

КРУГЛЫЕ ПЛАСТИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАЗРЫВНЫХ НАГРУЗОК

Л. С. Срубщик

(Ростов-на-Дону)

В работах [1-4] показано, что в случае, когда относительная тонкостенность (ε^2) мала, пластина ведет себя подобно мембране ($\varepsilon = 0$) всюду, кроме узкого участка вблизи границы, где происходит явление «пограничного слоя». Однако подобные явления могут возникать не только на краю пластины, но и внутри ее. В настоящей работе при помощи асимптотических методов, развитых для круглой симметрично нагруженной пластины [3, 4], устанавливается, что внутренний пограничный слой [5] имеет место, если нагрузка носит разрывный характер. При этом строятся и обосновываются асимптотические представления решения задачи, которые могут применяться для расчета круглых пластин под действием разрывных нагрузок. Это иллюстрируется на примере задачи о круглой симметрично нагруженной пластине, находящейся под действием нагрузки, равномерно распределенной по некоторой окружности.

1. Система уравнений Кармана в случае круглой симметрично нагруженной пластины, жестко заделанной по контуру, имеет вид

$$Av - \frac{u^2}{2} = 0, \quad \varepsilon^2 Au + uv + \varphi(\rho) = 0 \quad (1.1)$$

$$A(\dots) \equiv -\rho \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho(\dots), \quad u = \frac{dw}{d\rho}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{h^2}{12(1-\sigma^2)a^2} \quad \left(0 < \sigma < \frac{1}{2}\right), \quad \varphi(\rho) = \frac{a}{Eh} \int_0^\rho q(t) t dt$$

$$u = 0, \quad \frac{dv}{d\rho} - \frac{\sigma}{\rho} v = 0 \quad \text{при } \rho = 1; \quad \frac{u}{\rho} < \infty, \quad \frac{v}{\rho} < \infty \quad \text{при } \rho = 0 \quad (1.2)$$

Все величины, входящие в уравнения (1.1), (1.2), безразмерные, причем wa — прогиб срединной поверхности пластины, vE/ρ — радиальное усилие, E — модуль Юнга, h — толщина пластины, a — радиус внешнего контура и $q(\rho)$ — интенсивность нормальной нагрузки.

Кроме того, предполагается, что функция $\varphi(\rho)$ и ее производные до $n+2$ -го порядка кусочно-непрерывны. Без потери общности считаем, что $\varphi(\rho)$ имеет единственный конечный скачок в точке $\rho = b > 0$, т. е.

$$\varphi(b-0) \neq \varphi(b+0) \quad (1.3)$$

[В этих предположениях из работы [6] легко следует теорема.

Теорема 1.1. Задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение (v, u) . При этом функция v неотрицательна и дважды непрерывно дифференцируема. Функция u имеет непрерывную первую производную и кусочно-непрерывную вторую (конечный скачок в точке $\rho = b$).

2. Для решения (1.1), (1.2) строятся асимптотические представления вида

$$v = \sum_{s=0}^{n+2} \varepsilon^s v_s + \sum_{s=0}^{n+2} \varepsilon^s h_s + \sum_{s=0}^{n+2} \varepsilon^s \xi_s + x_n \quad (2.1)$$

$$u = \sum_{s=0}^n \varepsilon^s u_s + \sum_{s=0}^n \varepsilon^s g_s + \sum_{s=0}^n \varepsilon^s \eta_s + z_n$$

Построение функций v_s , u_s и h_s , g_s подробно описано в [4]. Для определения v_0 , u_0 была получена система (уравнения мембраны)

$$A v_0 - 1/2 u_0^2 = 0, \quad u_0 v_0 + \varphi(\rho) = 0 \quad (2.2)$$

с краевыми условиями

$$\frac{dv_0}{d\rho} - \frac{\sigma}{\rho} v_0 = 0 \quad \text{при } \rho = 1, \quad \frac{v_0}{\rho} < \infty \quad \text{при } \rho = 0 \quad (2.3)$$

а для определения v_s , u_s — система

$$A v_s - 1/2 \sum_{k+j=s} u_k u_j = 0, \quad \sum_{k+j=s} u_k v_j + A u_{s-2} = 0 \quad (2.4)$$

($s = 1, 2, \dots, n+2$; $u_{-1} = 0$)

с краевыми условиями

$$\frac{v_s}{\rho} < \infty \quad \text{при } \rho = 0, \quad \frac{dv_s}{d\rho} - \frac{\sigma}{\rho} v_s = B_s \quad \text{при } \rho = 1 \quad (2.5)$$

Здесь B_s находятся из условия равенства нулю коэффициентов при ε^s в выражении

$$\sum_{s=0}^{n+2} \varepsilon^s \left[B_s + \frac{dh_s}{d\rho} - \frac{\sigma}{\rho} h_s \right] = 0 \quad \text{при } \rho = 1$$

Функции типа пограничного слоя h_s , g_s , компенсирующие невязку функций в выполнении граничных условий (1.2), определяются из дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2 h_i}{dt^2} = 0 \quad (i = 0, 1) \quad (2.6)$$

$$\frac{d^2 h_{s+2}}{dt^2} = R_1 h_{s+1} + R_2 h_s - \sum_{k+j+l=s} t^l (1-t) u_{kl} g_j - \frac{1}{2} \sum_{i+j=s} (1-t) g_i g_j \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g_s}{dt^2} - v_{00} g_s &= R_1 g_{s-1} + R_2 g_{s-2} + \sum_{\substack{k+j+l=s \\ (s \neq j)}} t^l (1-t) v_{kl} g_j - \\ &- \sum_{j+m=s} t^l (1-t) g_j h_m + \sum_{k+m+l=s} t^l (1-t) u_{kl} h_m \end{aligned}$$

