Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

К ТЕОРИИ ИЗГИБА АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК

В. В. Понятовский

(Ленинград)

В предлагаемой работе метод статьи [1] применяется для построения теории анизотропных пластинок. Согласно этому методу, напряжения $\sigma_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, 2)$ представляются в виде рядов по полиномам Лежандра $P_k\ (z\ /\ h)$.

При выводе дифференциальных уравнений и граничных условий используются результаты Рейсснера [2,3]. В отличие от других теорий анизотропных пластинок, не использующих гипотез Кирхгоффа [4,5], данная теория позволяет более полно учитывать упругие явления на крае пластинки (краевые эффекты).

Другой метод построения теории изотропных пластинок и пологих оболочек, основанный на разложении в ряды по полиномам Лежандра, развит в работе [6].

1. Рассмотрим пластинку постоянной толщины $2h$. Обозначим через $g_{\alpha\beta}$ метрический тензор срединной плоскости пластинки, отнесенной к криволинейным координатам x^α $(\alpha = 1, 2)$; через z — расстояние произвольной точки пластинки до срединной плоскости $(-h \leqslant z \leqslant h)$; через ∇_α — символ ковариантной производной в метрике, введенной на срединной плоскости. Всюду в дальнейшем греческие индексы тензорного характера принимают значения 1,2. Остальные индексы заключены в круглые скобки, причем их положение вверху или внизу не меняет смысла соответствующего символа.

Предположим, что материал пластинки в каждой точке имеет плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости.

Тензоры деформаций $e_{\alpha\beta}$, $e_{\alpha z}$, e_{zz} и напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\alpha z}$, σ_{zz} связаны соотношениями закона Гука

$$e_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta\pi\rho}\sigma^{\pi\rho} + a_{\alpha\beta}\sigma_{zz}, \qquad e_{\alpha z} = b_{\alpha\beta}\sigma_z{}^{\beta},$$
$$e_{zz} = a_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} + a\sigma_{zz}$$

Здесь $a_{\alpha\beta\pi\rho}$, $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, a — тензоры коэффициентов деформации. В дальнейшем предполагается, что они не зависят от z.

Ниже рассматривается напряженное состояние пластинки, антисимметричное относительно срединной плоскости; аналогичные построения легко могут быть произведены и для симметричного случая.

Представим напряжения $\sigma_{\alpha\beta}$ в виде рядов по полиномам Лежандра

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} P_{2k-1}(\zeta) \qquad (z = h\zeta \quad -1 \leqslant \zeta \leqslant 1) \tag{1.1}$$

Из уравнений равновесия и условий на плоскостях $z = \pm h$

$$\sigma_{\alpha z} = 0, \qquad \sigma_{zz} = \pm {}^1/_2 p \qquad (z = \pm h)$$

следуют выражения для остальных напряжений [1]

$$\sigma_{\alpha z} = h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{2k-2}(\zeta) - P_{2k}(z)}{4k-1} \sigma_\alpha^{(k)}$$

$$\sigma_{zz} = h^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{P_{2k-3}(\zeta)}{(4k-3)(4k-1)} - \frac{2P_{2k-1}(\zeta)}{(4k-3)(4k+1)} + \frac{P_{2k+1}(\zeta)}{(4k-1)(4k+1)} \right] \sigma_{(k)}$$

$$\sigma_{(k)}{}^\alpha = \nabla_\beta \sigma_{(k)}^{\alpha\beta}, \qquad \sigma_{(k)} = \nabla_\alpha \sigma_{(k)}^\alpha; \qquad P_k(\zeta) \equiv 0 \qquad (k<0) \tag{1.2}$$

