

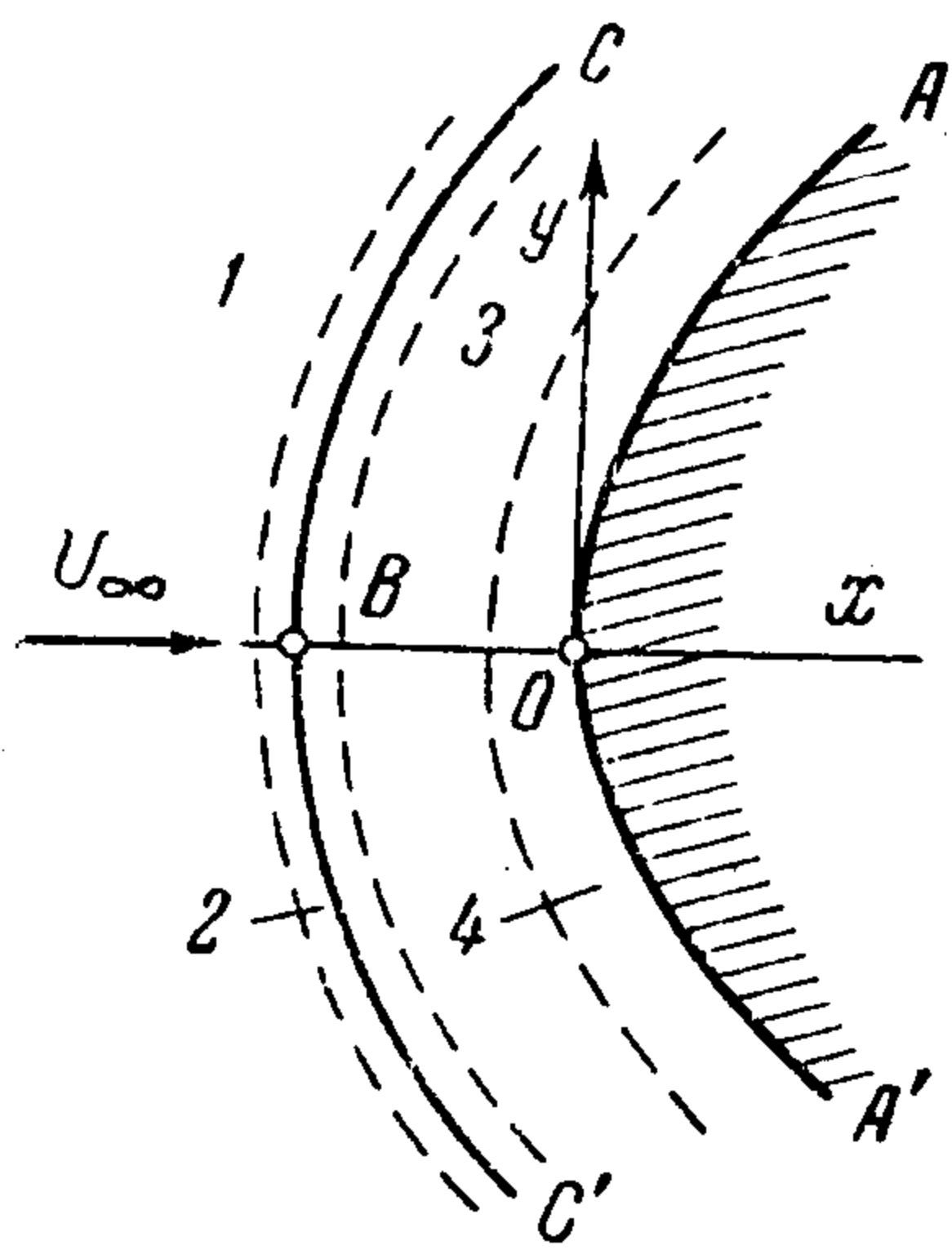
К ТЕОРИИ ОБТЕКАНИЯ ТУПОНОСОГО ТЕЛА ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОГО ГАЗА

Б. М. Булах

(Саратов)

Рассмотрена плоская и осесимметричная задача обтекания тупоносого тела однородным гиперзвуковым потоком вязкого совершенного газа в случае, когда обычная теория пограничного слоя недостаточна и требуются высшие приближения к решениям уравнений Навье—Стокса. При помощи известного метода «внешних» и «внутренних» разложений получены условия на головной ударной волне для второго приближения к решению вне пограничного слоя (первым приближением является невязкий поток). Рассмотрены краевые задачи, возникающие при определении второго приближения.

