

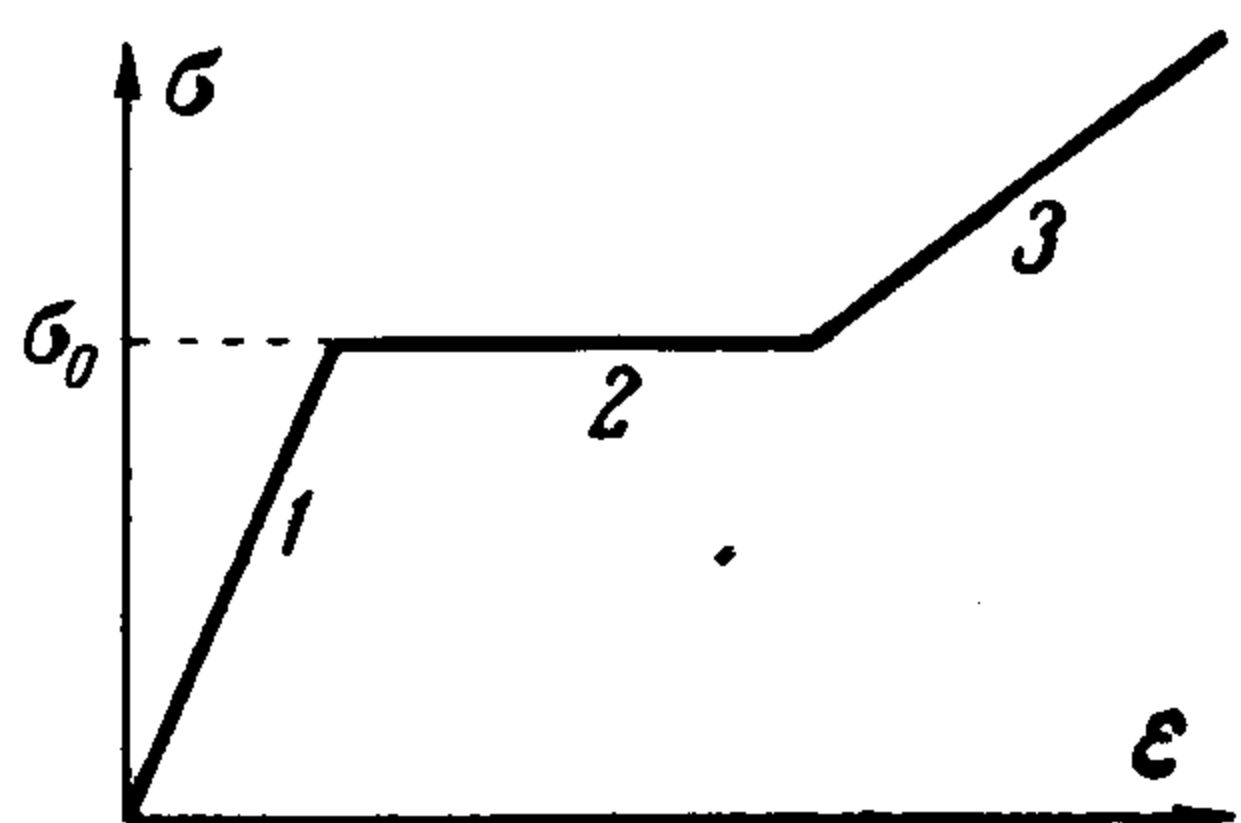
О РАСПРОСТРАНЕНИИ ШЕЙКИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ ПОЛИМЕРНЫХ ОБРАЗЦОВ

Г. И. Баренблатт

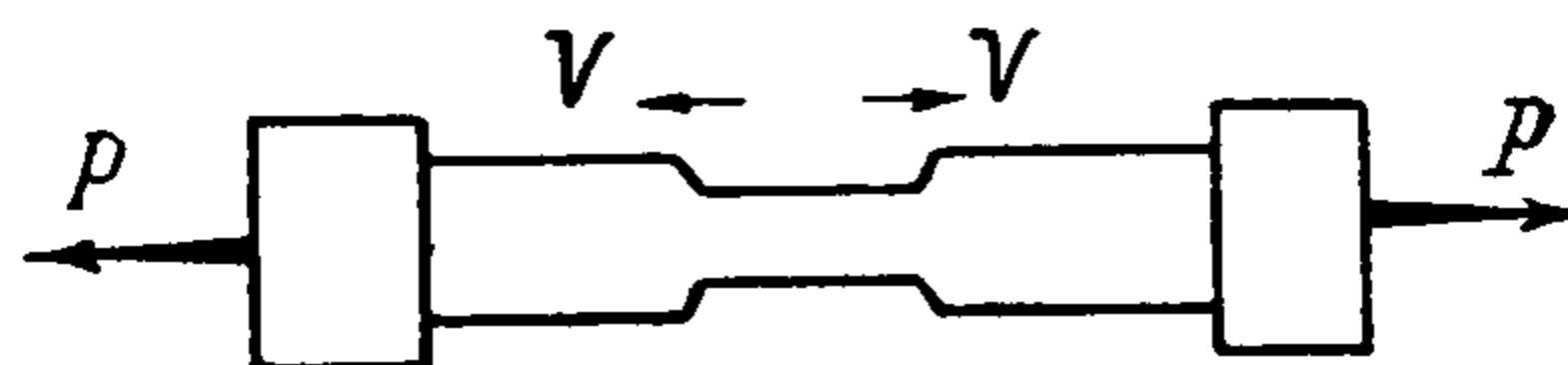
(Москва)

При растяжении в определенных условиях образцов из полимерных материалов как аморфного, так и кристаллического строения наблюдается замечательное явление, заключающееся в следующем. Если испытание, как обычно, ведется при постоянной скорости деформации образца (точнее, при постоянной скорости раздвигания захватов, зажимающих образец в испытательной машине), то вначале растяжение происходит однородно по всему образцу, причем действующее в образце напряжение растет пропорционально деформации (участок 1 на схематическом графике фиг. 1). В некото-

рый момент однородность деформации внезапно нарушается, в образце появляется резкое сужение, так называемая «шейка», которая, однако, в отличие от шейки, образующейся при растяжении обычных металлических образцов, не сужается вплоть до



Фиг. 1



Фиг. 2

разрыва, а сужается только до определенного предела, после чего начинает распространяться вдоль образца, пока не охватывает его целиком. Распространение границы шейки идет с постоянной скоростью и притом так, что эта граница перемещается по образцу как твердое тело, сохраняя свою форму неизменной (фиг. 2). При распространении шейки растягивающее напряжение остается постоянным (участок 2 на фиг. 1). Когда шейка полностью охватывает весь образец, деформация некоторое время снова протекает однородно по всему образцу, причем растягивающее напряжение возрастает с увеличением деформации примерно по линейному закону (участок 3 на фиг. 1). Затем в некотором месте образца снова возникает резкое сужение — «шейка второго порядка», и явление повторяется. При благоприятных условиях удастся наблюдать развитие шеек нескольких порядков. На фиг. 3 представлены фотографии последовательных стадий растяжения образцов из капрона¹ при температуре 100° С. Слева направо последовательно изображены: а) исходный образец; б) образец, в котором возникла шейка первого порядка, охватившая часть образца; в) образец, весь охваченный шейкой первого порядка, в верхней части образца видна шейка второго порядка; г) образец, весь охваченный шейкой второго порядка.