и уравнение, эквивалентное уравнению равновесия в усилиях:

$$^2/_3 h^2 \nabla_\alpha \sigma_{(1)}^\alpha + p = 0 \tag{1.3}$$

Введем бесконечные матрицы

$$D = \| d_{ik} \|, \quad D' = ID \quad d_{ik} = \frac{\delta_{ik}}{4i-1}, \qquad \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & (i \neq k) \\ 1 & (k = i) \end{cases}$$

$$A = \| a_{ik} \|, \qquad A' = IA, \qquad a_{ik} = -\frac{\delta_{i-1,k}}{(4i-5)(4i-3)(4i-1)} +$$

$$+ \frac{2\delta_{ik}}{(4i-3)(4i-1)(4i+1)} - \frac{\delta_{i,k-1}}{(4i-1)(4i+1)(4i+3)} \qquad (i, k = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$B = \| b_{ik} \|, \qquad b_{1k} = 0, \qquad b_{ik} = \frac{\delta_{i-2,k}}{(4i-9)(4i-7)(4i-5)(4i-3)(4i-1)} -$$

$$- \frac{4\delta_{i-1,k}}{(4i-7)(4i-5)(4i-3)(4i-1)(4i+1)} +$$

$$+ \frac{6\delta_{ik}}{(4i-5)(4i-3)(4i-1)(4i+1)(4i+3)} -$$

$$- \frac{4\delta_{i,k-1}}{(4i-3)(4i-1)(4i+1)(4i+3)(4i+5)} +$$

$$+ \frac{\delta_{i,k-2}}{(4i-1)(4i+1)(4i+3)(4i+5)(4i+7)} \qquad \begin{pmatrix} i = 2, 3, \ldots \\ k = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

Здесь I — бесконечная диагональная матрица, в которой все элементы на главной диагонали равны единице, кроме первого, равного нулю.

Кроме того, в дальнейшем $\sigma_{\alpha\beta}$, σ_α, σ означают векторы

$$\sigma_{\alpha\beta} = (\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}, \sigma_{\alpha\beta}^{(2)}, \ldots), \qquad \sigma_\alpha = (\sigma_\alpha{}^{(1)}, \sigma_\alpha{}^{(2)}, \ldots), \qquad \sigma = (\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \ldots)$$

так что, согласно (1.2), имеем

$$\sigma^\alpha = \nabla_\beta \sigma^{\alpha\beta}, \qquad \sigma = \nabla_\alpha \sigma^\alpha$$

Следуя [1], можно получить уравнения

$$^1/_3 a_{\alpha\beta\pi\rho} \sigma_{(1)}^{\pi\rho} - {}^2/_{15} h^2 [\nabla_\alpha (b_{\pi\beta} \sigma_{(1)}{}^\pi) + \nabla_\beta (b_{\pi\alpha} \sigma_{(1)}{}^\pi)] + {}^1/_{105} h^2 \ [\nabla_\alpha (b_{\pi\beta} \sigma_{(2)}{}^\pi) +$$

$$+ \nabla_\beta (b_{\pi\alpha} \sigma_{(2)}{}^\pi)] + {}^1/_{105} h^2 a_{\alpha\beta} \sigma_{(2)} + {}^1/_3 h \nabla_\alpha \nabla_\beta w = -{}^1/_5 p a_{\alpha\beta} \tag{1.4}$$

$$a_{\alpha\beta\pi\rho} D' \sigma^{\pi\rho} - h^2 A' \ [a_{\alpha\beta} \sigma + \nabla_\alpha \nabla_\beta (a_{\pi\rho} \sigma^{\pi\rho}) +$$

$$+ \nabla_\alpha (b_{\pi\beta} \sigma^\pi) + \nabla_\beta (b_{\pi\alpha} \sigma^\pi)] + h^4 B \nabla_\alpha \nabla_\beta (a\sigma) = 0$$

и однородные геометрические граничные условия

$$\left(\frac{4h^2 b_{\alpha\beta} \sigma_{(1)}{}^\beta}{15} - \frac{2h^2 b_{\alpha\beta} \sigma_{(2)}{}^\beta}{105} \right) n^\alpha - \frac{h}{3} \frac{\partial w}{\partial x^\alpha} n^\alpha = 0 \quad (n^\alpha \sim s^\alpha) \quad w = 0 \tag{1.5}$$

$$2h^2 n^\alpha b_{\alpha\beta} A' \sigma^\beta - h^2 n^\alpha A' \frac{\partial a_{\pi\rho} \sigma^{\pi\rho}}{\partial x^\alpha} + h^4 n^\alpha B \frac{\partial a\sigma}{\partial x^\alpha} = 0 \qquad (n^\alpha \sim s^\alpha)$$

$$h^2 a B \sigma - a_{\alpha\beta} A' \sigma^{\alpha\beta} = 0$$

Соответствующие статические граничные условия имеют вид

$$\sigma_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta = \sigma_{nn}, \qquad \sigma_{\alpha\beta}n^\alpha s^\beta = \sigma_{ns}, \qquad \sigma_\alpha n^\alpha = \sigma_n \tag{1.6}$$