с краевыми условиями

$$g_s|_{t=0} = -u_{s0}, \quad g_s|_{t=\infty} = 0, \quad h_s|_{t=\infty} = 0 \quad (2.8)$$

Здесь

$$R_1(\dots) \equiv 2t \frac{d^2(\dots)}{dt^2} + \frac{d(\dots)}{dt}, \quad R_2(\dots) \equiv -t^2 \frac{d^2(\dots)}{dt^2} - t \frac{d(\dots)}{dt} + (\dots)$$

$$g_{-2} = g_{-1} = 0, \quad v_{00} = \frac{1}{1-\sigma} \int_0^1 \eta \int_n^0 \frac{\varphi^2}{\xi v_0^2} d\xi d\eta > 0, \quad s = 0, 1, \dots, n$$

$$v_k = \sum_{l=0} v_{kl} (1-\rho)^l, \quad u_k = \sum_{l=0} u_{kl} (1-\rho)^l$$

$v_k(\rho)$ и $u_k(\rho)$ — разложения в ряд Тейлора в точке $\rho = 1$.

Но в работах [1-4] все исследования проводились в случае достаточно гладких нагрузок $\varphi(\rho)$. Как видно из (1.3), здесь это условие нарушено. Покажем, что разрыв $\varphi(\rho)$ в точке $\rho = b$ порождает в окрестности этой точки явление внутреннего пограничного слоя [5]. Для этого сначала приведем две необходимые в дальнейшем теоремы.

Теорема 2.1. Задача (2.2), (2.3) имеет единственное решение (v_0, u_0) . Функция v_0 и ее первая производная непрерывны, и справедлива оценка

$$v_0(\rho) > \rho \frac{1+\sigma}{2(1-\sigma)} \int_0^1 x dx \int_x^1 \frac{\varphi^2}{y v_0^2} dy > 0 \quad (2.9)$$

Все последующие производные функции v_0 , а также функция u_0 и ее первые производные кусочно-непрерывны (имеют конечный скачок в точке $\rho = b$).

Доказательство этой теоремы почти дословно совпадает с доказательством теоремы 2.2 в [7]. При этом показывается, что v_0 является пределом последовательности, определяемой соотношениями

$$v_{n+1} = v_n - \delta_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$v_1 = A^{-1} \left(\frac{\varphi^2}{2C^2} \right), \quad C = \max \left[\frac{\varphi^2(\rho)}{\rho} \right]^{1/2} \quad (0 \leq \rho \leq 1)$$

где δ_n — решение уравнения

$$\frac{1}{\rho} A \delta_n + M \delta_n - \alpha_n = 0, \quad \left[\frac{\delta_n}{\rho} \right]_{\rho=0} < \infty, \quad \left[\frac{d\delta_n}{d\rho} - \frac{\sigma}{\rho} \delta_n \right]_{\rho=1} = 0$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\rho} A v_n - \frac{\varphi^2}{2\rho v_n^2}, \quad M = \max \left| \frac{\varphi^2}{\rho v_1^3} \right| \quad (0 \leq \rho \leq 1)$$

Теорема 2.2. Задача (2.4), (2.5) имеет единственное решение v_s, u_s ($s = 1, 2, \dots$). Функция v_s и ее первая производная непрерывны, а все последующие производные v_s , а также функция u_s вместе со своими производными кусочно-непрерывны (имеют конечные скачки в точке $\rho = b$).

Теорема 2.2 вытекает как следствие теоремы 4 из [4] и теоремы 2.1 настоящей работы.

Применяя теоремы 1.1, 2.1 и 2.2, замечаем, что разности

$$v^n = v - \sum_{s=0}^{n+2} \varepsilon^s (v_s + h_s), \quad u^n = u - \sum_{s=0}^n \varepsilon^s (u_s + g_s)$$

и их производные имеют конечные скачки в точке $\rho = b$. Действительно, в то время как функция $u(\rho)$ непрерывно дифференцируема в точке

$\rho = b$, функции $u_s(\rho)$ ($s = 0, 1, \dots$) вместе с производными терпят разрыв в этой точке. Далее, разности v^n и u^n в окрестности $\rho = b$ носят характер пограничного слоя. Чтобы найти его, введем функции ξ_s и η_s , которые ищутся в виде

$$v^n = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \xi_{ki}, \quad u^n = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \eta_{ki} \quad (k=1, 2) \quad (2.10)$$

Здесь

$$\xi_i = \xi_{1i}, \quad \eta_i = \eta_{1i} \quad \text{при } \rho < b, \quad \xi_i = \xi_{2i}, \quad \eta_i = \eta_{2i} \quad \text{при } \rho > b$$

Пусть, далее, $r = |b - \rho|$ и

$$v_k = v_{k0} + v_{k2}r + \dots + v_{kn}r^n, \quad u_k = u_{k0} + u_{k1}r + \dots + u_{kn}r^n \quad (2.11)$$

соответствующие разложения в ряд Тейлора в точке $r = 0$. Теперь подставим (2.10) и (2.11) в (1.1), произведем замену $r = \varepsilon t$ и приравняем нулю коэффициенты при $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$. В результате для определения ξ_{ks}, η_{ks} получаем систему (2.6) — (2.8), (2.11) с заменой h_s на ξ_{ks} , g_s на η_{ks} и $v_0(1)$ на $v_0(b)$. При этом остаются неизвестными граничные условия при $t = 0$ для η_{ks} ($k=1, 2$). Применяя теоремы 1.1, 2.1 и 2.2, заключаем, что недостающие граничные условия определяются из требования, что сумма

$$(u_0 + \eta_0) + \varepsilon(u_1 + \eta_1) + \dots + \varepsilon^n(u_n + \eta_n)$$

должна быть непрерывной вместе со своей производной. Тогда, если ввести обозначение

$$[F] = F(b+0) - F(b-0) \quad (2.12)$$

условия непрерывности можно записать так:

$$[u_s + \eta_s] = \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (u_s + \eta_s) \right] = 0 \quad (s=0, 1, \dots, n) \quad (2.13)$$

Далее из (2.6) получаем, что $\xi_0 = \xi_1 = 0$. Это соответствует тому, что разность $v - v_0$ и ее первая производная непрерывны в точке $\rho = b$.

