\frac{C}{\sqrt{AB}}\right)\left[\left(\frac{\zeta-a}{\zeta+a}\right)^{\gamma}-\left(\frac{\zeta-a}{\zeta+a}\right)^{-\gamma}\right]+\right.$$

$$\left.+C_2 i\zeta\left[\left(\frac{\zeta-a}{\zeta+a}\right)^{\gamma}+\left(\frac{\zeta-a}{\zeta+a}\right)^{-\gamma}\right]-2C_2 i\zeta\right\} \tag{3.7}$$

$$\Omega_2(\zeta)=\frac{2A(A-B)}{\sqrt{AB}}\left\{C_2 i\zeta\left[\left(\frac{\zeta-a}{\zeta+a}\right)^{-\gamma}-\left(\frac{\zeta-a}{\zeta+a}\right)^{\gamma}\right]-\right.$$

$$\left.-\left(2a\gamma C_2 i-\frac{C}{\sqrt{AB}}\right)\left[\left(\frac{\zeta-a}{\zeta+a}\right)^{-\gamma}+\left(\frac{\zeta-a}{\zeta+a}\right)^{\gamma}\right]-\frac{2C}{\sqrt{AB}}\right\} \tag{3.8}$$

$$\left(\gamma=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{A+\sqrt{AB}}{A-\sqrt{AB}}\right)$$

После того как функция $\Omega_1(\zeta)$ и $\Omega_2(\zeta)$ найдены, граничные значения функций $\partial U_k / \partial x$ и $\partial U_k / \partial z$ находятся без труда.

Постоянную C определяем из следующего условия.

Функции $\Omega_1(\zeta)$ и $\Omega_2(\zeta)$, являясь производными от регулярных на бесконечности функций, должны исчезать не менее быстро, чем z^{-1}. Это дает

$$C=\sqrt{AB}a\gamma C_2 i \tag{3.9}$$

§ 4. Определение разрушающего напряжения, нормальных и касательных напряжений вне трещины на плоскости раздела. Наличие в теле круглой трещины радиуса a понижает потенциальную энергию его на величину

$$W=\frac{1}{2}\iint_{\sigma}\rho(w^+-w^-)\,d\sigma \tag{4.1}$$

где w^+, w^- — перемещения на нижней и верхней гранях щели, область интегрирования σ — круг радиуса a.

Кроме того, трещина обладает поверхностной энергией U, равной

$$U=2\pi a^2 T_0 \tag{4.2}$$

где T_0 — удельная поверхностная энергия. По Гриффитсу [5], условие, необходимое для увеличения трещины, заключается в следующем:

$$\frac{\partial}{\partial a}(W-U)=0 \tag{4.3}$$

Из соотношения (4.3) и получаем критерий разрушения.

Перемещения w^+ и w^- на основании (1.4) равны

$$w^+(x,y,0)=\varphi_3^+(x,y,0),\qquad w^-(x,y,0)=\varphi_3^-(x,y,0)$$

Интеграл (4.1) можно записать в виде

$$W=\frac{1}{2}p\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a(\varphi_3^+-\varphi_3^-)\rho d\rho=\pi p\int_0^a(\varphi_3^+-\varphi_3^-)\rho d\rho \tag{4.4}$$

Используя (3.7), (3.8), (3.2), (2.11) и (1.21), находим (4.5)

$$\varphi_3^- = \frac{C_2}{A_2 - 1/A_2}\left(\frac{A_2\sqrt{B(A-B)}}{\pi B}\, i \int_0^\rho \left\{a\gamma\left[\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^\gamma + \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{-\gamma}\right] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left[\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^\gamma - \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{-\gamma}\right] x\right\}\frac{dx}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} + \left(\frac{A_2}{B} - \frac{1}{A_2}\right) a\gamma\sqrt{AB}i\right)$$

$$\varphi_3^+ = \frac{C_2}{A_2 - 1/A_2}\left(\frac{\sqrt{B(A-B)}}{\pi B}(HA_2 - H)\, i \int_0^\rho \left\{a\gamma\left[\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^\gamma + \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{-\gamma}\right] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + x\left[\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^\gamma - \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{-\gamma}\right]\right\}\frac{dx}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} + \left(\frac{A_2 E}{B} - \frac{E}{A_2} - \frac{H}{B} + H\right)\sqrt{AB}a\gamma i\right)$$

Подставляя значения (4.5) в (4.4) и меняя порядок интегрирования, получим

$$W = \frac{\pi\rho C_2 i}{A_2 - 1/A_2}\left\{\left[H - \frac{E-1}{A_2} - \frac{H - A_2(E-1)}{B}\right]\sqrt{AB}\gamma\frac{a^3}{2} + \right.$$

$$+ [A_2(E-1) - H]\frac{\sqrt{B(A-B)}}{\pi B}\int_0^a \left(a\gamma\left[\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^\gamma + \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{-\gamma}\right] + \right.$$

$$\left.\left. + x\left[\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^\gamma - \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{-\gamma}\right]\right)\sqrt{a^2 - x^2}dx\right\} \qquad (4.6)$$

Входящие в (4.6) интегралы вычисляем, пользуясь соотношением [2]

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \qquad (4.7)$$

Имеем

$$\int_0^a \left[\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^\gamma + \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{-\gamma}\right]\sqrt{a^2 - x^2}dx = 4a^2\,\frac{\Gamma(3/2 + \gamma)\,\Gamma(3/2 - \gamma)}{\Gamma(3)}$$

$$\int_0^a x\left[\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^\gamma - \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{-\gamma}\right]\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{4a^3}{\Gamma(4)}\left[\Gamma\left(\frac{5}{2} - \gamma\right)\Gamma\left(\frac{3}{2} + \gamma\right) - \right.$$

$$\left. - \Gamma\left(\frac{5}{2} + \gamma\right)\Gamma\left(\frac{3}{2} - \gamma\right)\right] \qquad (4.8)$$