Здесь n^α — контравариантные компоненты вектора единичной внешней нормали к границе срединной плоскости пластинки, s^α — компоненты единичного касательного вектора. Скалярная функция w вводится так же, как и в [1], и имеет смысл характерного прогиба плоскостей $z = \pm h$. Символ $(n^\alpha \sim s^\alpha)$ означает, что имеют место соотношения, которые получаются из приведенных заменой n^α на s^α.

2. Рассмотрим однородную трансверсально изотропную пластинку, плоскость изотропии которой совпадает с срединной плоскостью. Обозначим через E, E_z, ν, ν_z модули Юнга и коэффициенты Пуассона для направлений в плоскости изотропии и направлений, перпендикулярных этой плоскости; G — модуль сдвига для плоскостей, перпендикулярных к плоскости изотропии. Тензоры коэффициентов деформации имеют вид

$$a_{\alpha\beta\pi\rho} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\, g_{\alpha\pi}g_{\beta\rho} - \nu g_{\alpha\beta}g_{\pi\rho}\right]$$

$$a_{\alpha\beta} = -\frac{\nu_z}{E_z}\, g_{\alpha\beta}, \qquad b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2G}\, g_{\alpha\beta}, \qquad a = \frac{1}{E_z} \tag{2.1}$$

Введем функции напряжений $\omega = (\omega_{(1)}, \omega_{(2)}, \ldots)$ и $\Phi = (\Phi_{(1)}, \Phi_{(2)}, \ldots)$. Для этого разложим вектор σ_α на потенциальную и вихревую части, положив

$$\begin{gathered}\sigma_\alpha = t_\alpha + \tau_\alpha, \qquad t_\alpha = \nabla_\alpha\Phi, \qquad \tau_\alpha = \varepsilon_{.\alpha}{}^{\beta}\nabla_\beta\omega \\ t_\alpha = (t_\alpha{}^{(1)}, t_\alpha{}^{(2)}, \ldots), \qquad \tau_\alpha = (\tau_\alpha{}^{(1)}, \tau_\alpha{}^{(2)}, \ldots)\end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь $\varepsilon_{.\alpha}{}^{\beta}$ — смешанная форма дискриминантного тензора

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = 0, \qquad \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \sqrt{g} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

Подставляя (2.1), (2.2) в (1.3) и (1.4), получим уравнения

$$^2/_3 h^2\Delta\Phi_{(1)} + p = 0 \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered}^1/_3\left[(1+\nu)(\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} - \tau_{\alpha\beta}^{(1)}) - \nu g_{\alpha\beta}\sigma_{\pi(1)}^{\pi}\right] + {}^1/_3 Eh\,\nabla_\alpha\nabla_\beta w - \\ - {}^2/_{15}h^2EG^{-1}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi_{(1)} + {}^1/_{105}h^2EG^{-1}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi_{(2)} - \\ - {}^1/_{105}\nu_z h^2EE_z^{-1}g_{\alpha\beta}\Delta\Phi_{(2)} - {}^1/_5\nu_z EE_z^{-1}g_{\alpha\beta}p = 0\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}(1+\nu)\,D'\,(\sigma_{\alpha\beta} - \tau_{\alpha\beta}) - \nu g_{\alpha\beta}D'\sigma_\pi{}^\pi - h^2EG^{-1}A'\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi + \\ + h^2E\nu_z E_z^{-1}A'\,(g_{\alpha\beta}\Delta\Phi + \nabla_\alpha\nabla_\beta\sigma_\pi{}^\pi) + Eh^4E_z^{-1}B\nabla_\alpha\nabla_\beta\Delta\Phi = 0 \\ (\Delta = g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta)\end{gathered}$$

