Прикладная математика и механика. Том 28, 1964

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. А. Баблоян

(Ереван)

При решении некоторых задач теории упругости (гидромеханики, электростатики и т. д.), когда граничные условия задачи на некоторой части граничной поверхности задаются одним образом, а на остальной части этой поверхности — другим, часто бывает целесообразным свести решение задачи к определению неизвестной функции из парных интегральных уравнений. Такие интегральные уравнения рассматривались лишь в частных случаях. Например, парные интегральные уравнения, содержащие функции Бесселя или тригонометрические функции, рассматривались в работах Кинга [1], Басбриджа [2], Нобля [3, 4] и др. Решения некоторых таких уравнений даются также в работах Титчмарш [5], Снеддона [6] и Трантера [7].

В настоящей работе рассматриваются некоторые парные интегральные уравнения, содержащие функции Лежандра с комплексным индексом (функции конуса), а также уравнения, содержащие тригонометрические функции. По-видимому, такие парные интегральные уравнения рассматриваются впервые.

Решения этих уравнений получены формально, единым методом, изложенным в работе [8]. Для одного типа уравнений доказывается справедливость полученного решения, однако для остальных уравнений это можно сделать аналогичным образом. В качестве приложения рассматривается одна задача теории упругости.

При решении рассмотренных парных интегральных уравнений используются следующие формулы.

Интегральные представления функций Лежандра с комплексным индексом [9]

$$P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\alpha \frac{\cos\tau s\, ds}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}s}},$$

$$P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\operatorname{cth}\pi\tau\int_\alpha^\infty \frac{\sin\tau s\, ds}{\sqrt{\operatorname{ch}s - \operatorname{ch}\alpha}} \qquad (0.1)$$

Преобразование Мелера—Фока [10]

$$f(\alpha) = \int_0^\infty g(\tau) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau \qquad (0<\alpha<\infty) \qquad (0.2)$$

$$g(\tau) = \tau \operatorname{th}\pi\tau \int_0^\infty f(\alpha) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{sh}\alpha\, d\alpha \qquad (\tau\geqslant 0)$$

Решение интегральных уравнений Абеля

$$f(x) = \int_a^x \frac{u(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^\mu}, \qquad u(z) = \frac{\sin\mu\pi}{\pi}\frac{d}{dz}\int_a^z \frac{f(x)\,dx}{(z-x)^{1-\mu}}$$

$$f(x) = \int_x^b \frac{u(\xi)\,d\xi}{(\xi-x)^\mu}, \qquad u(z) = -\frac{\sin\mu\pi}{\pi}\frac{d}{dz}\int_z^b \frac{f(x)\,dx}{(x-z)^{1-\mu}} \qquad (0.3)$$

Значения интегралов [11]

$$\int_0^\infty P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\cos(\tau s)\,d\tau = \begin{cases}[2(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s)]^{-1/2} & (0<s<\alpha)\\ 0 & (0<\alpha<s)\end{cases}$$

$$\int_0^\infty \operatorname{th}\pi\tau P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\sin(\tau s)\,d\tau = \begin{cases}[2(\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha)] & (0<\alpha<s)\\ 0 & (0<s<\alpha)\end{cases} \qquad (0.4)$$

В работе использованы также равенства

$$\sqrt{2}\cos\tau s = \frac{d}{ds}\int_0^s \frac{P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{sh}\alpha\,d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha}}$$

$$\sqrt{2}\sin\tau s = -\operatorname{th}\pi\tau\,\frac{d}{ds}\int_s^\infty \frac{P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{sh}\alpha\,d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s}}$$

$$\sqrt{2}\,\frac{\cos\tau s}{\tau} = \operatorname{th}\pi\tau\int_s^\infty \frac{P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{sh}\alpha\,d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s}} \qquad (0.5)$$

$$\sqrt{2}\,\frac{\sin\tau s}{\tau} = \int_0^s \frac{P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{sh}\alpha\,d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha}}$$

Они получаются формально из формул (0.1), если рассматривать их как интегральные уравнения Абеля и пользоваться решениями (0.3), или же из формул (0.4) и (0.2).

Некоторые из интегралов (0.5), возможно, не сходятся, но формально их можно использовать для более быстрого получения общих решений рассмотренных здесь парных интегральных уравнений.