Явление специфического образования и развития шейки при растяжении полимеров, получившее название холодной вытяжки, было впервые обнаружено Карозерсом и Хиллом [1] и затем исследовано рядом авторов, среди которых следует особо отметить Микловица [2, 3], проводившего опыты с нейлоновыми образцами. Принципиаль-

¹ Опыт выполнен сотрудницей отдела пластичности Института механики МГУ В. И. Шоболовой.

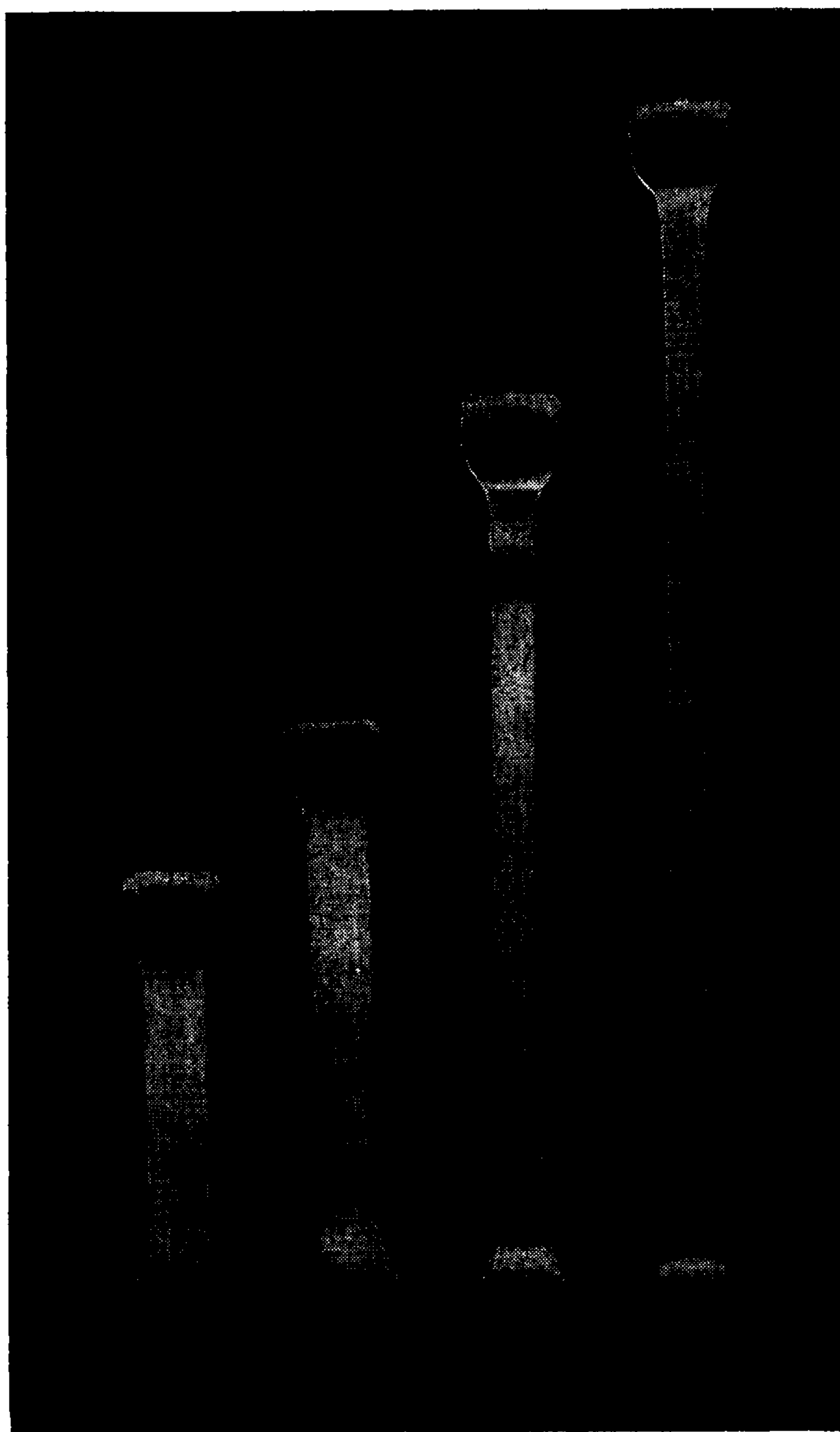
ный вклад в исследование явления был внесен работами В. А. Каргина и Т. И. Соголовой [4, 5], в которых была, в частности, детально изучена связь образования и развития шейки с изменениями надмолекулярной структуры кристаллических полимеров¹. В работах Ю. С. Лазуркина² было проведено экспериментальное и качественное теоретическое исследование образования и развития шейки в аморфных полимерах. Изложенный во всех этих работах обширный экспериментальный материал и качественные представления о явлении используются в предлагаемой работе, содержащей попытку построения теории образования и развития шейки при холодной вытяжке полимерных материалов.

Излагаемая ниже теоретическая схема опирается на широко подтвержденное экспериментами представление о том, что в ходе процесса происходит ориентационное деформирование элементов надмолекулярной структуры материала. Скорость этого процесса ориентационного деформирования предполагается сильно зависящей от действующих в данном месте тела напряжений, так что скорость процесса ориентации вещества в широкой части образца пренебрежимо мала сравнительно со скоростью этого процесса в переходной области шейки; этот факт был убедительно доказан работами А. П. Александрова (см. цитированную выше диссертацию Ю. С. Лазуркина, а также обзор [6]). Наконец, предполагается также, что вследствие разрушения некоторых связей элементов надмолекулярной структуры, возникающего под действием приложенного напряжения, появляется относительная подвижность элементов надмолекулярной структуры, приводящая к своеобразным явлениям переноса вещества, которые происходят только при достаточно больших напряжениях.

Предлагаемая теория распространения шейки оказывается близкой по идее к теории распространения гена, предложенной в работе А. Н. Колмогорова, И. Г. Петровского и Н. С. Пискунова [7], и особенно — к теории нормального распространения пламени, развитой в работах Я. Б. Зельдовича и Д. А. Франк-Каменецкого [8, 9]. По-видимому, это обстоятельство неслучайно и является следствием нетривиальной аналогии указанных явлений: равномерное распространение во всех случаях обусловлено взаимодействием процессов превращения и переноса вещества.