где через $\tau_{\alpha\beta} = (\tau_{\alpha\beta}^{(1)}, \tau_{\alpha\beta}^{(2)}, \ldots)$ обозначен тензор

$$D\tau_{\alpha\beta} = \frac{h^2E}{2(1+\nu)G}\nabla_\pi\left(\varepsilon_{.\beta}^{\pi}\nabla_\alpha A\omega + \varepsilon_{.\alpha}^{\pi}\nabla_\beta A\omega\right) \tag{2.5}$$

Потребуем, чтобы тензор (2.5) удовлетворял соотношению

$$\nabla_\beta\tau^{\alpha\beta} = \tau^\alpha = \varepsilon^{\beta\alpha}\nabla_\beta\omega$$

Тогда для определения ω получим

$$\left(D - \frac{Eh^2\Delta}{2(1+\nu)G}A\right)\omega = 0 \tag{2.6}$$

Положим теперь $\sigma_{\alpha\beta} - \tau_{\alpha\beta} = t_{\alpha\beta}$. Из (2.5), (2.2) имеем

$$\sigma_\alpha{}^\alpha = t_{\alpha\alpha}, \qquad \nabla_\beta t^{\alpha\beta} = t^\alpha$$

Следовательно, уравнения (2.3), (2.4) в качестве искомых функций содержат только $t_{\alpha\beta}$ и w.

Таким образом, тензор $\sigma_{\alpha\beta}$ представлен в виде суммы двух тензоров $\tau_{\alpha\beta}$ и $t_{\alpha\beta}$, Первый из них определяется формулой (2.5), в которой вектор ω должен удовлетворять уравнению (2.6), и характеризуется тем, что $\tau_\alpha{}^\alpha = 0$ и вектор $\nabla_\beta \tau^{\alpha\beta}$ — соленоидальный. Второй тензор $t_{\alpha\beta}$ характеризуется только тем, что его дивергенция $\nabla_\beta t^{\alpha\beta}$ является потенциальным вектором.

Чтобы выразить тензор $t_{\alpha\beta}$ через Φ и w и получить уравнения для определения этих функций, возьмем контравариантную производную от (2.4) с последующей сверткой. В результате получим

$$\frac{1+\nu}{3}\Phi_{(1)} - \frac{\nu}{3} t_{\alpha(1)}^{\alpha} + \frac{Eh}{3}\Delta w - \frac{2h^2}{15}\left(\frac{E}{G} - \frac{E\nu_z}{E_z}\right)\Delta\Phi_{(1)} + \frac{h^2}{105}\left(\frac{E}{G} - \frac{E\nu_z}{E_z}\right)\Delta\Phi_{(2)} = 0 \qquad (2.7)$$

$$(1+\nu) D'\Phi - \nu D' t_\alpha{}^\alpha - h^2\left(\frac{E}{G} - \frac{E\nu_z}{E_z}\right) A'\Delta\Phi + \frac{h^2 E\nu_z}{E_z} A'\Delta t_\alpha{}^\alpha + \frac{Eh^4}{E_z} B\Delta\Delta\Phi = 0$$

Вычитая из этих уравнений результат свертки (2.4) с метрическим тензором, получим

$$D t_\alpha{}^\alpha = (1+\nu) D\Phi - h^2 E E_z{}^{-1}\nu_z \Delta A\Phi$$

Исключая $t_\alpha{}^\alpha$ из (2.7) и (2.4) при помощи последнего соотношения получим

$$\frac{1-\nu^2}{3}\Phi_{(1)} - \frac{2h^2}{15}\left(\frac{E}{G} - \frac{E\nu_z(1+\nu)}{E_z}\right)\Delta\Phi_{(1)} + \frac{h^2}{15}\left(\frac{E}{G} - \frac{E\nu_z(1+\nu)}{E_z}\right)\Delta\Phi_{(2)} + \frac{Eh}{3}\Delta w = 0 \qquad (2.8)$$

$$\left[(1-\nu^2) D' - \left(\frac{E}{G} - 2\nu_z(1+\nu)\frac{E}{E_z}\right) h^2\Delta A' + \frac{E}{E_z}\left(1 - \frac{E}{E_z}\nu_z{}^2\right) h^4\Delta\Delta B\right]\Phi = 0 \qquad (2.9)$$