§ 1. Рассмотрим парные интегральные уравнения

$$\int_0^\infty f(\tau)P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau = g(\alpha) \qquad (0<\alpha<a)$$

$$\int_0^\infty \tau\operatorname{th}\pi\tau\, f(\tau)P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau = h(\alpha) \qquad (a<\alpha<\infty) \qquad (1.1)$$

Умножим первое уравнение (1.1) на $\operatorname{sh}\alpha\,(\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha)^{-1/2}$, интегрируем по α от 0 до s и продифференцируем полученное равенство по s. Второе уравнение (1.1) умножим на $\operatorname{sh}\alpha\,(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s)^{-1/2}$ и интегрируем по α от s $(s>a)$ до ∞. Тогда, в силу полученных выше формул (0.5), систему (1.1) сводим к виду

$$\sqrt{2}\int_0^\infty f(\tau)\cos\tau s\,d\tau = G'(0,s) \qquad (0\leqslant s<a)$$

$$\sqrt{2}\int_0^\infty f(\tau)\cos\tau s\,d\tau = H(s,\infty) \qquad (a<s<\infty) \qquad (1.2)$$

где

$$G(0,c) = \int_0^c \frac{g(\alpha)\operatorname{sh}\alpha\,d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha}}, \qquad H(c,\infty) = \int_c^\infty \frac{h(\alpha)\operatorname{sh}\alpha\,d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s}} \qquad (1.3)$$

Пользуясь формулой обращения для косинус-преобразования Фурье, из (1.2) получим

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} f(\tau) = \int_0^a G'(0, s) \cos \tau s ds + \int_a^\infty H(s, \infty) \cos \tau s ds \tag{1.4}$$

Можно доказать, что если интегралы, входящие в (1.4), существуют, то решение парных интегральных уравнений (1.1) будет выражаться формулой (1.4).

Вычислим значение первого интеграла (1.1) в области $(a < \alpha < \infty)$. Подставляя значение $f(\tau)$ из (1.4) в этот интеграл и учитывая (0.4), получим

$$\pi \int_0^\infty f(\tau) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau = \int_0^a \frac{G'(0, s) ds}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} s}} + \int_a^\alpha \frac{H(s, \infty) ds}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} s}} \tag{1.5}$$

Обозначим значение второго интеграла системы (1.1) в области $(0 \leqslant \alpha < a)$ через $V(\alpha)$

$$V(\alpha) = \int_0^\infty \tau \operatorname{th} \pi\tau f(\tau) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau \qquad (0 \leqslant \alpha < a) \tag{1.6}$$

Из второго уравнения (1.1) и (1.6), в силу (0.2), получим

$$f(\tau) = \int_0^a V(\alpha) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \operatorname{sh} \alpha d\alpha + \int_a^\infty h(\alpha) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \operatorname{sh} \alpha d\alpha \tag{1.7}$$

Подставим $f(\tau)$ из (1.7) в первое уравнение (1.1), после некоторых преобразований для определения $V(\alpha)$ получим интегральное уравнение Абеля

$$\int_s^a \frac{V(\alpha) \operatorname{sh} \alpha d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} s}} = G'(0, s) - H(a, \infty) \tag{1.8}$$

решение которого в силу (0.3) имеет вид

$$-\pi \operatorname{sh} z V(z) = \frac{d}{dz} \int_z^a \frac{G'(0, s) - H(a, \infty)}{\sqrt{\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} z}} \operatorname{sh} s ds \tag{1.9}$$

§ 2. Рассмотрим теперь парные интегральные уравнения

$$\int_0^\infty \tau f(\tau) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau = g(\alpha) \qquad (0 \leqslant \alpha < a)$$

$$\int_0^\infty \operatorname{th} \pi\tau f(\tau) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau = h(\alpha) \qquad (a < \alpha < \infty) \tag{2.1}$$

Аналогичным образом, как это сделано в предыдущем параграфе, для неизвестной функции $f(\tau)$ системы (2.1) получим выражение

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} f(\tau) = \int_0^a G(0, s) \sin \tau s ds - \int_a^\infty H'(s, \infty) \sin \tau s ds \tag{2.2}$$

