Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ПОЛЗУЧЕСТИ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Ю. Н. Работнов

(Новосибирск)

В работе [1] были получены приближенные уравнения, описывающие упруго-пластические деформации некоторых классов оболочек. В основу анализа была положена двуслойная модель, заменяющая реальную оболочку, дальнейшие упрощения вытекали из частных свойств напряженного и деформированного состояния в некоторых случаях. Для осесимметричной деформации цилиндрической оболочки уравнения оказываются точными в рамках основных допущений теории оболочек и применительно к выбранной модели. В упомянутой работе было отмечено, что те же уравнения пригодны для описания установившейся ползучести оболочек. При этом на введение двуслойной модели нужно смотреть как на один из приемов аппроксимации истинной зависимости скоростей деформации и скоростей изменения кривизны от усилий и моментов. Как известно, для оболочек получение этих зависимостей в явном виде практически невозможно. Здесь предлагается дальнейшее развитие теории, изложенной в [1], применительно к задаче о ползучести цилиндрической круговой оболочки, закрепленной и нагруженной осесимметричным образом. Уравнения ползучести оболочки выводятся с учетом осевой силы, формулируется вариационный принцип, позволяющий эффективным образом строить приближенные решения.

1. Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку с радиусом средней поверхности a. Ось x направим по образующей, все величины, относящиеся к этому направлению, будем обозначать индексом 1, величины, относящиеся к перпендикулярному направлению,— индексом 2. Скорости деформации срединной поверхности будут ε_1 и ε_2, скорость изменения кривизны образующей обозначим $\varkappa_1$, скорость изменения кривизны в окружном направлении будет $\varkappa_2 = 0$. Реальная оболочка толщины $2H$ заменяется модельной оболочкой, состоящей из двух слоев, толщиной δ каждый, расстояние между серединами слоев равно $2h$. Будем предполагать, что скорости деформации по толщине каждого слоя не меняются, следовательно, напряжения распределены равномерно. Величины, относящиеся к наружному слою, будем отмечать значком (+), к внутреннему — значком (—). Вследствие гипотезы прямых нормалей скорости деформации слоев выражаются следующим образом:

$$\varepsilon_1^+ = \varepsilon_1 + \varkappa_1 h, \qquad \varepsilon_1^- = \varepsilon_1 - \varkappa_1 h, \qquad \varepsilon_2^+ = \varepsilon_2^- = \varepsilon_2$$

При установившейся ползучести напряжения определяются через скорости деформации по формулам

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1^+ &= \frac{4}{3}\frac{\sigma_0^+}{\varepsilon_0^+}\left[\varepsilon_1 + \varkappa_1 h + \frac{1}{2}\varepsilon_2\right], \qquad & \sigma_1^- &= \frac{4}{3}\frac{\sigma_0^-}{\varepsilon_0^-}\left[\varepsilon_1 - \varkappa_1 h + \frac{1}{2}\varepsilon_2\right] \\ \sigma_2^+ &= \frac{4}{3}\frac{\sigma_0^+}{\varepsilon_0^+}\left[\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varkappa_1 h\right], \qquad & \sigma_2^- &= \frac{4}{3}\frac{\sigma_0^-}{\varepsilon_0^-}\left[\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\varkappa_1 h\right] \end{aligned}\right\} \quad (1.1)$$

Здесь σ_0 и ε_0 — интенсивности напряжений и скоростей деформации, соответственно, зависимость между ними устанавливается законом ползучести, определенным из опыта на ползучесть при растяжении образца

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_* v\,(\sigma_0 / \sigma_*)$$

В этой формуле ε_* и σ_* — константы, имеющие размерности скорости деформации и напряжения соответственно. Обозначим через M_1, M_2 изгибающие моменты, а через T_1 и T_2 — усилия. Очевидно, что

$$M_1 = \delta h\,(\sigma_1^+ - \sigma_1^-), \qquad T_1 = \delta\,(\sigma_1^+ + \sigma_1^-), \qquad T_2 = \delta\,(\sigma_2^+ + \sigma_2^-) \tag{1.2}$$