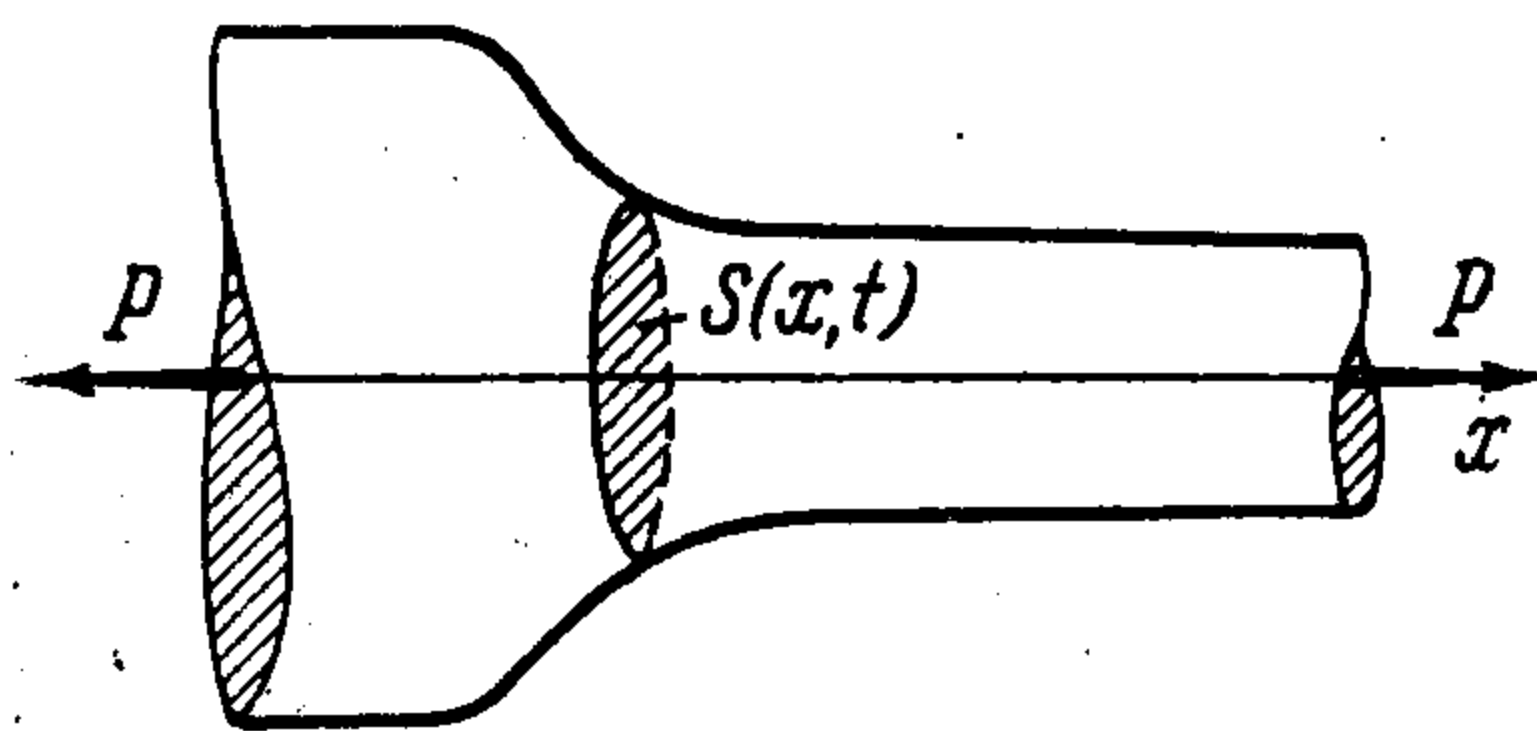
¹ Подробное изложение результатов, относящихся к изменению надмолекулярной структуры полимеров в шейке, можно найти в диссертации Т. И. Соголовой «Исследование больших деформаций аморфных и кристаллических полимеров», Москва, 1963 год.

² Л а з у р к и н Ю. С. Механические свойства полимеров в стеклообразном состоянии. Диссертация, М., Ин-т физпроблем АН СССР, 1954.



Фиг. 3

§ 1. Будем исходить из одномерной схемы процесса: образец считается стержнем переменной площади поперечного сечения; распределение всех величин по сечению стержня предполагается однородным (фиг. 4). Ось x выбирается совпадающей с осью стержня. Стержень растянут в осевом направлении силой $P = \sigma_0 S_0$, где S_0 — площадь сечения образца в момент окончания процесса однородного деформирования, предшествовавшего возникновению шейки. Процесс



Фиг. 4

развития шейки медленный, поэтому его можно считать квазистатическим, так что справедливо уравнение

$$\sigma S = \sigma_0 S_0 = P \quad (1.1)$$

где $\sigma = \sigma(x, t)$ — напряжение, действующее в сечении x в момент t ; $S(x, t)$ — соответствующая площадь сечения.

При всем разнообразии микроскопической картины процесса развития шейки для различных полимеров этот процесс всегда представляет собой переход элементов надмолекулярной структуры полимера¹ в другое состояние, характеризующееся более высокой ориентацией и определенным упрочнением в направлении вытяжки. Вследствие неоднородности и известной неупорядоченности микроструктуры полимера этот переход происходит неодновременно во всех элементах. Поэтому, несмотря на то что плотность и химический состав вещества в обоих состояниях могут быть одинаковыми, можно считать, что деформированный полимер представляет собой двухкомпонентный материал, состоящий из малых элементов превращенного и не превращенного в процессе ориентационного деформирования вещества.

Подчеркнем известную условность разделения частиц вещества на непревращенные и превращенные: на самом деле, все элементы подвергаются той или иной ориентационной деформации. Однако вследствие неоднородности поля микронапряжений они ей подвергаются в очень разной степени. Можно ввести некоторую критическую величину деформации, начиная с которой элемент считается превращенным.

На фиг. 5 показана любезно предоставленная Т. И. Соголовой микрофотография кристаллического полистирола в процессе развития шейки. Направление вытяжки показано на фиг. 5 стрелкой. Как видно, материал на самом деле деформируется весьма неоднородно, так что микрообъемы вещества, близкого к исходному (темные), соседствуют с микрообъемами превращенного вещества (светлые), имеющими ярко выраженную фибриллярную (нитевидную) структуру, вытянутую в направлении действия силы.

Итак, схематизируя, можно считать, что материал состоит из двух компонент, которые условимся называть исходной и ориентированной. Под действием приложенного напряжения происходит превращение пер-

¹ Т. е. структуры с характерным масштабом, намного превосходящим молекулярный. Такая структура имеется как у кристаллических, так и у аморфных полимеров (см. [5, 6, 10], а также цитированную выше (стр. 1049) диссертацию Т. И. Соголовой).

вой компоненты во вторую. Естественно ввести концентрацию ориентированного вещества в данной точке в данный момент времени $n = n(x, t)$, определяемую как отношение объема ориентированного вещества в достаточно малой окрестности данной точки ко всему объему этой окрестности. В соответствии с общим подходом, принятым в механике сплошных сред, такая малая окрестность — «физически бесконечно малый объем» должна содержать все же достаточно много элементов надмолекулярной структуры для того, чтобы допускать надежное осреднение. Отметим, что концентрация ориентированного вещества n является характерным примером дополнительных параметров, определяющих состояние твердого тела, введенных Л. И. Седовым [11] в его общем исследовании моделей сплошных сред.