При полетах на большой высоте с очень большой скоростью теория континуума становится непригодной, и необходимо использовать кинетическую теорию газов. Однако пока число Кнудсена будет меньше 0.15, большинство аэродинамических задач можно рассматривать при помощи уравнений Навье—Стокса с учетом скольжения на поверхности обтекаемого тела (см. работы Стрита, Шермана и Толбота и др. в [1]). Теория пограничного слоя в этих условиях становится недостаточной, и требуется следующее приближение к решениям уравнений Навье—Стокса. Систематическое рассмотрение эффектов второго порядка сделано в работе Ван-Дайка [2], который использовал известный метод «внешних» и «внутренних» решений. Им, в частности, получены граничные условия на теле для определения второго приближения вне



Фиг. 1

пограничного слоя. В настоящей работе получены граничные условия на головной ударной волне для второго приближения путем построения асимптотических представлений решения уравнений Навье—Стокса вне и внутри области головного скачка и их склеивания.

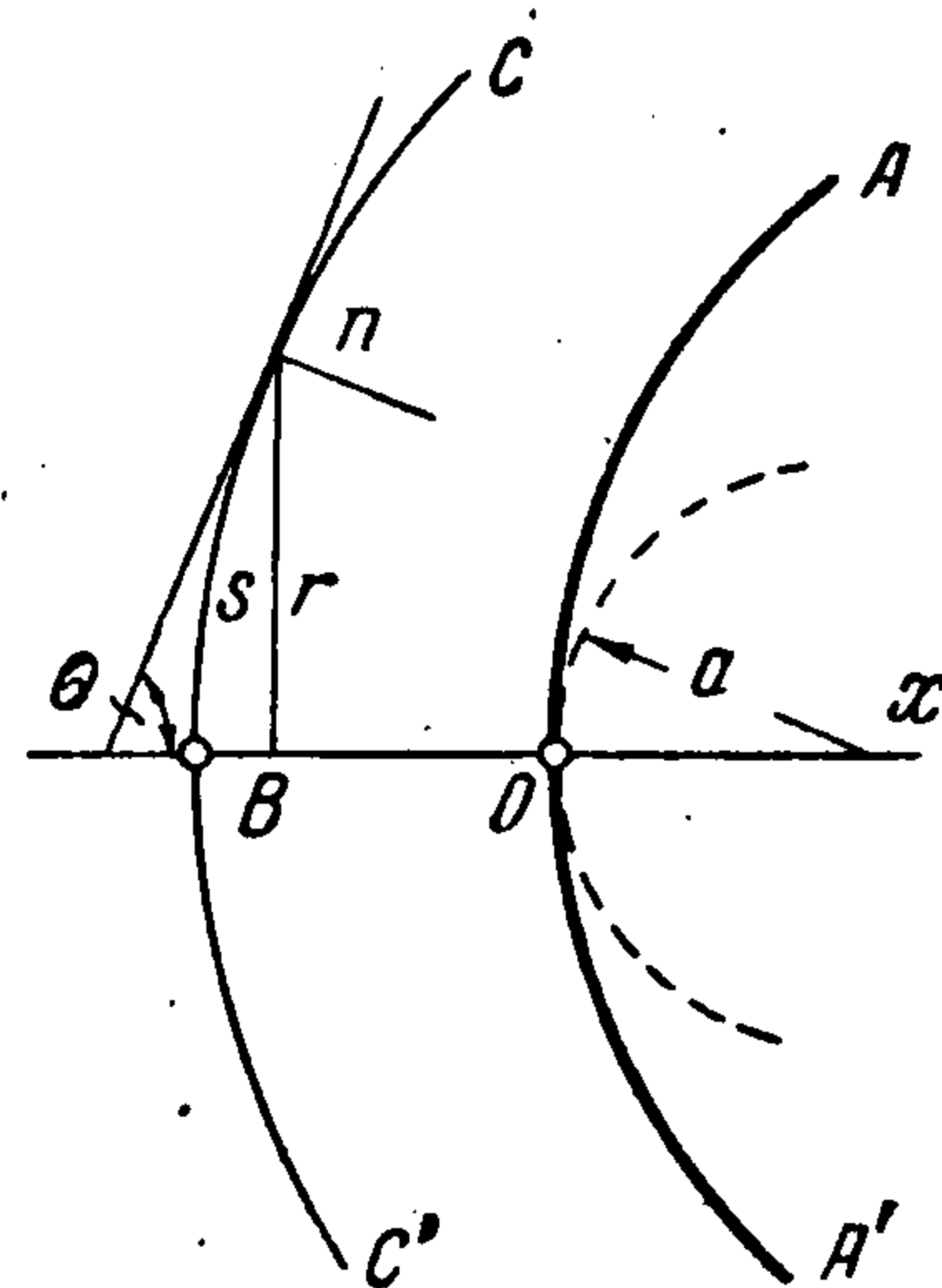
1. Рассмотрим плоскую или осесимметричную задачу обтекания контура однородным гиперзвуковым потоком вязкого совершенного газа (фиг. 1).