Для первого интеграла уравнений (2.1) в области ($a < \alpha < \infty$) и второго интеграла в области ($0 \leqslant \alpha < a$) соответственно имеем

$$-\pi \operatorname{sh} z \int_0^\infty \tau f(\tau) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} z)\, d\tau = \frac{d}{dz} \int_a^z \frac{G(0, a) + H'(s, \infty)}{\sqrt{\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} s}} \operatorname{sh} s\, ds \tag{2.3}$$

$$\pi \int_0^\infty \operatorname{th} \pi\tau f(\tau) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)\, d\tau = \int_\alpha^a \frac{G(0, s)\, ds}{\sqrt{\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} \alpha}} - \int_a^\infty \frac{H'(s, \infty)\, ds}{\sqrt{\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} \alpha}} \tag{2.4}$$

§ 3. Рассмотрим теперь парные интегральные уравнения, содержащие тригонометрические функции

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \tau^k f(\tau) \sin \tau s\, d\tau = g(s) \qquad (0 \leqslant s < a) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (k = \pm 1) \\ &\int_0^\infty \operatorname{cth} \pi\tau f(\tau) \sin \tau s\, d\tau = h(s) \qquad (a < s < \infty) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Первое уравнение (3.1) при $k = -1$ продифференцируем по s, а при $k = +1$ это же уравнение интегрируем по s от 0 до s.

Введем функцию

$$g_1(s) = g'(s) \quad \text{при } k = -1, \qquad g_1(s) = -\int_0^s g(s)\, ds + C \quad \text{при } k = +1 \tag{3.2}$$

Уравнения (3.1) можно написать в виде

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty f(\tau) \cos \tau s\, d\tau = g_1(s) \qquad (0 \leqslant s < a) \\ &\int_0^\infty \operatorname{cth} \pi\tau f(\tau) \sin \tau s\, d\tau = h(s) \qquad (a < s < \infty) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Умножим первое уравнение (3.3) на $\sqrt{2}\pi^{-1} (\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} s)^{-1/2}$ и интегрируем по s от 0 до α. Второе уравнение (3.3) умножим на $\sqrt{2}\pi^{-1} (\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} \alpha)^{-1/2}$ и интегрируем по s от α до ∞. Используя при этом формулы интегрального представления функций конуса (0.1), систему (3.3) приводим к виду

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty f(\tau) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)\, d\tau = \Omega(\alpha) \qquad (0 \leqslant \alpha < a) \\ &\int_0^\infty f(\tau) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)\, d\tau = \omega(\alpha) \qquad (a < \alpha < \infty) \end{aligned} \tag{3.4}$$

где введены обозначения

$$\Omega(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\alpha \frac{g_1(s)\, ds}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} s}}, \qquad \omega(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_\alpha^\infty \frac{h(s)\, ds}{\sqrt{\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} \alpha}} \tag{3.5}$$

Пользуясь формулой обращения для преобразования Мелера — Фока (0.2), из (3.4) получим

$$f(\tau) = \tau \operatorname{th} \pi\tau \left[\int_0^a \Omega(\alpha) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha) \operatorname{sh}\alpha d\alpha + \int_a^\infty \omega(\alpha) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha) \operatorname{sh}\alpha\, d\alpha \right] \tag{3.6}$$

Подставляя $f(\tau)$ из (3.6) в (3.1) и учитывая при этом (0.4), находим еще выражения для интегралов

$$\begin{gathered} \sqrt{2}\int_0^\infty \tau^{-1} f(\tau) \sin\tau s\, d\tau = \int_0^a \frac{\Omega(\alpha)\operatorname{sh}\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}s - \operatorname{ch}\alpha}} + \int_a^s \frac{\omega(\alpha)\operatorname{sh}\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}s - \operatorname{ch}\alpha}} \\ -\sqrt{2}\int_0^\infty \operatorname{cth}\pi\tau f(\tau) \sin\tau s\, d\tau = \frac{d}{ds}\left[\int_s^a \frac{\Omega(\alpha)\operatorname{sh}\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}s}} + \int_a^\infty \frac{\omega(\alpha)\operatorname{sh}\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}s}}\right] \end{gathered} \tag{3.7}$$

Решение системы (3.1) при $k = +1$ дается формулой (3.6) и выражается через постоянную C, которую, как легко проверить, можно представить в виде интеграла

$$C = \int_0^\infty f(\tau)\, d\tau \tag{3.8}$$

Подставляя выражение $f(\tau)$ из (3.6) в (3.8) и разрешая полученное соотношение относительно C, получим ее значение.