Из (1.1) и двух первых соотношений (1.2) следует

$$\varepsilon_1 \pm \varkappa_1 h = \frac{3}{8\delta h}\frac{\varepsilon_0^\pm}{\sigma_0^\pm}(M_1 \pm hT_1) - \frac{1}{2}\varepsilon_2 \tag{1.3}$$

Введем следующие безразмерные величины

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{M_1}{\delta h\sigma_*} = m, \qquad \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{T_1}{\delta\sigma_*} = \tau, \qquad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_*} = u, \qquad \frac{\varepsilon_0\sigma_*}{\sigma_0\varepsilon_*} = \omega \tag{1.4}$$

(в работе [1] через ω была обозначена обратная величина).

Теперь соотношение (1.3) можно переписать следующим образом:

$$(\varepsilon_1 \pm \varkappa_1 h)/\varepsilon_* = {}^1\!/_2 \sqrt{3}\,(m \pm \tau)\,\omega^\pm - {}^1\!/_2 u \tag{1.5}$$

Для интенсивностей скоростей деформации в слоях имеем:

$$(\varepsilon_0^\pm)^2 = {}^4\!/_3\,[\varepsilon_2^2 + (\varepsilon_1 \pm \varkappa_1 h)^2 + \varepsilon_2\,(\varepsilon_1 \pm \varkappa_1 h)]$$

Учитывая (1.5) и (1.4), получим

$$(v^\pm)^2 = u^2 + (m \pm \tau)^2\,(\omega^\pm)^2 \tag{1.6}$$

По определению, ω может рассматриваться как функция $v = \varepsilon_0 / \varepsilon_*$, а следовательно, и v есть известная функция ω, таким образом, (1.6) определяет ω^+ и ω^- в зависимости от u, m и τ. Для усилия T_2 и скорости изменения $\varkappa_1$ при помощи (1.1), (1.2) и (1.5) получим (1.7)

$$T_2 = \delta\sigma_*\left[u\left(\frac{1}{\omega^+} + \frac{1}{\omega^-}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\tau\right], \qquad \varkappa_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\varepsilon_*}{h}\,[(m+\tau)\,\omega^+ + (m-\tau)\,\omega^-]$$

Формулы (1.6) и (1.7) выражают все параметры, фигурирующие в уравнениях цилиндрической оболочки, через величины m, u и τ. Параметры модельной оболочки δ и h выбираются в зависимости от толщины реальной оболочки и закона ползучести. Потребуем, чтобы поведение реальной оболочки и двуслойной модели было одинаковым в безмоментном состоянии и в чисто изгибном состоянии. Из этих условий следует

$$\delta = H, \qquad \delta hs\,(\varkappa h) = \int_0^H s\,(\varkappa z)\,z dz \tag{1.8}$$

Здесь s — функция, дающая зависимость напряжения от скорости ползучести при растяжении $\sigma = \sigma_* s\,(\varepsilon / \varepsilon_*)$.

Определение величины h, вообще говоря, зависит от $\varkappa$, только при степенном законе ползучести из (1.8) следует

$$h = \left(\frac{n}{1+2n}\right)^{n/(n+1)} H$$

Таким образом, применение двуслойной модели наиболее оправдано при степенном законе.

Следует заметить, что все авторы, рассматривавшие ползучесть оболочек, были вынуждены пользоваться теми или иными приближенными зависимостями скоростей деформации и изменения кривизны от усилий и моментов [2-4], так как точные зависимости выписать не удается. Введение двуслойной модели описанным способом является одним из приемов аппроксимации упомянутых соотношений.