Вычислим значения Г-функций, пользуясь соотношениями

$$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z), \qquad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi\csc\pi z \qquad (4.9)$$

и подставим значения (4.8) в (4.6). Тогда получаем

$$W = \frac{\pi p C_2}{A_2 - A_2^{-1}}\left\{\frac{1}{2}\left[H - \frac{E-1}{A_2} - \frac{H - A_2(E-1)}{B}\right]\sqrt{AB} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}[H - A_2(E-1)]\frac{\sqrt{B(A-B)}}{B}\left(\gamma^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{\cos\pi\gamma}\right\}a^3\gamma \qquad (4.10)$$

Учитывая, что

$$\cos\pi\gamma = \frac{A}{\sqrt{A^2 - A_2^2}}, \qquad \lambda_k = \frac{E_k\nu_k}{(1+\nu_k)(1-2\nu_k)}, \qquad \mu_k = \frac{E_k}{2(1+\nu_k)} \qquad (k = 1, 2)$$

и подставляя значения постоянных из (1.9), (1.22), (1.23), (1.25), получаем формулу

$$W = -\frac{2\pi p^2}{3}\frac{\vartheta_2 E_1^2 + \vartheta_1 E_2^2 + 2E_1\vartheta_{12}E_2(1+\nu_2)(1+\nu_2)}{E_1E_2[E_1(1+\nu_2)(1-2\nu_2) - E_2(1+\nu_1)(1-2\nu_1)]}(\Theta^2+1)\Theta a^3 \quad (4.11)$$

$$\Theta = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{E_1(1+\nu_2)(3-4\nu_2)+E_2(1+\nu_1)}{E_1(1+\nu_2)+E_2(1+\nu_1)(3-4\nu_1)}$$

$$\vartheta_{12} = (1-2\nu_1)(1-2\nu_2) + 4(1-\nu_1)(1-\nu_2) \quad (4.12)$$

$$\vartheta_k = (1+\nu_k)^2(3-4\nu_k) \quad (k=1,\ 2)$$

Здесь E_1, E_2 — модули Юнга верхнего и нижнего полупространства, ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона.

Подставляя W из (4.11) и U из (4.2) в соотношение (4.3), находим разрушающее напряжение в зависимости от радиуса трещины:

$$p_0 = \left(\frac{2T_0E_1E_2[E_1(1+\nu_2)(1-2\nu_2) - E_2(1+\nu_1)(1-2\nu_1)]}{[\vartheta_2E_1^2+\vartheta_1E_2^2+2\vartheta_{12}E_1E_2(1+\nu_1)(1+\nu_2)](\Theta^2+1)\Theta a}\right)^{1/2} \quad (4.13)$$

Отсюда в случае однородного тела при ($E_1 = E_2 = E$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$) вытекает результат Сака [6]

$$p_0 = \sqrt{\frac{\pi T_0 E}{2(1-\nu^2)a}} \quad (4.14)$$

Саком была обобщена теория разрушения Гриффитса на трехмерной случай. В частном случае, когда одно из полупространств является абсолютно жестким ($E_1 = \infty$), разрушение наступит при

$$p_0 = \left(\frac{2\pi T_0 E}{a(1+\nu_2)(3-4\nu_2)[{}^1/_4\pi^{-2}\ln^2(3-4\nu_2)+1]\ln(3-4\nu_2)}\right)^{1/2} \quad (4.15)$$

Используя (1.3), (1.23), (2.13), (3.7), (3.9) и выполняя некоторые преобразования, получаем формулы для определения нормальных и касательных напряжений вне трещины на плоскости раздела (4.16)

$$\sigma_z = \frac{4p}{\pi}\frac{E_1(1-\nu_2^2)+E_2(1-\nu_1^2)}{E_1(1+\nu_2)(1-2\nu_2)-E_2(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}\int_1^0\left[\left(\frac{2}{t} - \frac{2a^2\Theta^2 t}{\rho^2 - a^2t^2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\sin\left(\Theta\ln\frac{\rho-at}{\rho+at}\right) + \left(\frac{2\rho}{\rho^2-a^2t^2}+\frac{1}{\rho}\right)a\Theta\cos\left(\Theta\ln\frac{\rho-at}{\rho+at}\right)+\frac{a\Theta}{\rho}\right]\frac{dt}{t^2\sqrt{1-t^2}}$$

$$\tau_{\rho z} = \frac{4p}{\pi}\frac{E_2(1-\nu_2^2)+E_2(1-\nu_1^2)}{E_1(1+\nu_2)(1-2\nu_2)-E_2(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}\int_1^0\left[\left(\frac{2a^2\Theta^2 t}{\rho^2-a^2t^2}-\frac{1}{t}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\cos\left(\Theta\ln\frac{\rho-at}{\rho+at}\right)+\frac{2\rho a\Theta}{\rho^2-a^2t^2}\sin\left(\Theta\ln\frac{\rho-at}{\rho+at}\right)+\frac{1}{t}\right]\frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} \quad (4.17)$$

Интегралы в (4.16) и (4.17) приходится определять численно.

Поступила 14 VII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонов М. Я. Основы механики упругого тела. Изд. АН КазССР, 1963.
2. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехтеоретиздат, 1948.
3. Моссаковский В. И. Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1954.
5. Griffith A. A. The phenomen of rupture and flow in solids. Philos. Trans. Roy Soc., 1920, A. 221, p. 163—198.
6. Снеддон И. Преобразование Фурье. Изд. иностр. литер., 1955.