§ 4. Аналогичным образом решение парных интегральных уравнений

$$\begin{gathered} \int_0^\infty f(\tau) \cos\tau s\, d\tau = g_1(s) \qquad (0 \leqslant s < a) \\ \int_0^\infty \tau^k \operatorname{cth}\pi\tau f(\tau)\cos\tau s\, d\tau = h_1(s) \qquad (a < s < \infty) \qquad (k = \pm 1) \end{gathered} \tag{4.1}$$

получим в виде (3.6) и (3.5), где

$$\begin{gathered} h(s) = -h_1'(s) \quad \text{при } k = -1 \\ h(s) = -\int_s^\infty h_1(s)\, ds + C_1 \quad \text{при } k = +1 \end{gathered} \tag{4.2}$$

Для интегралов, входящих в (4.1), получаем

$$\begin{gathered} \sqrt{2}\int_0^\infty \tau^{-1}\operatorname{cth}\pi\tau f(\tau)\cos\tau s\, d\tau = \int_s^a \frac{\Omega(\alpha)\operatorname{sh}\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}s}} + \int_a^\infty \frac{\omega(\alpha)\operatorname{sh}\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}s}} \\ \sqrt{2}\int_0^\infty f(\tau)\cos\tau s\, d\tau = \frac{d}{ds}\left[\int_0^a \frac{\Omega(\alpha)\operatorname{sh}\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}s - \operatorname{ch}\alpha}} + \int_a^s \frac{\omega(\alpha)\operatorname{sh}\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}s - \operatorname{ch}\alpha}}\right] \end{gathered} \tag{4.3}$$

Неизвестная постоянная C_1 определяется таким же образом, как и постоянная C в § 3.

§ 5. Все решения рассмотренных здесь парных интегральных уравнений получены формальным путем. Докажем теперь справедливость этих решений. Сначала рассмотрим уравнения (1.1), где для простоты принимается $h(\alpha) = 0$.

Решение этих уравнений ищем в виде

$$\tau f(\tau) = \int_0^a G(s) \sin \tau s \, ds = -\tau \int_0^a G_1(s) \cos \tau s \, ds \tag{5.1}$$

где

$$G_1(s) = -\int_s^a G(s)\, ds, \qquad G_1'(s) = G(s) \tag{5.2}$$

Выразим интегралы, входящие в уравнения (1.1), через функции $G(s)$ или же $G_1(s)$. Из (5.1) и (0.4) получим

$$\int_0^\infty \tau \operatorname{th} \pi\tau \, f(\tau) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)\, d\tau = \begin{cases} J(a, \alpha) & (0 \leqslant \alpha < a) \\ 0 & (a < \alpha < \infty) \end{cases} \tag{5.3}$$

$$\int_0^\infty f(\tau) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)\, d\tau = \begin{cases} J_1(0, \alpha) & (0 \leqslant \alpha \leqslant a) \\ -J_1(a, 0) & (a \leqslant \alpha < \infty) \end{cases} \tag{5.4}$$

где

$$J(a, \alpha) = \int_\alpha^a \frac{G(s)\, ds}{\sqrt{2(\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} \alpha)}}, \qquad J_1(a, \alpha) = \int_\alpha^a \frac{G_1(s)\, ds}{\sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} s)}} \tag{5.5}$$

Из (5.3) следует, что второе уравнение (1.1) при $h(\alpha) = 0$ удовлетворяется тождественно, а из первого уравнения (1.1) и (5.4) следует, что функция $G_1(s)$ должна удовлетворять интегральному уравнению Абеля

$$J_1(a, \alpha) = -g(\alpha) \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant a) \tag{5.6}$$

решение которого имеет вид

$$-\frac{\pi}{\sqrt{2}} G_1(z) = \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{g(\alpha) \operatorname{sh} \alpha \, d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \alpha}} = \operatorname{sh} z \left[\frac{g(0)}{\sqrt{\operatorname{ch} z - 1}} + \int_0^z \frac{g'(\alpha)\, d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \alpha}}\right] \tag{5.7}$$

Легко видеть, что формулы (5.1) — (5.7) совпадают с формулами (1.3) — (1.5) и (1.9) при $h(\alpha) = 0$. В справедливости этих же формул при $h(\alpha) \neq 0$ и остальных решений парных интегральных уравнений можно убедиться аналогичным образом.