Площадь сечения $S(x, t)$ однозначно связана с параметром $n(x, t)$. В самом деле, пусть рассматриваемый процесс превращения таков, что в результате полного превращения достигается концентрация n_0 ориентированного вещества, и площадь сечения меняется в α раз. Тогда можно считать изменение площади сечения пропорциональным концентрации ориентированного вещества, так что

$$\frac{S(x, t)}{S_0} = 1 - (1 - \alpha) \frac{n(x, t)}{n_0} \quad (1.2)$$

где S_0 — по-прежнему площадь сечения образца по окончании предшествовавшего образованию и развитию шейки процесса однородного деформирования.

Заметим теперь, что материал может испытывать, вообще говоря, несколько различных превращений, характеризующихся различной степенью ориентации, различным упрочнением превращенного материала и различной степенью превращения. Величина α определяет происходящее превращение и для различных превращений, вообще говоря, различна.

§ 2. Два конечных соотношения (1.1) и (1.2) связывают три величины: S , σ и n . Для получения замкнутой системы уравнений необходимо дополнительно привлечь сведения о кинетике превращения вещества в процессе развития ориентационной деформации.

Рассмотрим некоторый объем материала, находящийся в условиях однородного напряженного состояния и однородной деформации. Ско-



Фиг. 5

рость q происходящего в этом объеме процесса превращения исходного вещества в ориентированное естественно определить как объемное количество ориентированного вещества, возникающее в единице объема материала за единицу времени. Очевидно, что величина q зависит как от степени развития ориентационной деформации в объеме, т. е. от концентрации ориентированного вещества n , так и от напряжения σ

$$q = q(n, \sigma) \quad (2.1)$$

В работах А. П. Александрова сотрудников (подробную библиографию см. в [6.]) получены результаты, показывающие, что функция $q(n, \sigma)$ очень сильно зависит от напряжения σ ; можно предполагать, основываясь на этих работах, что выражение для q имеет форму аррениусовской зависимости

$$q = A \left(1 - \frac{n}{n_0}\right)^p \exp \left[-\frac{U - \gamma\sigma}{kT} \right] \quad (2.2)$$

где U — энергия активации, которую можно в известном приближении считать постоянной, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, p, γ — некоторые постоянные материала, а предэкспоненциальный множитель A может слабо зависеть от σ .

Для приводимого ниже общего исследования конкретный вид зависимости $q(n, \sigma)$ в основном несуществен. Достаточно принять общую гипотезу о том, что величина скорости превращения $q(n, \sigma)$ настолько резко возрастает с увеличением напряжения σ , что в процессе холодной вытяжки скорость превращения вещества в широкой части образца пренебрежимо мала сравнительно со скоростью превращения вещества в переходной зоне шейки.

Заметим, что гипотеза о сильной зависимости скорости развития ориентационной деформации и изменения структуры от напряжения была одним из двух основных предположений, лежащих в основе качественной схемы процесса распространения шейки, предложенной Ю. С. Лазуркиным¹. Здесь не предполагается обсуждение этой схемы в целом; отметим только, что вторая гипотеза Ю. С. Лазуркина и вся дальнейшая схема существенно отличаются от излагаемой ниже. Некоторое необходимое уточнение этой гипотезы будет сделано в дальнейшем.

Перейдем к формулировке второй гипотезы. В процессе развития ориентационной деформации, каков бы ни был деформированный полимер — аморфный или кристаллический, на том или ином уровне масштабов происходит разрушение связей между элементами имеющейся в полимере надмолекулярной структуры.

Как показывает опыт, это разрушение связей доходит даже до появления множественных микротрещин и микроразрывов. Это было определенно доказано Ю. С. Лазуркиным², который провел серию опытов по холодной вытяжке аморфных полимеров в среде различного состава и обнаружил значительное влияние состава среды на развитие шейки. (Состав среды в этих опытах был таким, что она могла влиять на развитие шейки только через силы сцепления на поверхностях микротрещин и микроразрывов, т. е. через изменение плотности поверхностной энергии.)

¹ См. сноску на стр. 1049.

² См. там же.

Разрушение связей увеличивает относительную подвижность элементов надмолекулярной структуры. Наложенное поле напряжений ввиду его микронеоднородности создает возможность относительного перемещения элементов надмолекулярной структуры. Таким образом, в процессе ориентационного деформирования частицы, расположенные в данном сечении, не перемещаются как единое целое вместе с плоскостью сечения, движущегося со средней объемной скоростью; напротив, возникает некоторый перенос вещества [через плоскость сечения. Априори можно представить себе два таких процесса переноса, приводящих к возникновению потока ориентированного вещества через плоскость сечения. Во-первых, это перенос ориентированного вещества в направлении, обратном направлению градиента напряжения; этот процесс естественно назвать тензодиффузией. Во-вторых, это перенос ориентированного вещества в направлении, обратном градиенту его концентрации. Следует подчеркнуть, что хотя этот процесс формально аналогичен диффузии ориентированного вещества, он обуславливается не тепловыми движениями, влияние которых на перенос, по-видимому, пренебрежимо мало, а микронапряжениями. Таким образом, термодинамическими силами, определяющими перенос ориентированного вещества, являются градиент напряжения и градиент концентрации¹.

Соответствующие потоки ориентированного вещества Q_1 и Q_2 записываются в виде

$$Q_1 = -V \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad Q_2 = -D \frac{\partial n}{\partial x} \quad (2.3)$$

разумеется, коэффициенты тензодиффузии V и диффузии D , вообще говоря, должны сильно зависеть от напряжения. В настоящее время не имеется достаточно данных об относительной величине диффузионного и тензодиффузионного потоков ориентированного вещества, поэтому в дальнейшем будут учтены оба потока.

Вторая гипотеза, таким образом, состоит в том, что под действием приложенного поля напряжений возникает тензодиффузионный и диффузионный перенос ориентированного вещества, так что суммарный объемный поток ориентированного вещества Q , т. е. объем ориентированного вещества, проходящий за единицу времени через единицу площади сечения, равен

$$Q = -V(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial x} - D(\sigma) \frac{\partial n}{\partial x} \quad (2.4)$$

Изложенные соображения о возникновении подвижности элементов ориентированного вещества и его переноса качественно подтверждаются результатами недавних экспериментальных исследований В. А. Каргина. Как показывают предварительные оценки, величины коэффициентов диффузии и тензодиффузии весьма малы; однако этих малых величин, по-видимому, достаточно для объяснения наблюдаемого эффекта.

¹ В настоящей работе рассматривается только одномерная схема. При рассмотрении многомерной картины, по-видимому, во все соотношения должно входить максимальное касательное напряжение.