Теперь из (2.7) при $s = 0$ получаем

$$\frac{d^2 \eta_{k0}}{dt^2} - v_0(b) \eta_{k0} = 0, \quad \eta_{k0}|_{t=\infty} = 0 \quad (k=1, 2) \quad (2.14)$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} \eta_0 &= C_1 \exp\left(-\sqrt{v_0(b)} \frac{b-\rho}{\varepsilon}\right) \quad \text{при } \rho < b \\ \eta_0 &= C_2 \exp\left(-\sqrt{v_0(b)} \frac{\rho-b}{\varepsilon}\right) \quad \text{при } \rho > b \end{aligned} \quad (2.15)$$

Чтобы определить постоянные C_k , подставим (2.15) в (2.13) при $s = 0$ и получим систему двух линейных алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2 . Решив ее, находим

$$C_1 = \frac{1}{2} \left([u_0] + \frac{\varepsilon}{\sqrt{v_0(b)}} \left[\frac{\partial u_0}{\partial \rho} \right] \right), \quad C_2 = -\frac{1}{2} \left([u_0] - \frac{\varepsilon}{\sqrt{v_0(b)}} \left[\frac{\partial u_0}{\partial \rho} \right] \right) \quad (2.16)$$

Функции η_s ($s = 1, 2, \dots$) определяются аналогичным образом из уравнений вида (2.14), но неоднородных, а функции ξ_s — двукратным интегрированием из формул (2.7). Нетрудно видеть, что функции ξ_s и η_s будут функциями типа пограничного слоя [5].

3. При обосновании асимптотических представлений исходим из следующей леммы.

Лемма 3.1. Пусть $\varphi_k = v - x_k$ и $\psi_k = u - z_k$. Тогда в каждом промежутке $[0, b]$ и $[b, 1]$ справедливы оценки

$$A\varphi_k - \frac{1}{2}\psi_k^2 = O(\rho\varepsilon^{k+1}), \quad \varepsilon^2 A\psi_k + \varphi_k\psi_k + \varphi(\rho) = O(\rho\varepsilon^{k+1}) \quad (3.1)$$

Лемма вытекает из леммы 3 из [4], примененной отдельно в промежутках $[0, b]$ и $[b, 1]$.

Лемма 3.2. При достаточно малых ε ($0 < \varepsilon < \varepsilon_1$) для всех $\rho \in [0, 1]$ справедливы соотношения

$$1) \quad \varphi_k \geq 0, \quad 2) \quad \min \frac{\varphi_k}{\rho} > \frac{T}{2}, \quad T = v_0(1) > 0 \quad (3.2)$$

Неравенства (3.2) легко получаем как следствие леммы 5 из [4], теоремы 2.1 и (2.6), (2.9).

Лемма 3.3. Для x_k и z_k справедлива энергетическая оценка

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - \sigma\right) \int_0^1 \left(\frac{dx_k}{d\rho}\right)^2 d\rho + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x_k^2}{\rho^2} d\rho + \varepsilon^2 \int_0^1 \left(\frac{dz_k}{d\rho}\right)^2 d\rho + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^1 \frac{z_k^2}{\rho^2} d\rho + \\ & + \frac{T}{4} \int_0^1 z_k^2 d\rho \leq C\varepsilon^{k+1} \int_0^1 (|x_k| + |z_k|) d\rho, \quad T = v_0(1) > 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Сначала рассмотрим промежуток $[0, b]$. Вычтем (3.1) из (1.1) и умножим первую разность на $(v - \varphi_k) / \rho$, а вторую — на $(u - \psi_k) / \rho$, проинтегрируем от 0 до 1 и сложим. Аналогичные действия произведем в промежутке $[b, 1]$ и получившийся результат добавим к предыдущему. В результате получим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\frac{dx_k}{d\rho}\right)^2 d\rho + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x_k^2}{\rho^2} d\rho + \varepsilon^2 \int_0^1 \left(\frac{dz_k}{d\rho}\right)^2 d\rho + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^1 \frac{z_k^2}{\rho^2} d\rho + \\ & + \int_0^1 \frac{(\varphi_k + v)}{\rho} z_k^2 d\rho - \left(\sigma + \frac{1}{2}\right) x_k^2(1) - \left[x_k \frac{dx_k}{d\rho} + \frac{1}{2} x_k^2 \right]_{b-0}^{b+0} - \\ & - \varepsilon^2 \left[z_k \frac{dz_k}{d\rho} + \frac{1}{2} z_k^2 \right]_{b-0}^{b+0} \leq C\varepsilon^{k+1} \int_0^1 (|x_k| + |z_k|) d\rho \end{aligned} \quad (3.4)$$

Покажем, что внеинтегральные члены, стоящие в квадратных скобках, равны нулю. Очевидно, что для этого надо показать, что x_k и z_k непрерывны вместе со своими первыми производными в точке $\rho = b$. Для функции $z_k(\rho)$ это следует из гладкости $u(\rho)$ — в силу теоремы 1.1 и гладкости $\psi_k(\rho)$ — в силу условий (2.13), а для функции $x_k(\rho)$ из гладкости $v(\rho)$ и $v_s(\rho)$ ($s=0, 1, \dots$) — в силу теорем 1.1, 2.1 и 2.2 и того факта, что ξ_s получаются двукратным интегрированием выражения, имеющего разве что конечный скачок в точке $\rho = b$. Значит, выражения в квадратных скобках равны нулю, и неравенство (3.3) следует из (3.4) при помощи