§ 6. При решении задач теории упругости в тороидальных координатах встречаются парные интегральные уравнения следующих видов:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty f(\tau)\,[1 + N(\tau)]\, P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)\, d\tau = g(\alpha) && (0 \leqslant \alpha < a) \\ &\int_0^\infty \tau \operatorname{th} \pi\tau f(\tau)\, P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)\, d\tau = 0 && (a < \alpha < \infty) \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \tau f(\tau)\, P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)\, d\tau = 0 && (0 \leqslant \alpha < a) \\ &\int_0^\infty \operatorname{th} \pi\tau f(\tau)\,[1 + N(\tau)]\, P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)\, d\tau = g(\alpha) && (a < \alpha < \infty) \end{aligned} \tag{6.2}$$

Здесь функция $N(\tau)$ предполагается абсолютно интегрируемой.

Решение парных уравнений (6.1) представим в виде (5.1) и (5.2). Тогда в силу (5.3) второе уравнение (6.1) будет удовлетворяться тождественно. Пользуясь формулами (0.1), (0.4) и (5.1), для первого интеграла (6.1) получим выражение

$$
\begin{gathered}
-\int_0^\infty f(\tau)\,[1+N(\tau)]\,P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau = \\
=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}x}}\int_0^a K(x,s)\,G_1(s)\,ds+\begin{cases}-J_1(0,\alpha) & (0\leqslant\alpha\leqslant a)\\ J_1(a,0) & (a\leqslant\alpha<\infty)\end{cases}
\end{gathered}
\tag{6.3}
$$

где

$$
K(x,s)=\int_0^\infty N(\tau)\cos\tau s\cos\tau x\,d\tau \tag{6.4}
$$

Из первого уравнения (6.1), (6.3) и (5.5) получим интегральное уравнение Абеля

$$
\int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}x}}\left[\frac{G_1(x)}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^a K(x,s)\,G_1(s)\,ds\right]=-g(\alpha)
$$

Отсюда в силу (0.3) для определения неизвестной функции $G_1(x)$ получается интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$
G_1(x)+\frac{2}{\pi}\int_0^a K(x,s)G_1(s)\,ds=-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\operatorname{sh}x\left[\frac{g(0)}{\sqrt{\operatorname{ch}x-1}}+\int_0^x\frac{g'(\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}\alpha}}\right] \tag{6.5}
$$

ядро которого представляет собой непрерывную и симметричную относительно своих аргументов функцию. Легко показать, что число $2/\pi$ не будет собственным числом ядра (6.4).

Если решение парных уравнений (6.2) ищем в виде (6.6)

$$
\tau f(\tau)=\int_a^\infty H(s)\cos\tau s\,ds=\tau\int_a^\infty H_1(s)\sin\tau s\,ds,\qquad H_1(s)=\int_a^s H(s)\,ds
$$

то аналогичным образом для $H_1(s)$ получим интегральное уравнение

$$
H_1(x)+\frac{2}{\pi}\int_a^\infty K_1(x,s)\,H_1(s)\,ds=-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{d}{dx}\int_x^\infty\frac{g(\alpha)\operatorname{sh}\alpha d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}x}} \tag{6.7}
$$

Здесь

$$
K_1(x,s)=\int_0^\infty N(\tau)\sin\tau x\sin\tau s\,d\tau \tag{6.8}
$$

§ 7. В качестве примера рассмотрим задачу о кручении усеченного шара, когда скручивание осуществляется поворотом жесткого круглого штампа, закрепленного централько на плоской части граничной поверхности, при закрепленной сферической части поверхности усеченного шара (фигура).

Остальную часть плоской поверхности усеченного шара для простоты считаем свободной от внешних нагрузок.