2. Уравнения равновесия для симметрично загруженной круговой цилиндрической оболочки будут следующие:

$$\frac{dT_1}{dx} = 0, \qquad \frac{dQ}{dx} + \frac{T_2}{a} + q = 0, \qquad \frac{dM_1}{dx} + Q = 0 \tag{2.1}$$

Здесь q — нормальная нагрузка, Q — перерезывающая сила. Из второго и третьего уравнений (2.1) следует

$$d^2M_1 \,/\, dx^2 - a^{-1}T_2 - q = 0 \tag{2.2}$$

Деформация в окружном направлении и скорость изменения кривизны образующей связаны следующим уравнением совместности:

$$d^2\varepsilon_2 \,/\, dx^2 + a^{-1}\varkappa_1 = 0 \tag{2.3}$$

Введем безразмерную координату

$$\xi = x \,/\, b, \qquad b = (^{16}/_3)^{1/4}\sqrt{ah}$$

и перейдем в уравнениях (2.2) и (2.3) к переменным m и u, используя (1.4) и (1.7). В результате получим систему уравнений

$$m'' - u\left(\frac{1}{\omega^+} + \frac{1}{\omega^-}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\tau + 2p = 0 \qquad \left(p = -\frac{qa}{2\delta\sigma^\alpha{}_*}\right) \tag{2.4}$$

$$u'' + (m + \tau)\,\omega^+ + (m - \tau)\,\omega^- = 0 \tag{2.5}$$

Здесь $\tau = \mathrm{const}$ вследствие первого из уравнений (2.1), штрихи обозначают дифференцирование по ξ. Величины ω^+ и ω^- находятся из уравнения (1.6), которое для степенного закона ползучести $\varepsilon \,/\, \varepsilon_* = (\sigma \,/\, \sigma_*)^n$ принимает вид

$$(\omega\pm)^{2n/(n-1)} = u^2 + (m \pm \tau)^2\,(\omega\pm)^2 \tag{2.6}$$

Пусть безразмерная длина оболочки есть l. Рассмотрим функционал

$$N = \int_0^l \Big[\, u'm' + \frac{1}{2}\psi(\omega^+) + \frac{1}{2}\psi(\omega^-) - (m+\tau)^2\,\omega^+ - (m-\tau)^2\omega^- +$$

$$+ 2\left(\frac{\tau}{\sqrt{3}} - p\right) u \Big]\, d\xi \qquad \left(\psi(\omega) = \int \frac{dv^2}{\omega} = \frac{2}{\varepsilon_*\sigma_*}\int \sigma_0 d\varepsilon_0\right) \tag{2.7}$$

Нетрудно проверить, что уравнения (2.4) и (2.5) будут уравнениями Эйлера для этого функционала при естественных граничных условиях, вытекающих из равенства

$$(u'\delta m + m'\delta u)\,|_0^l = 0 \tag{2.8}$$

При степенном законе ползучести функционал (2.7) записывается также в следующей, несколько более удобной форме

$$N = \int_0^l \Big\{ u'm' + \frac{n}{n+1}\, u^2 \left(\frac{1}{\omega^+} + \frac{1}{\omega^-}\right) - \frac{1}{n+1} \times$$

$$\times\ [(m + \tau)^2\,\omega^+ + (m - \tau)^2\,\omega^-] + 2\left(\frac{\tau}{\sqrt{3}} - p\right) u \Big\}\, d\xi \tag{2.9}$$

3. При отсутствии осевой силы $\omega^+ = \omega^-$ уравнения (2.4) и (2.5) заменяются на

$$m'' - \frac{2u}{\omega} + 2p = 0, \qquad u'' + 2m\omega = 0 \tag{3.1}$$

а соотношение (1.6) — на

$$v^2(\omega) = u^2 + m^2\omega^2 \tag{3.2}$$

и функционал (2.7) принимает вид

$$N = \int_0^l [u'm' + \psi(\omega) - 2m^2\omega - 2pu]\, d\xi \tag{3.3}$$

При варьировании этого функционала функции $u(\xi)$ и $m(\xi)$ считаются независимыми. Однако можно считать, что либо первое, либо второе из уравнений (3.1) выполнено, тогда независимым образом задается только одна из функций, вторая же выражается через нее. Функционал (3.3) превращается при этом либо в функционал типа Лагранжа, либо в функционал типа Кастильяно.