Составляя обычным образом уравнение баланса ориентированного вещества, получаем

$$S \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial Snu}{\partial x} = q(n, \sigma) S + \frac{\partial}{\partial x} S \left[B(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + D(\sigma) \frac{\partial n}{\partial x} \right] \quad (2.5)$$

где $u(x, t)$ — скорость движения в сечении x в момент t . Суммарное уравнение баланса вещества в предположении, что плотность в ходе превращения не меняется, имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Su}{\partial x} = 0 \quad (2.6)$$

Комбинируя уравнения (2.5) и (2.6), получаем

$$S \frac{\partial n}{\partial t} + Su \frac{\partial n}{\partial x} = q(n, \sigma) S + \frac{\partial}{\partial x} S \left[B(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + D(\sigma) \frac{\partial n}{\partial x} \right] \quad (2.7)$$

Таким образом, для описания процесса ориентационного деформирования образца при холодной вытяжке получена замкнутая система из двух дифференциальных уравнений (2.6) и (2.7) и двух конечных соотношений (1.1) и (1.2). Вместе с соответствующими граничными и начальными условиями эта система вполне определяет процесс.

§ 3. Перейдем к рассмотрению равномерного распространения шейки. Еще раз отметим, что, по-видимому, существует глубокая аналогия этого процесса с равномерным распространением гена [7] и нормальным распространением пламени [8,9], проявляющаяся в определенной общности подхода ко всем этим задачам. Равномерное распространение шейки описывается решением полученной системы, инвариантным относительно сдвига по времени и координате. Для того чтобы получить это решение, будем считать образец бесконечным в обе стороны, так что захваты располагаются при $x = \pm \infty$. Для определенности считаем, что граница шейки распространяется справа налево, так что материал вблизи правого захвата ($x \rightarrow \infty$) полностью продеформирован, а вблизи левого захвата ($x \rightarrow -\infty$) ориентационное деформирование не началось. Таким образом, превращение вблизи захватов не происходит, и поток ориентированного вещества отсутствует. Захваты перемещаются один относительно другого с постоянной скоростью, причем это перемещение обеспечивается продвижением границы шейки с постоянной скоростью V . Примем также, что в абсолютной системе левый захват неподвижен, а правый — движется. Перейдем к подвижной координате $\xi = x + Vt$, перемещающейся вместе с границей шейки, тогда распределения всех величин будут стационарными. Уравнения (2.6) и (2.7) станут при этом обыкновенными и примут следующий вид:

$$\frac{dSu}{d\xi} = 0, \quad Su = \text{const} \quad (3.1)$$

$$Su \frac{dn}{d\xi} = q(n, \sigma) S + \frac{d}{d\xi} S \left[B(\sigma) \frac{d\sigma}{d\xi} + D(\sigma) \frac{dn}{d\xi} \right] \quad (3.2)$$

(Обозначение u здесь и в дальнейшем сохраняется для скорости в подвижной системе координат).

Величина константы в (3.1) определяется из условия на левом захвате

$$S = S_0, \quad u = V \quad \text{при } \xi \rightarrow -\infty$$

так что (3.1) принимает вид

$$Su = S_0V \quad (3.3)$$

Скорость v раздвигания захватов определяется следующим образом:

$$v = u(\infty, t) - u(-\infty, t) = \frac{1}{S(\infty, t)} S_0V - V = \beta V \quad \left(\beta = \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \quad (3.4)$$

Исключая в уравнении (3.2) величины n , S и u при помощи соотношений (1.1), (1.2) и (3.3), получаем уравнение для распределения напряжений $\sigma(\xi)$ в виде

$$n_0V \frac{d\sigma}{d\xi} = q(n, \sigma) \sigma(1-\alpha) + \sigma^2(1-\alpha) \frac{d}{d\xi} P(\sigma, \sigma_0) \frac{d\sigma}{d\xi} \quad (3.5)$$

где

$$P(\sigma, \sigma_0) = \frac{1}{\sigma} \left[B(\sigma) + D(\sigma) \frac{\sigma_0^{1/\alpha}}{\sigma^2(1-\alpha)} \right] \quad (3.6)$$

На левом захвате ориентационное деформирование еще не началось, на правом — уже завершилось полностью, поэтому на обоих захватах поток ориентированного вещества равен нулю, так что распределение напряжений $\sigma(\xi)$ должно удовлетворять двум краевым условиям

$$\begin{aligned} \sigma = \sigma_0, \quad \frac{d\sigma}{d\xi} = 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow -\infty \\ \sigma = \frac{\sigma_0}{\alpha}, \quad \frac{d\sigma}{d\xi} = 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (3.7)$$

Уравнение (3.5) не содержит независимой переменной ξ ; полагая $z = P(\sigma, \sigma_0) d\sigma / d\xi$ и принимая σ за независимую переменную, приводим это уравнение к уравнению первого порядка

$$\frac{dz}{d\sigma} = \frac{n_0V}{\sigma^2(1-\alpha)} - \frac{qP}{\sigma z} \quad (3.8)$$

условия (3.7) принимают форму

$$z = 0 \quad \text{при } \sigma = \sigma_0, \quad z = 0 \quad \text{при } \sigma = \sigma_0/\alpha \quad (3.9)$$

Удобнее перейти к другим переменным

$$\tau = \frac{(\sigma - \sigma_0)}{\sigma_0\beta}, \quad u = \frac{\sigma_0 z}{\beta} \quad \left(\beta = \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \quad (3.10)$$

в которых уравнение (3.8) и краевые условия (3.9) принимают вид

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{n_0V}{(1-\alpha)(1+\beta\tau)^2} - \frac{\theta(\tau, \sigma_0)}{u}, \quad \theta = \frac{qP\sigma_0^2}{\beta(1+\beta\tau)} \quad (3.11)$$

$$u = 0 \quad \text{при } \tau = 0, \quad u = 0 \quad \text{при } \tau = 1 \quad (3.12)$$

Легко видеть, что необходимым условием существования решения краевой задачи (3.11) — (3.12) будет

$$\theta(0, \sigma_0) = 0, \quad \theta(1, \sigma_0) = 0 \quad (3.13)$$

Физический смысл этих условий вполне ясен: отсутствие превращения на бесконечности. В самом деле, например, если бы скорость превращения

на бесконечности слева (широкая часть стержня) была конечной, то за достаточное время процесс ориентационного деформирования охватил бы все вещество, так что к моменту подхода шейки все вещество было бы уже ориентированным.

Казалось бы, первое из условий (3.13) противоречит экспоненциальной зависимости (2.2): если принять эту зависимость, то первое условие (3.13) не будет выполнено. Однако на самом деле экспоненциальная зависимость скорости превращения от напряжения приводит к тому, что скорость превращения в широкой части стержня пренебрежимо мала сравнительно со скоростью превращения в переходной области. Поэтому для превращения в широкой части стержня сколько-нибудь существенной части вещества необходимо огромное время, за которое шейка распространится на очень большие расстояния. Для реальных размеров образцов предварительное ориентационное деформирование в широкой части образца пренебрежимо мало и условия (3.13) могут всегда считаться выполненными. (Как известно, аналогичное обстоятельство имеет место и в теории горения [9].)