В тороидальной системе координат[1] (α, β, φ)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{c \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \qquad z = \frac{c \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \qquad (c > 0) \tag{7.1}$$

рассмотренная задача сводится к интегрированию уравнения Мичеля

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \beta^2} + \frac{3(\operatorname{ch} \alpha \cos \beta + 1)}{\operatorname{sh} \alpha (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{3 \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = 0 \tag{7.2}$$

при следующих граничных условиях ($\varkappa$ — угол поворота штампа)

$$v(\alpha, 0) = \varkappa r \ (0 \leqslant \alpha < a), \quad \tau_{\beta\varphi}(\alpha, 0) = 0 \ (a < \alpha < \infty), \quad v(\alpha, \beta_1) = 0 \ (0 \leqslant \alpha < \infty) \tag{7.3}$$

Напряжения $\tau_{\alpha\varphi}$, $\tau_{\beta\varphi}$ и перемещение v выражаются через функцию перемещения $\Psi(\alpha, \beta)$ формулами

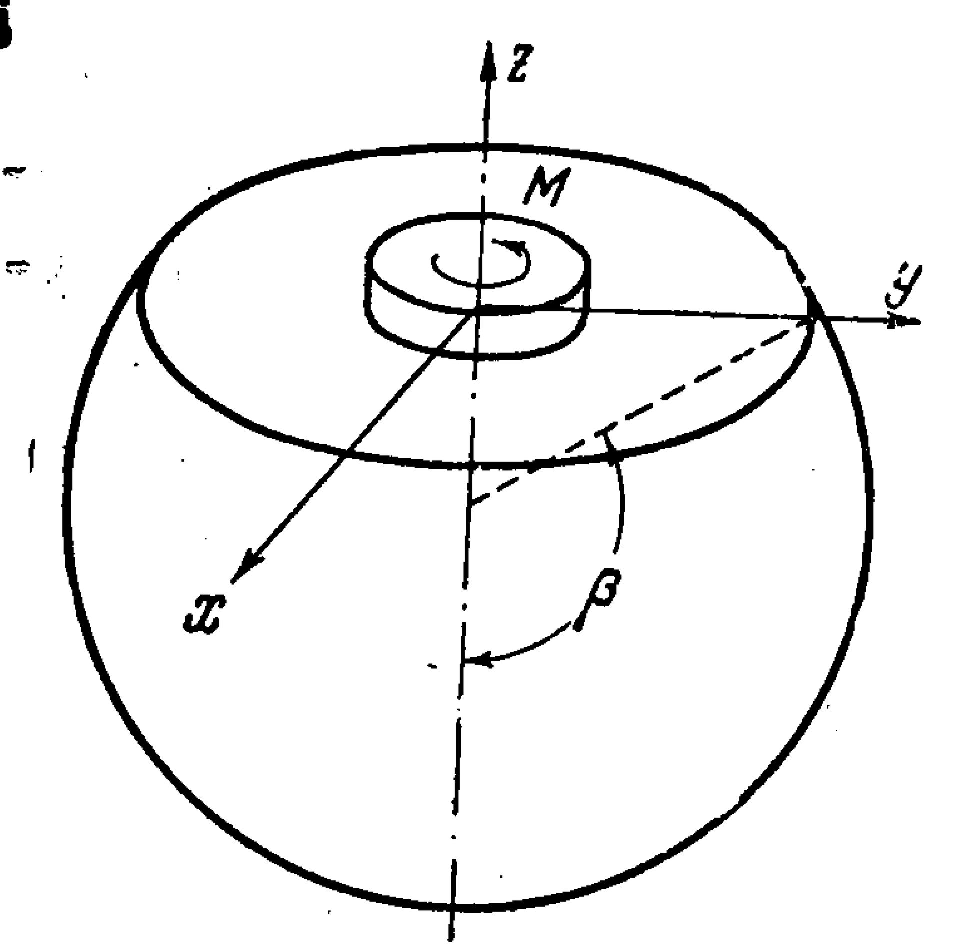
$$\tau_{\alpha\varphi} = G \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}, \qquad \tau_{\beta\varphi} = G \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial \beta}, \qquad v = \frac{c \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \Psi(\alpha, \beta) \tag{7.4}$$

Решение уравнения (7.2) ищем в виде интеграла

$$\Psi(\alpha, \beta) = \frac{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^{3/2}}{\operatorname{sh} \alpha} \int_0^\infty f(\tau) \operatorname{th} \pi\tau \frac{\operatorname{sh} \tau(\beta_1 - \beta)}{\operatorname{ch} \tau\beta_1} P^1_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)\, d\tau \tag{7.5}$$

где $P^1_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)$ — присоединенная функция Лежандра.