Предположим, например, что выполнено второе уравнение (3.1). Это значит, что задана подлежащая варьированию функция $u(\xi)$, тогда как функция $m(\xi)$ выражается через $u(\xi)$. Проинтегрируем по частям первый член под интегралом в выражении (3.3); учитывая второе уравнение (3.1), получим

$$N = 2\int_0^l ({}^1/{}_2\psi - pu)\, d\xi + mu' \,|_0^l \tag{3.4}$$

Функция ${}^1/{}_2\psi(\omega)$, согласно (2.8), представляет собою безразмерный потенциал ползучести, представляющий аналог упругого потенциала в соответствующей задаче нелинейной теории упругости; интеграл от $pud\xi$ дает работу внешних сил, следовательно, функционал N переходит в функционал Лагранжа. Вариационное уравнение с учетом (2.9) будет следующим:

$$2\delta\int_0^l ({}^1/{}_2\psi - pu)\, d\xi = (m'\delta u - m\delta u')\,|_0^l \tag{3.5}$$

Правая часть представляет собою работу внешних сил, приложенных к торцам оболочки. Функция ψ определена в зависимости от ω, но вследствие (3.2) величина ω есть функция от $u^2 + m^2\omega^2 = u^2 + \frac{1}{4}u''^2$.

Предположим теперь, что выполнено первое уравнение (3.1). Поступая точно таким же способом, преобразуем функционал (3.3) к виду

$$N = \int_0^l \left(\psi - \frac{2v^2}{\omega}\right) d\xi + um' \,|_0^l$$

Стоящее под интегралом выражение

$$\psi - \frac{2v^2}{\omega} = \frac{2}{\varepsilon_*\sigma_*}\left[\int \sigma_0 d\varepsilon_0 - \sigma_0\varepsilon_0\right] = -\frac{2}{\varepsilon_*\sigma_*}\int \varepsilon_0 d\sigma_0$$

будет аналогом дополнительной работы для нелинейно-упругого тела; поэтому функционал N превращается в функционал Кастильяно

$$N = -2\Phi + um' \,|_0^l$$

Вариационное уравнение с учетом (2.9) будет следующее:

$$2\delta\Phi = (u\delta m' - u'\delta m)_0{}^l \tag{3.6}$$

Аргументом функции $\psi - 2\,v^2 / \omega$ теперь будет выражение

$$m^2 + {}^1/_4\,(m'' + 2p)_2$$

Совершенно аналогичные результаты получаются и тогда, когда продольная сила отлична от нуля, только в этом случае не удается написать явное выражение функционала Лагранжа через $u\,(\xi)$ и функционала Кастильяно — через $m\,(\xi)$.

4. Применение сформулированного смешанного вариационного принципа, который допускает независимое задание аппроксимирующих функций для $u\,(\xi)$ и для $m\,(\xi)$, имеет некоторые преимущества. Во всяком случае, вводя два подлежащих определению параметра, можно рассчитывать на бóльшую точность, чем при использовании обычных вариационных принципов, когда в большинстве случаев вводится только один параметр. Заметим, кстати, что условие $\delta N = 0$ в зависимости от выбора функций сравнения может означать как максимум, так и минимум функционала N.

Для иллюстрации рассмотрим задачу о краевом эффекте в бесконечно длинной цилиндрической оболочке, нагруженной равномерно распределенным давлением. Будем сначала считать продольную силу отсутствующей, случай $\tau \neq 0$ рассматривается совершенно аналогичным способом. Примем степенной закон ползучести, поместим начало координат на торце оболочки и будем решать задачу для двух случаев: (a) край свободно оперт, $u\,(0) = m\,(0) = 0$ и ($б$) край защемлен, $u\,(0) = u'\,(0) = 0$.