Заметим теперь, что при произвольных наперед заданных значениях параметров задачи: скорости V и напряжения σ_0 нельзя построить решение уравнения первого порядка (3.11), удовлетворяющее двум краевым условиям (3.12). Однако, если, как это имеет место в обычных опытах по холодной вытяжке, задана скорость раздвигания захватов v или, что то же, скорость распространения шейки $V = 1/\beta)v$, то значение параметра $\sigma_0 = \sigma_0^*$ — «критического напряжения»¹ — играет роль своего рода собственного значения, которое должно быть выбрано так, чтобы искомое решение удовлетворяло обоим граничным условиям (3.12). Такой смысл критического напряжения физически очевиден — при заданной скорости раздвигания захватов шейка появляется (ср. фиг. 1) только при достижении некоторой строго определенной величины напряжения. Естественно, что при некоторых значениях скорости раздвигания захватов значения параметра $\sigma_0 = \sigma_0^*$, при котором существует решение краевой задачи (3.11) — (3.12), может не быть: это означает, что при таких скоростях разрушение происходит без холодной вытяжки образца.

§ 4. Укажем теперь некоторые условия, при которых критическое напряжение σ_0^* существует и единственно. Предположим, что $\theta(\tau, \sigma_0) = 0$ не только при $\tau = 0$, но и на отрезке $0 \leq \tau \leq \tau_0 < 1$, а при $\tau_0 < \tau < 1$ функция $\theta(\tau, \sigma_0)$ — непрерывно дифференцируемая функция обоих аргументов и монотонно неограниченно возрастает с увеличением σ_0 . Как и в теории горения [9,12], первое предположение обеспечивает в определенном смысле устойчивость процесса. В этих предположениях критическое напряжение σ_0^* существует и единственно при любом V . В самом деле, в силу определения (3.11) при $\sigma_0 = 0$ имеем $\theta(\tau, \sigma_0) \equiv 0$; при $\sigma_0 = 0$, решение уравнения (3.11), удовлетворяющее первому условию (3.12), имеет следующий вид:

$$u_0(\tau) = \frac{n_0 V \tau}{(1 - \alpha)(1 + \beta \tau)} \quad (4.1)$$

так что

$$u_0(1) = n_0 V / \beta > 0$$

¹ «Напряжения рекристаллизации» — по принятой в [4,5] терминологии.

Семейство решений уравнения (3.11), удовлетворяющих первому условию (3.12) при $\sigma_0 \geq 0$, имеет вид, представленный на фиг. 6. Все кривые этого семейства располагаются под кривой $u = u_0(\tau)$ и распадаются на два класса. Кривые первого класса пересекают прямую $\tau = 1$ в точке с конечной ординатой, кривые второго класса до прямой $\tau = 1$ не доходят, а пересекают ось абсцисс в точках левее этой прямой, и после пересечения поворачивают налево. Интегральная кривая, разделяющая эти два класса, проходит через особую точку типа седла $u = 0, \tau = 1$ и является единственным искомым решением; соответствующее значение параметра $\sigma_0 = \sigma_0^*$ представляет собой критическое напряжение. Намечим основные этапы доказательства существования и единственности искомого решения краевой задачи и напряжения σ_0^* .

Для доказательства существования заметим прежде всего, что если $\sigma_0'' > \sigma_0'$ и $u(\tau, \sigma_0'') > 0, u(\tau, \sigma_0') > 0$, то

$$u(\tau, \sigma_0') > u(\tau, \sigma_0'') \quad \text{при } \tau_0 < \tau < 1 \quad (4.2)$$

В самом деле, дифференцируя уравнение (3.11) по σ_0 , получаем

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{1}{u^2} \theta(\tau, \sigma_0) v - \frac{1}{u} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_0}, \quad v_* = \frac{\partial u}{\partial \sigma_0} \quad (4.3)$$

Рассматривая это уравнение как линейное уравнение относительно v и используя очевидное условие $v(\tau_0) = 0$, получаем

$$v(\tau) = - \exp\left(\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\theta d\tau}{u^2}\right) \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\left(-\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\theta d\tau}{u^2}\right) \frac{1}{u} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_0} d\tau < 0 \quad (4.4)$$

Отсюда и вытекает доказываемое неравенство (4.2), так как

$$u(\tau, \sigma_0'') - u(\tau, \sigma_0') = \int_{\sigma_0'}^{\sigma_0''} v d\sigma_0 < 0$$

Из неравенства (4.2) и уравнения (3.11), проинтегрированного от нуля до τ непосредственно следует, что при $u \geq 0$

$$u(\tau, \sigma_0) = u_0(\tau) - \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\theta(\tau, \sigma_0) d\tau}{u(\tau, \sigma_0)} < u_0(\tau) - \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\theta(\tau, \sigma_0) d\tau}{u_0(\tau)} \quad (4.5)$$

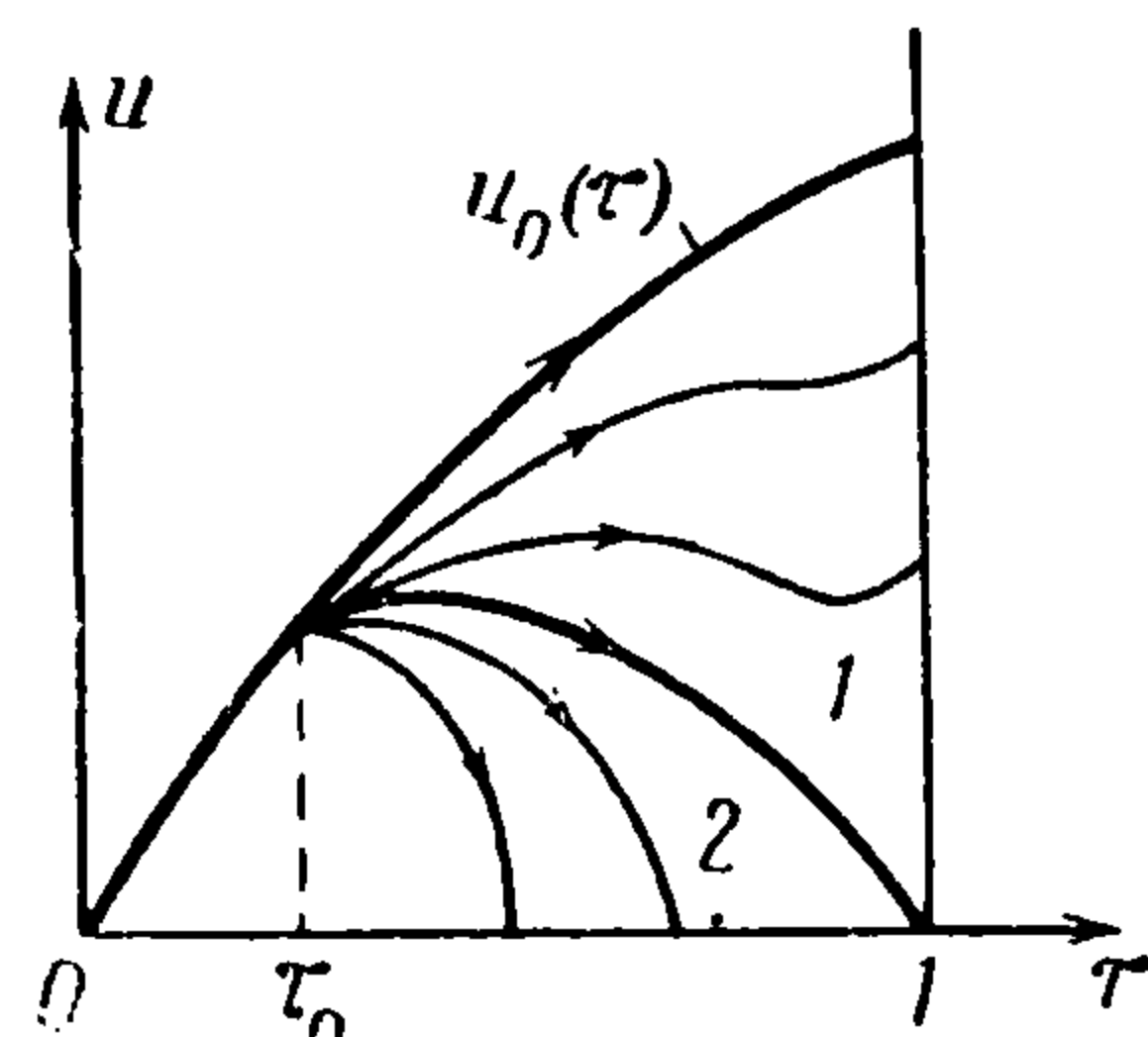
так что для любого $\tau_* = \tau_*$, лежащего в интервале $\tau_0 < \tau_* < 1$, решение уравнения (3.11), удовлетворяющее первому условию (3.12), удовлетворяет неравенству