теоремы 1.1, леммы 3.2 и простого неравенства

$$v^2(1) = \left(\int_0^1 \frac{dv}{d\rho} d\rho \right)^2 \leq \int_0^1 \left(\frac{dv}{d\rho} \right)^2 d\rho$$

Теорема 3.1. Пусть функция $\varphi(\rho)$ удовлетворяет условию (1.3) и на каждом из промежутков $[0, b]$ и $[b, 1]$ имеет $n + 2$ -е непрерывные производные. Тогда имеют место асимптотические представления (2.1), причем остатки допускают оценки

$$\begin{aligned} \max_{\rho} |x_n(\rho)| &\leq m_1 \varepsilon^{n+1} \quad (n \geq 0), & \max_{\rho} |z_n(\rho)| &\leq m_2 \varepsilon^{n+1/2} \quad (n \geq 0) \\ \max_{\rho} \left| \frac{dx_n}{d\rho} \right| &\leq m_3 \varepsilon^{n+1} \quad (n \geq 0), & \max_{\rho} \left| \frac{dz_n}{d\rho} \right| &\leq m_4 \varepsilon^{n-1} \quad (n \geq 2) \\ \max_{\rho} \left| \frac{d^2 x_n}{d\rho^2} \right| &\leq m_5 \varepsilon^{n-1/2} \quad (n \geq 1), & \max_{\rho} \left| \frac{d^2 z_n}{d\rho^2} \right| &\leq m_6 \varepsilon^{n-2} \quad (n \geq 3) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\mathbb{E}(0 \leq \rho \leq 1)$$

4. В случае других краевых условий, например свободного защемления или шарнирного закрепления, главный член внутреннего пограничного слоя будет вида (2.14)–(2.16). При этом экспоненциальный характер пограничного слоя объясняется тем, что радиальное усилие во внутренних точках мембраны положительно (см. лемму 1 из [4]). Если же удастся построить последующие приближения вырожденной задачи, аналогичные (2.4), (2.5), то дальнейшая асимптотика строится при помощи уравнений вида (2.6), (2.7).

5. **Пример.** Пусть круглая жестко заделанная по контуру пластина находится под действием симметричной нагрузки интенсивности p , равномерно распределенной по некоторой окружности радиуса $b > 0$. (Задача поставлена в [1], стр. 168.) Пусть, далее, для определенности имеем $b^2 = 0.5$, $\sigma = 0.3$, $a/h \approx 8.704$, $q = (a/Eh)p$.

Тогда равновесное состояние пластины описывается уравнениями (1.1), (1.2), причем

$$\varphi(\rho) = 0 \quad \text{при } 0 \leq \rho < b, \quad \varphi(\rho) = qb \quad \text{при } b \leq \rho \leq 1 \quad (5.1)$$

Без потери общности можно считать, что

$$\varphi(\rho) = 0 \quad \text{при } 0 \leq \rho < b, \quad \varphi(\rho) = 1 \quad \text{при } b \leq \rho \leq 1 \quad (5.2)$$

так как задача (1.1), (1.2), (5.1) сводится к задаче (1.1), (1.2), (5.2) простой заменой

$$v = \alpha (qb)^{2/3}, \quad u = \beta (qb)^{1/3}, \quad \varepsilon_1^2 = \varepsilon^2 (qb)^{-2/3} \quad (5.3)$$

Нетрудно подсчитать, что относительная тонкостенность пластины равна $\varepsilon = 0.035$, и поэтому решение задачи будем строить при помощи асимптотических представлений (2.1).

Основную трудность при построении асимптотики представляет решение задачи (2.2), (2.3). Ее можно было бы решить, используя алгоритм, данный в теореме 2.1. Но в случае функции $\varphi(\rho)$, заданной формулой (5.2), удобнее воспользоваться методом степенных рядов. Для этого из (2.2), (2.3) исключим u_0 и произведем замены

$$p_0 = \rho v_0, \quad \rho^2 = 1 - x \quad (5.4)$$

В результате, используя (5.2), получаем

$$-8p_0^2 d^2 p_0 / dx^2 - 1 = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq b^2 \quad (5.5)$$

$$d^2 p_0 / dx^2 = 0 \quad \text{при } b^2 \leq x < 1 \quad (5.6)$$

$$p_0|_{x=1} = 0, \quad [2dp_0/dx + (1+\sigma)p_0]_{x=0} = 0 \quad (5.7)$$

Решение задачи (5.5) — (5.7) в интервале $[0, b^2]$ будем приближать отрезком степенного ряда

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (5.8)$$

Чтобы определить постоянные a_s , подставим (5.8) в (5.5) и во второе краевое условие (5.7). Затем приравняем нулю коэффициенты при различных степенях x . В результате получим соотношения:

$$a_1 = -\frac{1+\sigma}{2} a_0, \quad a_2 = -\frac{1}{16a_0^2} \quad (5.9)$$

$$a_s = -\frac{1}{s(s-1)a_0^2} \sum_{\substack{k+m+t=s+2 \\ (t \geq 2, t \neq s)}} t(t-1) a_k a_m a_t \quad (5.10)$$

Из (5.9), (5.10) находим

$$a_s = -\frac{1}{a_0^2} \sum_{k=0}^{[1/2s-1]} b_k^{(s)} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3k} \quad (s = 3, 4, 5, \dots) \quad (5.11)$$

Здесь $b_k^{(s)}$ — вполне определенные числа при заданном значении σ . В таблице приводятся несколько значений $b_k^{(s)}$ при $\sigma = 0.3$, используемые в дальнейшем.