$$\frac{1+\nu}{3} t_{\alpha\beta}^{(1)} = -\frac{Eh}{3}\nabla_\alpha\nabla_\beta w + \frac{E\nu_z(1+\nu)}{5E_z} g_{\alpha\beta} p + \frac{\nu(1+\nu)}{3} g_{\alpha\beta}\Phi_{(1)} + \frac{2h^2E}{15G}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi_{(1)} - \frac{h^2E}{105G}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi_{(2)} + \frac{h^2E\nu_z(1+\nu)}{105E_z} g_{\alpha\beta}\Delta\Phi_{(2)} \qquad (2.10)$$

$$-(1+\nu) D' t_{\alpha\beta} = \Big[-\nu(1+\nu) g_{\alpha\beta} D' + \frac{E}{E_z}\nu_z(1+\nu) h^2 \varepsilon_{.\alpha}^{\pi}\varepsilon_{.\beta}^{\rho}\nabla_\pi\nabla_\rho A' - \left(\frac{E}{G} - 2\nu_z(1+\nu)\frac{E}{E_z}\right) h^2\nabla_\alpha\nabla_\beta A' + \frac{E}{E_z}\left(1 - \frac{E}{E_z}\nu_z{}^2\right) h^4\nabla_\alpha\nabla_\beta\Delta B\Big]\Phi \qquad (2.11)$$

Уравнения (2.8), (2.9) и (2.3) образуют разрешающую систему уравнений для определения w и Φ, а формулы (2.10), (2.11) определяют $t_{\alpha\beta}$ через эти функции.

3. Задачу будем решать методом асимптотического интегрирования уравнений с малым параметром при производных [7,8] половину толщины пластинки h, считая ее малой по сравнению с характерным линейным размером a срединной плоскости. Предполагается, что параметры задачи и искомое решение — достаточно гладкие функции точки срединной плоскости.

Интегралы основного напряженного состояния, не обладающие свойством быстрой изменяемости (регулярные члены асимптотики), ищутся в виде разложений

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(k)} = h^{-2} (\sigma_{\alpha\beta}^{(k0)} + h\sigma_{\alpha\beta}^{(k1)} + \ldots), \qquad w = h^{-3} (w^{(0)} + hw^{(1)} + \ldots) \tag{3.1}$$

Если теперь подставить (3.1) в уравнения (2.3), (2.4) и приравнять нулю сумму членов с одинаковыми степенями h, то получится рекуррентная последовательность уравнений для определения функций $\sigma_{\alpha\beta}^{(ks)}$, $w^{(s)}$. Эти уравнения сводятся к неоднородным бигармоническим уравнениям и в первом приближении совпадают с уравнениями теории.

Для построения интегралов типа погранслоя (краевых эффектов обычной) введем в окрестности границы Г области, занятой срединной плоскостью, местную ортогональную систему координат $x^1 = r$, $x^2 = s$, где r отсчитывает расстояние от точек кривой Г вдоль внешней нормали, а s — длина дуги участка кривой Г.

Обратимся к уравнениям (2.6), понимая под D и A усеченные матрицы порядка m, а под ω будем понимать m-мерный вектор. Воспользуемся расщеплением оператора Лапласа [7] вблизи границы Г по степеням h

$$h^2\Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{h}{R}\frac{\partial}{\partial t} + h^2\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{t}{R^2}\frac{\partial}{\partial t}\right) + \ldots \qquad (r = ht) \tag{3.2}$$

Здесь R — радиус кривизны кривой Г.

Вектор ω типа погранслоя ищется в виде разложения

$$\omega = h^a (\omega^{(0)} + h\omega^{(1)} + \ldots) \tag{3.3}$$

(a — целое число). Если (3.2), (3.3) подставить в уравнение (2.6) и приравнять нулю сумму членов с одинаковыми степенями h, то получится рекуррентная последовательность обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (s входит как параметр). От решений этих уравнений требуется, чтобы они имели характер погранслоя. Для их построения используются положительные корни характеристического уравнения

$$\left| D - \frac{E\lambda^2}{2(1+\nu)G} A \right| = 0$$

Это уравнение имеет m положительных корней, так что интегралы (3.3) типа погранслоя имеют на границе (при $t = 0$) m степеней свободы.