$$u(\tau_*, \sigma_0) < u_0(\tau_*) - \int_{\tau_0}^{\tau_*} \frac{\theta(\tau, \sigma_0) d\tau}{u_0(\tau)} \quad (4.6)$$

Из неравенства (4.6) в силу ограниченности $u_0(\tau)$ и неограниченного возрастания $\theta(\tau, \sigma_0)$ при увеличении σ_0 следует, что для некоторого $\sigma_0 = \sigma_{01}$ решение $u(\tau, \sigma_0)$ обратится в нуль в точке $\tau = \tau_*$.

Рассмотрим теперь решения $u_1(\tau, \sigma_0)$ уравнения (3.11), удовлетворяющие второму условию (3.12). Точка $u = 0, \tau = 1$ является особой точкой типа седла. Из этой точки выходят две интегральные кривые (сепаратрисы), наклон которых в точке $\tau = 1$ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$k^2 - \frac{n_0 V \alpha^2}{1 - \alpha} k + \theta_{\tau}'(1, \sigma_0) = 0 \quad (4.7)$$



Фиг. 6

Величина $\theta_\tau'(1, \sigma_0) < 0$, поэтому наклон одной из кривых положителен, другой — отрицателен. Выбираем по очевидным соображениям кривую с отрицательным наклоном.

Вследствие непрерывности поля интегральных кривых кривая $u(\tau, \sigma_0)$ при достаточно малых σ_0 сколь угодно близка к $u_0(\tau)$ на всем интервале $\tau_0 \leq \tau \leq 1$. Если выбрать τ_* достаточно близким к единице, то вследствие непрерывности $u_1(\tau, \sigma_0)$ по τ разность $u(\tau, \sigma_0) - u_1(\tau_*, \sigma_0)$ будет при малых σ_0 положительной. При $\sigma_0 = \sigma_{01}$ эта разность будет, очевидно, отрицательной. Из непрерывности этой разности по σ_0 заключаем, что существует такое значение параметра $\sigma_0 = \sigma_0^*$, для которого $u_1(\tau_*, \sigma_0^*) = u(\tau_*, \sigma_0^*)$; это значение параметра σ_0 и будет искомым.

Единственность решения и значения критического напряжения доказывается из тех же соображений. В самом деле, предположим, что существует два решения искомой краевой задачи, соответствующие $\sigma_0 = \sigma_0^*$ и $\sigma_0 = \sigma_0^{**} > \sigma_0^*$. Тогда, вблизи $\tau = \tau_0$ в силу (4.2) $u(\tau, \sigma_0^{**}) < u(\tau, \sigma_0^*)$. Обратиться в нуль при $\tau_0 < \tau < 1$ решение $u(\tau, \sigma_0^{**})$ не может, так как в силу положительности $du/d\tau$ при $u < 0$ такая интегральная кривая непреодолима до точки $u = 0$, $\tau = 1$. Отсюда следует, что на отрезке $0 \leq \tau \leq 1$ $u(\tau, \sigma_0^{**})$ обращается в нуль только при $\tau = 0$ и $\tau = 1$. Тогда из дифференцируемости $u(\tau, \sigma_0^{**})$, неравенства (4.2) и условий (3.12) вытекает существование в интервале $\tau_0 < \tau < 1$ такой точки τ_{**} , что $|du(\tau, \sigma_0^{**})/d\tau| < |du(\tau, \sigma_0^*)/d\tau|$. Однако, это невозможно, так как $u(\tau, \sigma_0)$ удовлетворяет уравнению (3.11), причем $\theta(\tau_{**}, \sigma_0^{**}) > \theta(\tau_{**}, \sigma_0^*)$, а $u(\tau_{**}, \sigma_0^{**}) < u(\tau_{**}, \sigma_0^*)$. Полученное противоречие доказывает единственность.

В общем случае, т. е. при произвольном виде функции $\theta(\tau, \sigma_0)$, значение σ_0^* может быть найдено подбором: решается задача Коши для уравнения (3.11) с начальными данными одного из двух видов:

$$u = \frac{n_0 V \tau_0}{(1 - \alpha)(1 + \beta \tau_0)} \quad \text{при } \tau = \tau_0, \quad \text{или} \quad u = 0 \quad \text{при } \tau = 1$$

при различных σ_0 ; последовательными пробами значение σ_0^* находится с желаемой степенью точности.

Используя соображения, аналогичные развитым в теории горения [8, 9], можно указать простые конечные соотношения для определения σ_0^* в практически интересном случае, когда τ_0 близко к единице. Легко видеть, что

$$u(\tau) < \left(2 \int_{\tau}^1 \theta(\tau, \sigma_0) d\tau \right)^{1/2}$$

$$u(\tau_0) < \left(2 \int_{\tau_0}^1 \theta(\tau, \sigma_0) d\tau \right)^{1/2} = F(\sigma_0) \quad (4.8)$$

где $F(\sigma_0)$ — монотонно-возрастающая функция σ_0 . Таким образом, получается, что σ_{01}^* — оценка снизу для σ_0^* — удовлетворяет соотношению

$$F(\sigma_{01}^*) = \frac{n_0 V \tau_0}{(1 - \alpha)(1 + \beta \tau_0)} \quad (4.9)$$

Вполне аналогично подставляя в правую часть (3.11) верхнюю оценку для $u(\tau)$ из (4.8), получаем

$$u(\tau_0) > \left(\int_{\tau_0}^1 2\theta(\tau, \sigma_0) d\tau \right)^{1/2} - \frac{\alpha(1 - \tau_0)n_0 V}{(1 - \alpha)(1 + \beta \tau_0)} \quad (4.10)$$