	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$
$-b_0^{(s)} 10^1$	0.66666	0.4	0.256	0.17066	0.11702	0.13457	0.13516
$-b_1^{(s)} 10^2$		0.52083	0.91666	1.1333	1.2114	1.19768	1.09453
$-b_2^{(s)} 10^3$				0.47742	1.4484	2.72318	3.36034
$-b_3^{(s)} 10^4$						0.56577	2.12603

Из (5.11) следует, что для определения значений a_s надо найти a_0 . Для этого сначала заметим, что решение задачи (5.5) — (5.7) в интервале $[b^2, 1]$ имеет вид

$$p_0 = C(1-x) \quad (b^2 \leq x \leq 1) \quad (5.12)$$

Здесь C — некоторая постоянная. Чтобы найти постоянную C и вместе с ней a_0 , воспользуемся утверждением теоремы 2.1 о непрерывности функции v_0 и ее первой производной. Это, с учетом (5.8) и (5.12), приводит к следующим соотношениям в точке $x = b^2$:

$$\sum_{s=0}^n a_s b^{2s} = C(1-b^2), \quad \sum_{s=0}^n s a_s b^{2(s-1)} = -C \quad (5.13)$$

Исключая C , из (5.13) выводим

$$\sum_{s=0}^n a_s b^{2(s-1)} (b^2 + s(1-b^2)) = 0 \quad (5.14)$$

Применяя (5.11), из (5.14) получаем алгебраическое уравнение относительно $z = a_0^3$

$$f_m(z) = z^m + c_1 z^{m-1} + \dots + c_{m-1} z + c_m = 0 \quad (z = a_0^3) \quad (5.15)$$

При этом, если в (5.8) положить $n = 2(k+1)$, то порядок уравнения (5.15) будет равен k .

Чтобы среди корней $f_m(z)$ отобрать нужный корень, заметим, что $a_0 = v_0(1) > 0$ (см. теорему 2.1). Но уравнение (5.15) имеет единственный положительный корень. Это следует из того факта, что все c_i ($i = 1, 2, \dots, m$) отрицательны вследствие (5.11), и тогда единственность вытекает из теоремы Декарта о числе положительных корней многочлена. Отметим, что положительный корень уравнения $f_m(z) = 0$ удобно находить методом Ньютона, причем начальное приближение берется равным верхней

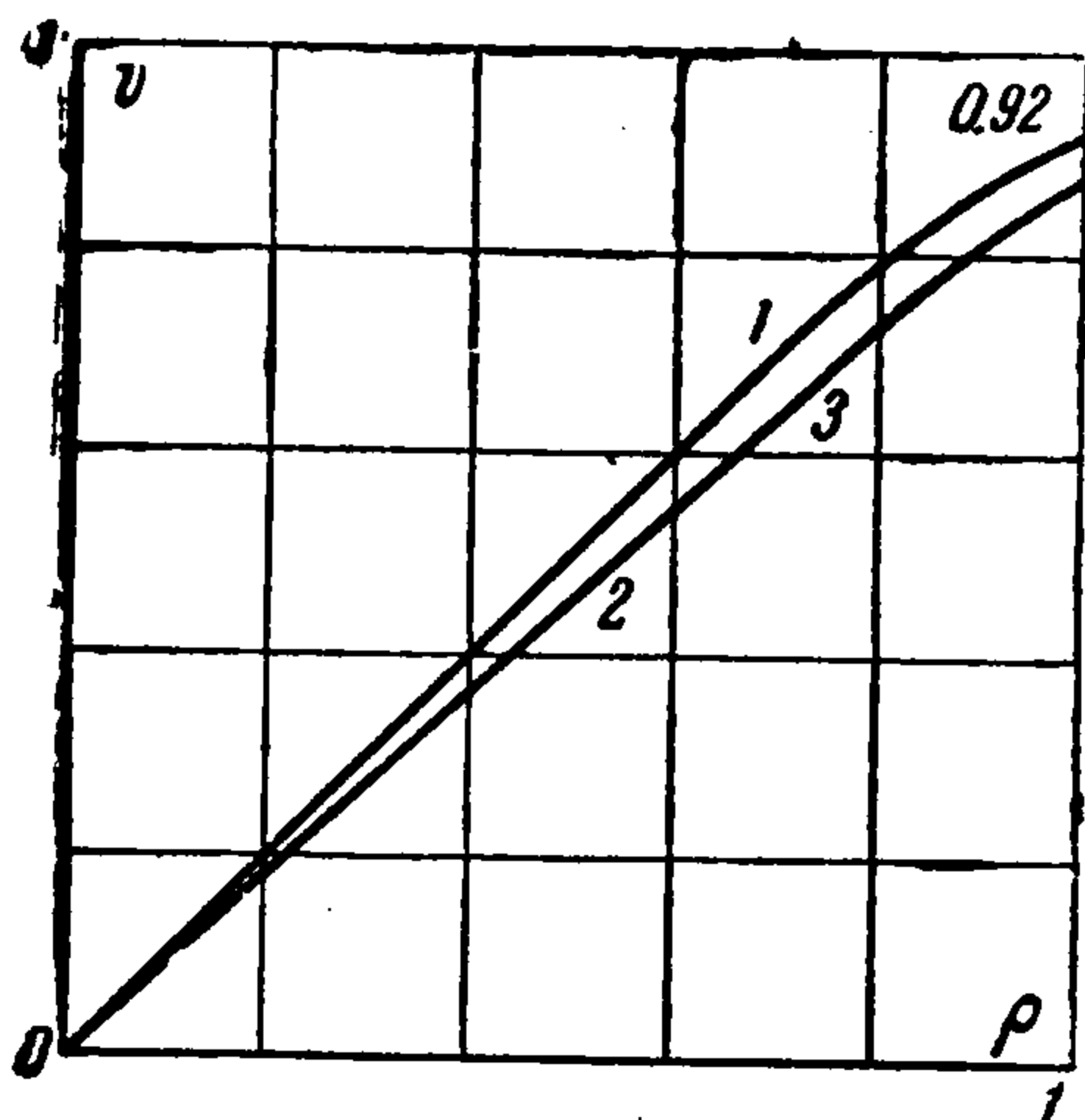
границе положительных корней многочлена, определенной по способу Маклорена, т. е.