При выборе (7.5) последнее условие (7.3) удовлетворяется тождественно. Удовлетворяя первым двум условиям (7.3), для определения неизвестной функции $f(\tau)$, входящей в (7.5), получим парные интегральные уравнения



$$\int_0^\infty f(\tau) \operatorname{th} \pi\tau \operatorname{th} \beta_1\tau P^1_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)\, d\tau = \frac{\varkappa \operatorname{sh} \alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + 1)^{3/2}} \qquad (0 \leqslant \alpha < a) \tag{7.6}$$

$$\int_0^\infty \tau f(\tau) \operatorname{th} \pi\tau P^1_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)\, d\tau = 0 \qquad (a < \alpha < \infty)$$

Учитывая результаты § 6 и формулу [12]

$$P^1_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{d}{d\alpha} P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)$$

решение парных интегральных уравнений (7.6) сводим к определению функции $G_1(x)$ из интегрального уравнения Фредгольма второго рода с симметричным ядром

$$G_1(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^a K(x, s) G_1(s)\, ds = -\frac{2}{\pi} \operatorname{ch} \frac{x}{2} \left[g(0) + k \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}\right] \tag{7.7}$$

где

$$K(x, s) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(\pi - \beta_1)}{\operatorname{ch} \pi\tau \operatorname{ch} \beta_1\tau} \cos \tau s \cos \tau x\, d\tau \tag{7.8}$$

[1] Эти координаты подробно изложены в книге Я. С. Уфлянда [12].

Для $\beta_1 = {}^1/_2\,\pi$ (полушар) и для $\beta_1 = \pi$ (полупространство) ядро интегрального уравнения (7.7) принимает соответственно следующие виды

$$K(x,\, s) = \frac{\operatorname{ch} {}^1/_2\, x \operatorname{ch} {}^1/_2 s}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} s}$$

$$K(x,\, s) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{s + x}{\operatorname{sh} {}^1/_2\,(s + x)} + \frac{s - x}{\operatorname{sh} {}^1/_2\,(s - x)}\right]$$

Неизвестную постоянную $g\,(0)$, входящую в (7.7), будем определять из условия конечности суммы касательных напряжений $\tau_{\beta\varphi}$, действующих под штампом, т. е. таким же образом, каким определялась постоянная C_0 в работе [13].

Поступила 7 VII 1964

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. King L. V. On the Acoustic Radiation Pressure on Circular Discs: Inertia and Diffraction Corrations. Proc. Roy. Soc. London (Ser. A), 1935, vol. 153, No. 878. p. 1.
2. Busbridge I. W. Dual integral equations. Proc. London Math. Soc., 1938, vol. 44, No. 115.
3. Нобл Б. Метод Винера — Хопфа. Изд. иностр. лит., М., 1942.
4. Noble B. Certain dual integral equations. J. Math. and Phys., 1958, vol. 37, No. 2, p. 128.
5. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, М., 1948.
6. Sneddon I. N. Dual equations in elasticity. IUTAM. Международный симпозиум по приложениям теории функций в механике сплошной среды (Тбилиси, 17—23 сентября 1963). Аннотации докл., М., 1963, стр. 49.
7. Tranter C. J. A further note on dual integral equations and an application to the diffraction of electromagnetic waves. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, vol. 7, p. 317.
8. Баблоян А. А. Решение некоторых парных рядов. Докл. АН АрмССР, 1964, т. 39, № 5.
9. Гобсон Е. Теория сферических и эллипсоидальных функций. Изд. иностр. лит., 1952.
10. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Физматгиз. М.—Л., 1963.
11. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.
12. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1963.
13. Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А., О двух контактных задачах для упругой сферы. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.