Аналогично строится решение типа погранслоя однородных уравнений (при $p = 0$) (2.3), (2.9)

$$\Phi_{(1)} = 0, \quad \Phi_{(k)} = h^b (\Phi_{(k)}^{(0)} + h\Phi_{(k)}^{(1)} + \ldots) \qquad (k = 2, 3, \ldots, m) \tag{3.4}$$

Здесь b — целое число.

Можно показать, что интегралы (3.4) типа погранслоя имеют на границе (при $t=0$) $2m-2$ степеней свободы, т. е. соответствующее характеристическое уравнение имеет $2m-2$ корней с положительными вещественными частями.

Определив функции $\Phi_{(k)}$ типа погранслоя, из (2.8) и (2.10) находим погранслои

$$w=\frac{h}{35}\left(\frac{\nu_z(1+\nu)}{E_z}-\frac{1}{G}\right)\Phi_{(2)}, \qquad t_{\alpha\beta}^{(1)}=\frac{E\nu_z}{E_z}\frac{h^2}{35}\varepsilon_{.\alpha}^{\pi}\varepsilon_{.\beta}^{\rho}\nabla_\pi\nabla_\rho\Phi_{(2)}$$

Погранслои $\tau_{\alpha\beta}$ и $t_{\alpha\beta}^{(k)}$ $(k=2,3,\ldots,m)$ определяются по формулам (2.5) и (2.11).

Регулярные члены асимптотики в каждом приближении могут быть подчинены двум граничным условиям; $3m-2$ граничных условия можно выполнить при помощи интегралов погранслоя (3.3), (3.4). Таким образом, при помощи построенных интегралов можно удовлетворять $3m$ граничным условиям, которые получаются из (1.5), (1.6) при сохранении в рядах (1.1) первых m членов.

Выполнение граничных условий следует производить при помощи процесса наложения [8]. Регулярные члены асимптотики и погранслои подставляются в граничные условия задачи и затем выбираются подходящим образом целые числа a и b (фигурирующие в (3.3), (3.4)). Таким путем могут быть получены рекуррентные системы линейных алгебраических уравнений для определения произволов интегрирования в (3.3), (3.4) и установлены граничные условия для последовательного определения регулярных членов асимптотики. Регулярные члены асимптотики, определяющие основное напряженное состояние пластинки, и пограничные слои, определяющие краевые эффекты, взаимосвязаны: вторые определяются первыми, а поведение погранслоев $\omega_{(1)}$, $\omega_{(2)}$, $\Phi_{(2)}$ на границе определяет граничные условия для регулярных членов асимптотики.

Асимптотическое исследование напряженного состояния пластинки приводит к выводам, полученным другими методами [9–12] для изотропных пластинок. Вне узкой краевой зоны погрешность гипотез Кирхгоффа имеет порядок h по сравнению с a — характерным размером срединной плоскости. Вблизи же границы пренебрегаемые в классической теории касательные и нормальные к срединной плоскости напряжения $\sigma_{\alpha z}$, σ_{zz} являются величинами того же порядка, что и напряжения $\sigma_{\alpha\beta}$. Поэтому вблизи границы погрешность гипотез Кирхгоффа при достаточно малом h может быть как угодно велика.

4. В теории анизотропных пластинок С. А. Амбарцумяна [4,5], так же как и в теории Рейсснера [2,3], учитывается один краевой эффект $\omega_{(1)}$. В отличие от них, построенная выше теория позволяет решать задачи с учетом любого конечного числа краевых эффектов.

Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения, к решению которых сводится построение погранслоя, не зависят от геометрии пластинки и могут быть проинтегрированы раз навсегда. Для целей практического расчета эти уравнения достаточно решить при небольших m, так как погранслои $\omega_{(k)}$, $\Phi_{(k)}$ при больших k быстро затухают, а их влияние на основное напряженное состояние заметно уменьшается.