$$z_0 = 1 + \max_i |c_i| \quad (1 \leq i \leq m)$$

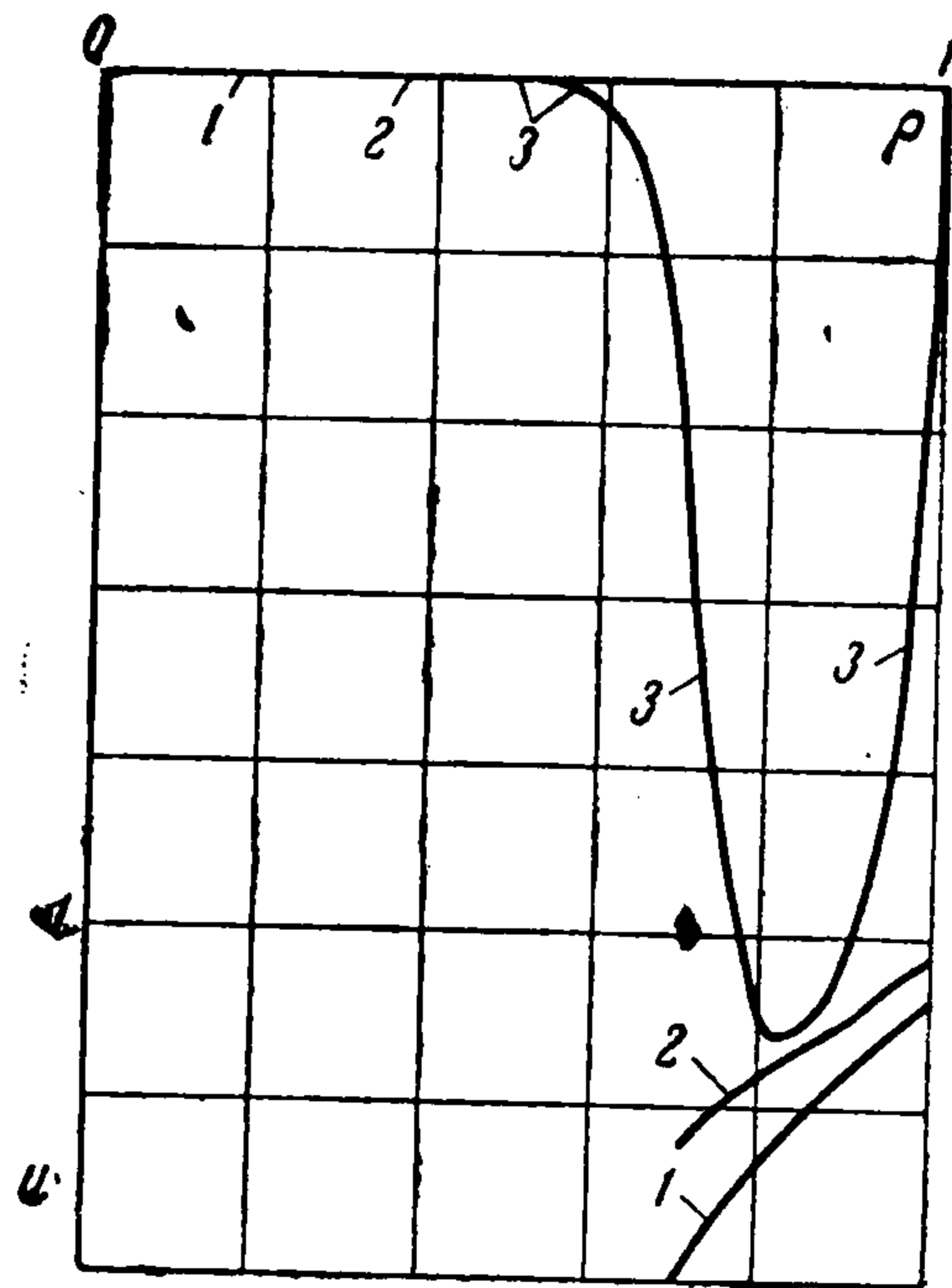
Наконец, определив a_0 , находим a_s ($s = 1, 2, \dots$) по формулам (5.9), (5.11) и постоянную C — по любой из формул (5.13). Вышеописанным методом при значениях $\sigma = 0.3$ и $b^2 = 0.5$ было получено приближенное решение задачи (2.2), (2.3), (5.2). Для приближения p_0 были построены многочлены P_7 и P_9 (см. (5.8)). При этом полезно отметить выполнение неравенства