отсюда следует, что σ_{02}^* — оценка сверху для σ_0^* — удовлетворяет уравнению

$$F(\sigma_{02}^*) = \frac{\alpha(1-\tau_0)n_0V}{(1-\alpha)(1+\beta\tau_0)} = \frac{n_0V\tau_0}{(1-\alpha)(1+\beta\tau_0)} \quad (4.11)$$

При $\tau_0 \rightarrow 1$ обе оценки совпадают и дают конечное соотношение для определения критического напряжения σ_0^*

$$F(\sigma_0^*) = \frac{n_0V\alpha}{1-\alpha} \quad (4.12)$$

В силу (3.11) имеем

$$F(\sigma_0) = \left(2 \int_{\tau_0}^1 \theta(\tau, \sigma_0) d\tau\right)^{1/2} = \sigma_0 \left(2 \int_{\tau_0}^1 \frac{qP\alpha d\tau}{(1-\alpha)(1+\beta\tau)}\right)^{1/2} \quad (4.13)$$

Если τ_0 близко к единице, это выражение переписывается в виде

$$F(\sigma_0) = \frac{\alpha\sigma_0}{V\sqrt{1-\alpha}} \left(2P\left(\frac{\sigma_0}{\alpha}\right) \int_{\tau_0}^1 q(\tau, \sigma_0) d\tau\right)^{1/2} \quad (4.14)$$

так как только $q(\tau, \sigma_0)$ — быстроменяющаяся вблизи $\tau = 1$ функция.

Если в частности, принять для $q(n, \sigma)$ выражение (2.2), то имеем (считая $(1-\alpha)\gamma\sigma_0/\alpha kT \gg 1$ для того, чтобы функция $q(\tau, \sigma_0)$ была быстроменяющейся вблизи $\tau = 1$) следующие выражения

$$q \approx A\alpha^p \exp\left[-\frac{U}{kT} + \frac{\gamma\sigma_0}{\alpha kT}\right] (1-\tau)^p \exp\left[-\frac{(1-\alpha)\gamma\sigma_0}{\alpha kT} (1-\tau)\right] \\ \int_{\tau_0}^1 q d\tau \approx A\alpha^{2p+1} (1-\alpha)^{-p-1} \exp\left[-\frac{U-\gamma\sigma_0/\alpha}{kT}\right] \left(\frac{kT}{\sigma_0}\right)^{p+1} \Gamma(p+1) \quad (4.15)$$

Соотношение для определения σ_0^* принимает форму

$$V^2\delta = \left[\sigma_0^* B\left(\frac{\sigma_0^*}{\alpha}\right) + D\left(\frac{\sigma_0^*}{\alpha}\right) \frac{n_0\alpha^2}{1-\alpha}\right] \left(\frac{kT}{\gamma\sigma_0^*}\right)^{p+1} \exp\left(\frac{\gamma\sigma_0^*}{\alpha kT}\right) \quad (4.16)$$

где δ определяется уравнением

$$\delta = \frac{n_0^2(1-\alpha)^p \exp(U/kT)}{2A\alpha^{2p+1}\Gamma(p+1)} \quad (4.17)$$

В заключение заметим, что помимо рассмотренной в предыдущем параграфе задачи о равномерном распространении границы шейки представляет значительный интерес другая постановка задачи о развитии ориентационной деформации. Именно, рассмотрим некоторый образец, сечение которого не постоянно, так что на образце имеется сужение определенной формы. Очевидно, что при приложении нагрузки интенсивное развитие ориентационной деформации начнется прежде всего в области вблизи сужения. При этом возникает две возможности. Первая из них состоит в том, что процессы переноса ориентированного вещества окажутся достаточно интенсивными, так что сужение быстро распространяется и, если образец достаточно протяженный, процесс распространения асимптотически выйдет на режим равномерного распространения в обе стороны границы области сужения, рассмотренный выше. Вторая возможность заключается в том, что процессы переноса окажутся недостаточно интенсивными и сужение будет усиливаться, пока в этом месте не будет достигнут предел прочности и

не произойдет разрыва образца. Непосредственно очевидно, что при заданных коэффициентах переноса осуществление той или иной возможности зависит от формы сужения т. е. от вида функции, определяющей распределение начальных сечений образца по его длине. Таким образом, возникает задача определить, для каких форм сужения происходит выход на режим стационарного распространения, а для каких — разрыв образца. Отметим, что постановка этой задачи близка по идее к задаче о выходе химической реакции на режим, рассмотренной Я. Б. Зельдовичем и И. М. Гельфандом [12], ее решение позволит указать условия перехода от холодной вытяжки к разрушению.

Использование решений задач о равномерном распространении границы шейки и других задач о развитии ориентационного деформирования должно представить интерес не только для расчета критических напряжений и других характерных параметров процесса, но и наоборот для анализа закономерностей кинетики ориентационного деформирования по результатам измерений критического напряжения при разных скоростях и температурах.

Автор благодарит В. А. Каргина, С. А. Христиановича, Г. Л. Слонимского, Т. И. Соголову, Р. Л. Салганика, В. А. Городцова за внимание к его работе и ценное обсуждение.

Поступила 15 VIII 1964

НИИ Механики Московского университета

ЛИТЕРАТУРА

1. Carothers W. H., Hill J. W. Studies of polymerization and ring formation. XV. Artificial fibers from synthetic linear condensation superpolymers. J. Amer. Chem. Soc., 1932, vol. 54, No. 4.
2. Miklowitz J. The initiation and propagation of the plastic zone along a tension specimen of nylon. J. Coll. Sci., 1947, vol. 2, p. 193.
3. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Изд. иностр. лит., М., 1954.
4. Каргин В. А. и Соголова Т. И. Исследование механических свойств кристаллических полимеров. Ж. физ. химии, 1953, т. 27, № 7—9.
5. Каргин В. А. и Слонимский Г. Л. Очерки по физико-химии полимеров. Изд. МГУ, М., 1960.
6. Бессонов М. И. Механическое разрушение твердых полимеров. Успехи физ. наук, 1964, т. 83, № 1.
7. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме. Бюлл. МГУ, 1937, т. 1. вып. 6.
8. Зельдович Я. Б. и Франк-Каменецкий Д. А. Теория теплового распространения пламени. Ж. физ. химии, 1938, т. 12, № 1.
9. Зельдович Я. Б. К теории распространения пламени. Ж. физ. химии, 1948, т. 22, № 1.
10. Слонимский Г. Л., Коршак В. В., Виноградова С. В., Аскадский А. А., Китайгородский А. И., Салазкин С. Н., Белавцева Е. М. Физико-химические пути регулирования надмолекулярных структур и механических свойств аморфного полиарилата Ф-1. Докл. АН СССР, 1964, т. 156, № 4.
11. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. Физматгиз, М., 1962.
12. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. Успехи матем. наук, 1959, т. 14, № 2 (86).