На достаточно большом расстоянии от закрепленного торца оболочка находится в безмоментном состоянии, следовательно, $m\,(\infty) = 0$, $u\,(\infty) = u^*$, $\omega\,(\infty) = \omega^*$, из второго уравнения (3.1) и соотношения (3.2) следует

$$u^* = p^n, \qquad \omega^* = p^{n-1} = u^{*\,\frac{n-1}{n}}$$

Введем функции $U\,(\xi)$ и $V\,(\xi)$, удовлетворяющие системе линейных уравнений

$$U'' + 2\mu V = 0, \qquad V'' - 2\lambda\,(U - u^*) = 0 \tag{4.1}$$

и граничным условиям

$U\,(0) = 0,\ \ V\,(0) = 0$ в случае (a); $\qquad U\,(0) = 0,\ \ U'\,(0) = 0$ в случае ($б$)

Решение уравнений (4.1) представим в следующем виде:

$$U = u^* U_0\,(\alpha\xi), \qquad V = \beta u^{*\,\frac{1}{n}}\, V_0\,(\alpha\xi) \left(\alpha^4 = \lambda\mu,\ \beta = u^{*\,\frac{n-1}{n}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{1/2}\right) \tag{4.2}$$

Функции U_0 и V_0 определяются выражениями

$$U_0\,(x) = 1 - e^{-x}\cos x, \qquad V_0(x) = e^{-x}\sin x \qquad \text{(случай } (a)) \tag{4.3}$$

$$U_0\,(x) = 1 - e^{-x}\,(\cos x + \sin x), \qquad V_0\,(x) = e^{-x}\,(\cos x - \sin x) \qquad \text{(случай } (б))$$

Будем искать приближенное решение рассматриваемой задачи в виде $u = U(\alpha\xi)$, $m = V(\alpha\xi)$, при этом параметры α и β выбираем из условия обращения в нуль вариации функционала N. Положим, кроме того,

$$\omega = \omega^*\omega_0 = u^{*\,\frac{n-1}{n}}\,\omega_0 \tag{4.4}$$

Внесем (4.2) и (4.4) в первое уравнение (3.1), определив в (3.2) функцию v соответствующей степенному закону ползучести. Получим

$$\omega_0^{\frac{2n}{n-1}} = U_0^2 + \beta^2 V_0^2\omega_0^2 \tag{4.5}$$

Для вычисления функционала (3.3) представим его в виде (2.9), положив $\tau = 0$ и $\omega^+ = \omega^-$. Для бесконечной области интеграл получается расходящимся; для обеспечения его сходимости добавим в подынтегральном выражении некоторые постоянные слагаемые. Для вычислений в качестве переменной интегрирования удобно выбрать $x = \alpha\xi$; теперь штрихи будут обозначать дифференцирование по этой переменной. С точностью до постоянного множителя для функционала N получаем: (4.6)

$$N = \alpha\beta\int_0^\infty U_0'V_0'dx + \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty\left[\frac{2n}{n+1}\left(\frac{U_0^2}{\omega_0}-1\right) - \frac{2}{n+1}\beta^2V_0^2\omega_0 - 2\,(U_0-1)\right]xd$$

Очевидно, что при принятом выборе функций сравнения условие (2.9) будет выполнено как в случае (*а*), так и в случае (*б*).

Представим выражение (4.6) следующим образом:

$$N = \alpha\beta A + \frac{1}{\alpha}B\,(\beta)$$

Условия стационарности будут

$$\beta A - \frac{1}{\alpha^2}B\,(\beta) = 0, \qquad \alpha A + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial B}{\partial\beta} = 0$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(\beta B) = 0, \qquad \alpha^2 = \frac{B}{A\beta} \tag{4.7}$$

Для $n = 1$ имеем $\beta = 1$, поэтому следует ожидать, что при $n > 1$ будет $\beta < 1$.