$$\max_x |P_7(x) - P_9(x)| \leq 0.002 \quad (0 \leq x \leq 1/2) \quad (5.16)$$

Теперь, применяя (5.4) и соотношения (2.2),



Фиг. 1

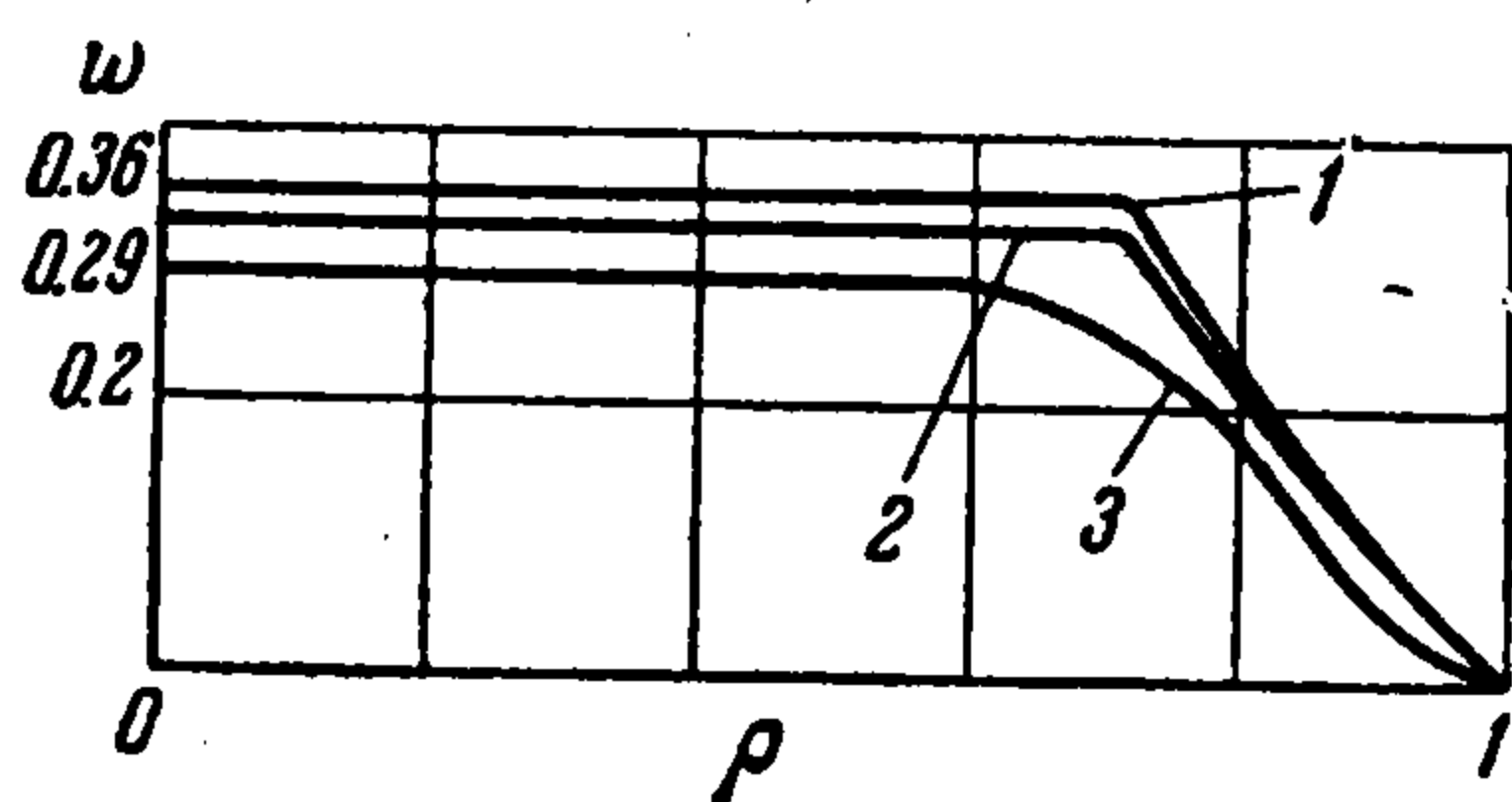


Фиг. 2

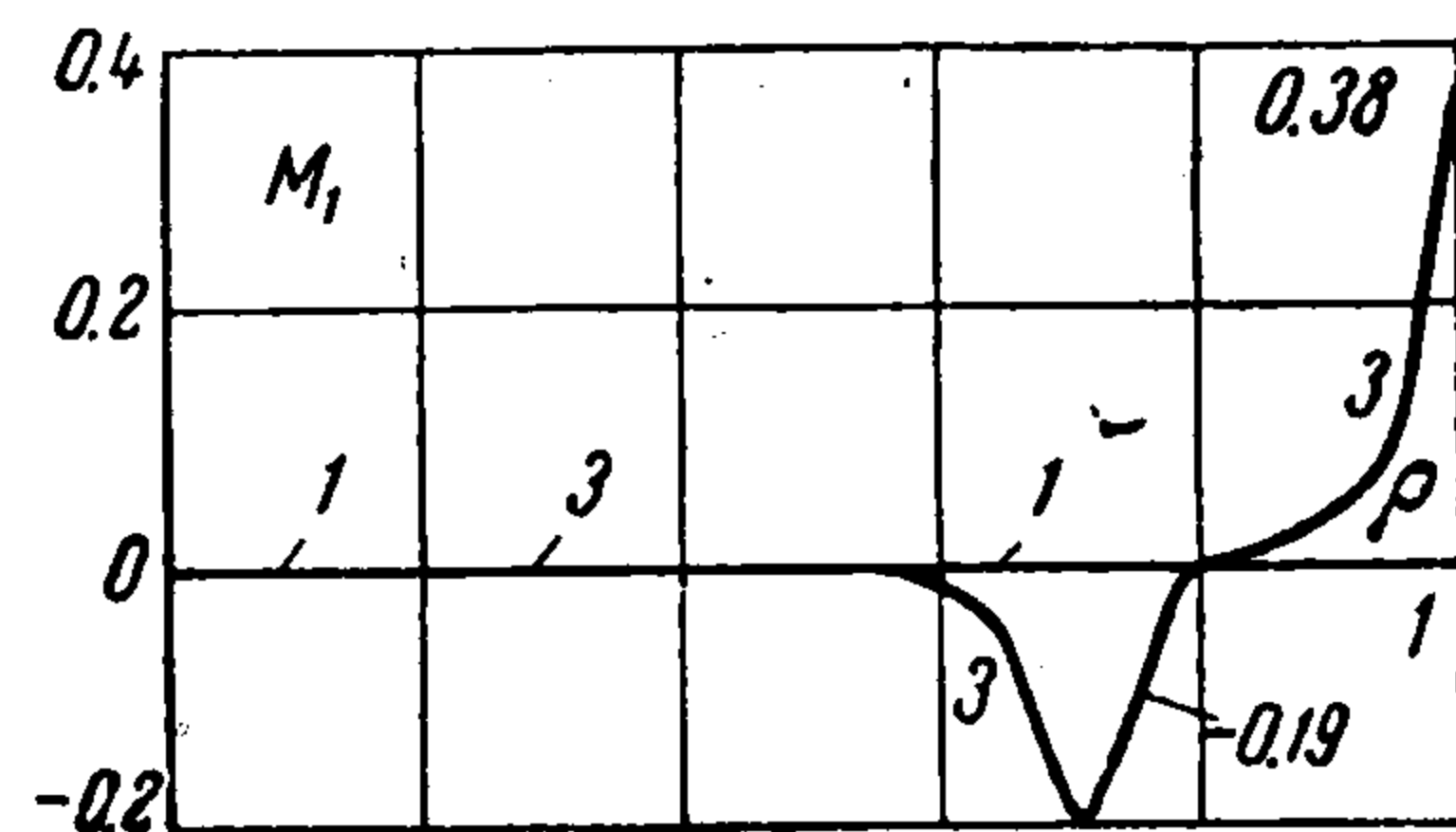
вычисляем перемещения v_0 , u_0 . Прогиб точек срединной поверхности мембраны находим по формуле