Исследование задач изгиба пластинки с различными условиями опирания (заделка, свободное опирание) показывает, что влияние погранслоев $\Phi_{(k)}$ на основное напряженное состояние во втором и третьем приближениях невелико. Оно вовсе исчезает, если коэффициент Пуассона ν_z равен нулю. Так, например, для заделанной по краю круглой пластинки радиуса a, нагруженной равномерным давлением p, во втором приближении для функции прогиба имеем (r — расстояние от центра круга,

$$w=\frac{1-\nu^2}{Eh^3}\frac{3p}{128}(r^2-a^2)\,[(r^2-a^2)+ahC] \qquad (C=\mathrm{const})$$

Второй член в квадратной скобке дает поправку к классической теории, которая появляется вследствие учета погранслоя $\Phi_{(2)}$. Для изотропной пластинки и $\nu = 0.3$ имеем $C \approx 0.05$. Для анизотропной пластинки с характеристиками материала $E / Ek = {}^7/_5$, $\nu_z = 0.5$, $\nu = 0$, $E / G = 0.7$, $C \approx 0.19$.

Рассмотрим еще один пример. Пусть прямоугольная пластинка $(a \times b)$ изгибается нагрузкой вида

$$p = q \sin (\pi x / a) \sin (\pi y / b)$$

Здесь q — интенсивность нагрузки в центре ($x = {}^1/_2\, a$, $y = {}^1/_2\, b$). Пластинка свободно оперта по своим кромкам, причем при $x = 0$ имеем $\sigma_{xy} = 0$, а остальная часть границы заделана относительно касательного к контуру перемещения.

Здесь на основное напряженное состояние во втором приближении влияние оказывают только погранслой $\omega_{(k)}$. Для функции прогиба w получает выражение

$$w = w_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + w_0 A (1 - \nu) \frac{\pi^2 h}{a} \left(\frac{E}{2 (1 + \nu) G} \right)^{1/2} \sin \frac{\pi y}{b} \left[\frac{x}{a} \operatorname{cth} \frac{\pi a}{b} \operatorname{ch} \frac{\pi x}{b} - \right.$$
$$\left. - \frac{a \operatorname{sh} (\pi x / b)}{b \operatorname{sh}^2 (\pi a / b)} - \frac{x}{b} \operatorname{sh} \frac{\pi x}{b} \right]$$

Здесь w_0 — прогиб в центре пластинки, определенный по классической теории, A — постоянная. Второе слагаемое, зависящее от отношения h / a, дает поправку к классической теории. Численный коэффициент A имеет значение 0.631, если учитывать два краевых эффекта ($m = 2$). По теориям [3–5], учитывающим один краевой эффект, $A = \sqrt{0.4} \approx 0.6325$. Таким образом, учет уже второго краевого эффекта вносит в определение постоянной A лишь незначительную поправку. Поправка к основному напряженному состоянию, появляющаяся в других задачах за счет учета погранслоев $\Phi_{(k)}$, незначительна, поэтому теории [3–5] могут быть применены для получения первой поправки к основному напряженному состоянию, даваемому классической теорией. Величина этой поправки растет вместе с отношением E / G и может стать значительной для сильно анизотропных пластинок с большим отношением E / G.

Упомянутые теории [3–5] не могут, однако, дать правильное представление о напряженном состоянии пластинки вблизи ее края главным образом потому, что они вовсе не учитывают напряженное состояние, связанное с погранслоем $\Phi_{(k)}$.

Поступила 6 VI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Понятовский В. В. К теории пластин средней толщины. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
2. Reissner E. On the theory of bending of elastic Plates. J. Math. and Phys., 1944, vol. 23.
3. Reissner E. On bending of elastic plates. Quar. Appl. Math., 1947, vol. 5, No 1.
4. Амбарцумян С. А. К теории изгиба анизотропных пластинок. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 5.
5. Амбарцумян С. А. К теории изгиба анизотропных пластинок и пологих оболочек. ПММ, 1960, т. 24 вып. 2.
6. Векуа И. Н. Об одном методе расчета призматических оболочек. Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, 1955, т. 21.
7. Вишик М. И. и Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Успехи матем наук, 1957, т. 12, вып. 5 (77).
8. Гольденвейзер А. Л. Некоторые математические проблемы линейной теории упругих тонких оболочек. Успехи матем. наук., 1960, т. 15, вып. 5 (95).
9. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
10. Нигул У. К. О применении символического метода А. И. Лурье к анализу напряженных состояний и двумерных теорий упругих плит. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
11. Аксентян О. К., Ворович И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
12. Нигул У. К. О приближенном учете краевых эффектов типа Сен-Венана в краевых задачах статики плит. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.