Перейдем теперь к построению приближенных решений для конкретных граничных условий.

Случай а. Величина V_0 оказывается значительно меньшей, чем U_0, величина ω_0 должна быть меньше единицы; $\beta < 1$, поэтому в правой части (4.5) преобладающим будет первый член. Положим

$$\omega_0 = U^{\frac{n-1}{n}}\,(1+\rho) \qquad (\rho \ll 1)$$

Подставляя в (4.5) и удерживая только первую степень ρ, найдем

$$\rho \approx \frac{n-1}{2n}\beta^2V_0^2U_0^{-2/n}$$

С той же степенью точности получаем

$$B\,(\beta) \approx 2J_1 - \beta^2J_2$$

Тогда как $A = -{}^1/_4$. В выражении для $B(\beta)$

$$J_1 = \int\limits_0^\infty \left[\frac{n}{n+1} U^{\frac{n+1}{n}} - U_0 + \frac{1}{1+n}\right] dx, \qquad J_2 = \int\limits_0^\infty V_0^2 U^{\frac{n-1}{n}} dx$$

Теперь из (4.7) следует

$$\beta^2 = \frac{2J_1}{3J_2}, \qquad \alpha^2 = -4\left(\frac{2J_1}{\beta} - J_2\beta\right) \tag{4.8}$$

Приводим значения β и α, вычисленные для $n = 1, \ldots, 6$

n	1	2	3	4	5	6
$\beta =$	1.000	0.840	0.728	0.643	0.598	0.540
$\alpha =$	1.000	0.860	0.763	0.718	0.678	0.646

При больших значениях n приближение, основанное на предположении, что распределение прогибов и моментов то же, что для упругой оболочки, не может считаться надежным. Более того, строгая формулировка задачи об оболочке, нагруженной давлением и опертой на торце, при степенном законе ползучести противоречива. Действительно, $u = 0$, $m = 0$ при $x = 0$, следовательно, $\omega = 0$, и решения уравнений (3.1) в окрестности начала координат не существует.

Причину этого легко понять, если заметить, что при данных граничных условиях невозможно предельное состояние идеальной жестко-пластической оболочки; то обстоятельство, что для степенного закона ползучести диаграмма $\sigma_0\varepsilon_0$ касается оси ε_0, создает и здесь аналогичную ситуацию. Положение можно исправить, слегка видоизменив закон ползучести в области весьма малых напряжений. При пользовании вариационным методом эта трудность не возникает.

Случай 6. Теперь $A = {}^1/_2$, величины U_0 и V_0 имеют в некоторой области одинаковый порядок, и упрощения, встретившиеся при рассмотрении шарнирно опертой оболочки, здесь не имеют места. Представим выражение для $B(\beta)$ в виде

$$B(\beta) = 2J_1 - \frac{2}{n+1}\beta^2 J_2$$

При этом

$$J_1 = \int\limits_0^\infty \left[\frac{n}{n+1}\left(\frac{U_0^2}{\omega_0} - 1\right) - U_0 + 1\right] d\xi, \qquad J_2 = \int\limits_0^\infty V_0^2\omega_0 d\xi$$

Интегралы J_1 и J_2 является функциями от β. Условие (4.7) проводит к следующим зависимостям:

$$J_1 - \beta^2\frac{n+2}{n+1}J_2 = 0, \qquad \alpha = 4\left(\frac{J_1}{\beta} - \frac{\beta}{n+1}J_2\right) \tag{4.9}$$

Вычисления, проведенные для $n = 3$, показали, что $\beta = 1$, при этом $\alpha = 0.716$. То обстоятельство, что величина момента в заделке при $n = 3$ оказывается равной величине момента при $n=1$, а следовательно, такой же как и для упругой оболочки, не должно казаться удивительным. В предельном состоянии идеально пластической оболочки при $p = 1$ величина момента в заделке оказывается равной ${}^1/_2\sqrt{3} = 0.866$, что сравнительно мало отличается от единицы.