$$w_0 = \int_1^{\rho} u_0 d\rho \quad (w_0(1) = 0) \quad (5.17)$$

Графики функций v_0 , u_0 , w_0 представлены соответственно на фиг. 1, 2, 3 и помечены там цифрой 1. Отметим, что график u_0 имеет разрыв в точке $\rho = b$, причем



Фиг. 3



Фиг. 4

$u_0(\rho) = 0$ при $0 \leq \rho < b$. Далее, из (2.6), (2.7) при $s = 0$ находим g_0 и h_2 , а из (2.14) — (2.16) определяем η_0 . Для определения v_1 , u_1 из (2.4), (2.5) получаем

$$A v_1 + \frac{u_0^2}{v_0} v_1 = 0, \quad u_1 = -\frac{u_0 v_1}{v_0} \quad (5.18)$$

$$\left[\frac{v_1}{\rho} \right]_{\rho=0} < \infty, \quad \left[\frac{dv_1}{d\rho} - \frac{\sigma}{\rho} v_1 \right]_{\rho=1} = -0.92302 \quad (5.19)$$

Решение задачи (5.18), (5.19) может быть получено аналогично предыдущему методом степенных рядов.

Для этого в (5.18), (5.19) надо произвести замены вида (5.4) и искать решение задачи на $[0, b^2]$ в виде (5.8), а в интервале $[b^2, 1]$ — в виде $C_1(1-x)$.

Постоянную C_1 определяем из условия непрерывности v_1 вместе со своей производной на основании теоремы 2.2. При этом a_0 находится как решение линейного алгебраического уравнения. Графики функций $v_0 + \varepsilon v_1$, $u_0 + \varepsilon u_1$, $w_0 + \varepsilon w_1$ тоже представлены на фиг. 1, 2, 3 и помечены там цифрой 2.

Перейдем к вычислению (φ_1, ψ_1) — приближенного решения задачи (1.1), (1.2), (5.2) с учетом членов порядка ε . Для этого из (2.6), (2.7) при $s = 1$ находим g_1, η_1 и подставим эти и вычисленные ранее значения функций v_0, u_0, g_0 и т. д. в (2.1). Величину прогиба найдем по формуле (5.17), но с заменой u_0 на ψ_1 . Приближенное решение задачи представлено в виде графиков на фиг. 2, 3, 4 и помечено там цифрой 3. Отметим, что на фиг. 2 величина φ_1 совпадает с $v_0 + \varepsilon v_1$ с точностью до величины порядка ε^2 ; ψ_1 — непрерывная функция, быстро меняющаяся в окрестности точек $\rho = b$ и $\rho = 1$.

Наконец, подсчитаем изгибающие моменты, возникающие в пластине. Имеем

$$M = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \quad (0 \leq r \leq a) \quad (5.20)$$

Переходя к безразмерным величинам, получим

$$M_0 = -\frac{M}{Eha} = \varepsilon^2 \left(\frac{du}{d\rho} + \frac{\sigma}{\rho} u \right)$$

На фиг. 4 представлены график функции $M_1 = M_0 \cdot 10^1$ (помечен цифрой 3). При этом интересно заметить, что в мембране изгибающие моменты равны нулю (на фиг. 4 — это прямая, совпадающая с осью абсцисс и помеченная цифрой 1), а экстремальные значения M_1 находятся в точках $\rho = b$ и $\rho = 1$.

Автор благодарит И. И. Воровича и В. И. Юдовича за полезные советы при выполнении работы.

Поступила 20 VI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория гибких и круглых пластинок. Изд. иностр. лит. ИЛ, М., 1957.
2. V o t m b e r g E. Non Linear Bending of a Circulare Plate under Normal Pressure. *Communs Pure and Appl. Math.*, 1956, vol. 9, No. 4.
3. С р у б щ и к Л. С. и Ю д о в и ч В. И. Асимптотика уравнений большого прогиба круглой симметрично нагруженной пластины. Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 2.
4. С р у б щ и к Л. С. и Ю д о в и ч В. И. Асимптотика уравнения большого прогиба круглой симметрично нагруженной пластины, Сибирский математ. ж., 1963, т. 4, № 3.
5. В и ш н и к М. И. и Л ю с т е р н и к Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. *Успехи математ. наук*, 1957 т. 12, вып. 5.
6. М о р о з о в Н. Ф. Единственность симметричного решения задачи о больших прогибах симметрично нагруженной круглой пластины. Докл. АН СССР. 1958, т. 123, № 3.
7. С р у б щ и к Л. С., Ю д о в и ч В. И. Асимптотическое интегрирование системы уравнений большого прогиба симметрично нагруженных оболочек вращения ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.