Эта же задача решалась в работе [4] при помощи вариационного уравнения Лагранжа. Прогиб задавался в той же форме, что и здесь, упрощение состояло в том, что скорость изменения кривизны считалась зависящей только от изгибающего момента, скорость окружной деформации — только от окружного усилия. При $n = 3$ было получено $\alpha = 0.659$. Распределение изгибающего момента, конечно, оказалось совершенно другим. Аналогичным образом производится расчет и при наличии осевой силы.

Положим для этого

$$\tau = \nu c^{1/n}, \quad u = \gamma c U_0, \quad m = \beta c^{1/n} V_0, \quad \omega^{\pm} = c^{\frac{n-1}{n}} \omega_0^{\pm} \tag{4.10}$$

Здесь U_0 — функция, удовлетворяющая граничным условиям для прогиба и равная единице на бесконечности, V_0 — функция, удовлетворяющая граничным условиям для момента и исчезающая на бесконечности. Можно выбрать эти функции так же, как и при отсутствии осевой силы, тогда они будут зависеть от аргумента $\alpha\xi$, величина α, определяющая быстроту затухания краевого эффекта, является одним из подлежащих варьированию параметров, вторым таким параметром служит β.

Потребуем, чтобы было $\omega_0^{\pm}(\infty) = 1$, тогда из (2.6) следует

$$1 = \gamma^2 + \nu^2$$

Уравнение (2.4) при $\xi = \infty$ дает

$$p = c^{1/n}\left(\gamma + \frac{\nu}{\sqrt{3}}\right) \tag{4.11}$$

Величина τ задана, поэтому все введенные параметры теперь известны, а именно,

$$c^{1/n} = \frac{\tau}{\nu}, \quad \nu = \frac{1}{\Omega}, \quad \gamma = \frac{1}{\Omega}\left(\frac{p}{\tau} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \left(\Omega = \left[1 + \left(\frac{p}{\tau} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]^{1/2}\right) \tag{4.12}$$

Уравнение (2.4) принимает вид

$$(\omega_0^{\pm})^{\frac{2n}{n-1}} = \gamma^2 U_0^2 + (\beta V_0 \pm \nu)^2 (\omega_0^{\pm})^2 \tag{4.13}$$

Величины α и β по-прежнему находятся из условий (4.7), при этом

$$A = \gamma \int_0^\infty U_0' V_0' dx, \qquad B(\beta) = \int_0^\infty \left\{\frac{n}{n+1}\gamma^2\left[U_0^2\left(\frac{1}{\omega_0^+} + \frac{1}{\omega_0^-}\right) - 2\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n+1}\left[(\beta V_0 + \nu)^2 \omega_0^+ + (\beta V_0 - \nu)^2 \omega_0^- - 2\nu^2\right] - 2\gamma^2 (U_0 - 1)\right\} dx \tag{4.14}$$

Расчет сводится к вычислению $B(\beta)$ для некоторых значений β, после чего интерполяцией находится то значение, для которого выполнено первое из условий (4.8). Заметим, что $|\beta| < \gamma$ при $n > 1$.

Поступила 14 VIII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Приближенная техническая теория упруго-пластических оболочек. ПММ, 1951, т. 15, вып. 2.
2. Calladine R. Edge-Load Response of a Thin Cylindrical Shell in Creep Non-Classical Shell Problems, IASS, Symposium, Warsaw, North-Holland Publ. Comp., PWN, Amsterdam, Warszawa, 1964.
3. Розенблюм В. И. Приближенные уравнения ползучести тонкостенных оболочек. ПММ, 1963, т. 17, вып. 1.
4. Bieniek M. P., Freudenthal A. M. Creep Deformation and Stresses in Pressurized Long Cylindrical Shell. J. aerospace. Sci., 1960, vol. 27, No. 10.