Здесь AOA' — контур обтекаемого тела; область 4 — пограничный слой, область 2 — ударная волна, которая рассматривается как область с большими градиентами параметров газа. Предполагается, что гладкий контур AOA' составлен из аналитических дуг, от точки O до предельных характеристик (см. п. 6) дуга контура — аналитическая кривая; газ совершенный, т. е. его уравнение состояния есть $p = R\rho T$, p — давление, ρ — плотность, T — абсолютная температура, R — газовая постоянная, теплоемкости при постоянном давлении c_p и объеме c_v постоянны, внутренняя энергия $e = c_v T$; коэффициенты вязкости μ , λ — функции только T ; число Прандтля σ постоянно; течение газа описывается уравнениями Навье—Стокса; режим течения ламинарный.

Параметры невозмущенного потока обозначаем индексом ∞ , так M_∞ — число Маха невозмущенного потока, U_∞ — его скорость. При

$\mu, \lambda \rightarrow 0$ область 2 превращается в поверхность CBC' , а область 4 исчезает. При гиперзвуковом режиме ($M_\infty \gg 1$) области 2 и 4 всегда разделены [2], характерная температура и энтальпия в областях 3 и 4 будут соответственно $U_\infty^2 c_p^{-1}$ и U_∞^2 ; радиус кривизны тела a и радиус кривизны скачка в точках B и O будут одного порядка.

Введем криволинейную систему координат s, n (фиг. 2). Здесь s и n отсчитываются вдоль дуги BC и по нормали к ней. Тогда, если отнести линейные величины к a , скорость газа — к U_∞ , давление — к $\rho_\infty U_\infty^2$, плотность — к ρ_∞ , температуру — к $U_\infty^2 c_p^{-1}$, энтропию и энтальпию газа — соответственно к c_p и U_∞^2 , коэффициенты вязкости — к значению μ при $T = U_\infty^2 c_p^{-1}$, то уравнения неразрывности, количества движения, энергии и уравнение состояния газа запишутся в выбранной криволинейной системе координат в следующем виде [2]:



Фиг. 2

$$[(r + n \cos \theta)^j \rho u]_s + [(1 + kn)(r + n \cos \theta)^j \rho v]_n = 0 \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2} \left[\rho \left(u \frac{u_s}{1 + kn} + v u_n + \frac{k}{1 + kn} uv \right) + \frac{p_s}{1 + kn} \right] &= \left[\mu \left(u_n + \frac{v_s - ku}{1 + kn} \right) \right]_n + \\ &+ \frac{2}{1 + kn} \left[\mu \frac{u_s + kv}{1 + kn} \right]_s + \mu \left(\frac{2k}{1 + kn} + \frac{j \cos \theta}{r + n \cos \theta} \right) \left(u_n + \frac{v_s - ku}{1 + kn} \right) + \\ &+ \frac{2j\mu}{(1 + kn)(r + n \cos \theta)} \left[\frac{u_s + kv}{1 + kn} - \frac{u}{(1 + kn)(r + n \cos \theta)} (r + n \cos \theta)_s + \right. \\ &+ \left. \frac{v \cos \theta}{r + n \cos \theta} \right] (r + n \cos \theta)_s + \frac{1}{1 + kn} \left[\lambda \left(\frac{u_s + kv}{1 + kn} + v_n \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{j\lambda}{r + n} \left(\frac{u}{1 + kn} (r + n \cos \theta)_s + v \cos \theta \right) \right]_s \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2} \left[\rho \left(u \frac{v_s}{1 + kn} + v v_n - \frac{k}{1 + kn} u^2 \right) + p_n \right] &= 2(\mu v_n)_n + \\ &+ \frac{1}{1 + kn} \left[\mu \left(u_n + \frac{v_s - ku}{1 + kn} \right) \right]_n + 2\mu k \left(\frac{k}{1 + kn} + \right. \\ &+ \left. \frac{j \cos \theta}{r + n \cos \theta} \right) v_n - 2\mu \frac{k}{1 + kn} \frac{u_s + kv}{1 + kn} - \frac{2j\mu \cos \theta}{(r + n \cos \theta)^2} \times \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} &\times \left[\frac{u}{1 + kn} (r + n \cos \theta)_s + v \cos \theta \right] + \frac{j\mu}{(1 + kn)(r + n \cos \theta)} \left(u_n + \frac{v_s - ku}{1 + kn} \right) \times \\ &\times (r + n \cos \theta)_s + \left[\lambda \frac{u_s + kv}{1 + kn} + \lambda v_n + \frac{j\lambda}{r + n \cos \theta} \left(\frac{u}{1 + kn} (r + n \cos \theta)_s + v \cos \theta \right) \right]_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2} \left[\rho \left(u \frac{T_s}{1 + kn} + v T_n \right) - \left(u \frac{p_s}{1 + kn} + v p_n \right) \right] &= \\ &= \frac{\sigma^{-1}}{1 + kn} \left(\frac{\mu T_s}{1 + kn} \right)_s + \sigma^{-1} (\mu T_n)_n + \frac{j\sigma^{-1} \mu T_s}{(1 + kn)^2 (r + n \cos \theta)} (r + n \cos \theta)_s + \\ &+ \sigma^{-1} \left(\frac{k}{1 + kn} + \frac{j \cos \theta}{r + n \cos \theta} \right) \mu T_n + \Phi \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\Phi = \mu \left[2 \left(\frac{u_s + kv}{1 + kn} \right)^2 + 2v_n^2 + \frac{2j}{(r + n \cos \theta)^2} \left(\frac{n}{1 + kn} (r + n \cos \theta)_s + v \cos \theta \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(u_n + \frac{v_s - ku}{1 + kn} \right)^2 \right] + \\ + \lambda \left[\frac{u_s + kv}{1 + kn} + v_n + \frac{j}{r + n \cos \theta} + \left(\frac{u}{1 + kn} (r + n \cos \theta)_s + v \cos \theta \right) \right]^2 \quad (1.5)$$

$$p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho T, \quad \varepsilon = \left[\frac{\mu (U_\infty^2 c_p^{-1})}{\rho_\infty U_\infty a} \right]^{1/2}, \quad \mu = \mu(T), \quad \lambda = \lambda(T) \quad (1.6)$$

Здесь u, v — компоненты скорости в направлении увеличения s и n соответственно; $r = r(s), \theta = \theta(s)$ — расстояние и угол наклона касательной к оси x (фиг. 2) для точки дуги CBC' , а $k = k(s)$ — ее кривизна, отнесенная к a^{-1} . Индексы s и n внизу около знака функции означают дифференцирование. Для плоского случая $j = 0$, для осесимметричного $j = 1$. Малый параметр ε для газа с $\mu = \text{const}$ будет равен $\varepsilon = R_\infty^{-1/2}$, где R_∞ — число Рейнольдса для невозмущенного потока.

2. Для нахождения решения задачи в пограничном слое (фиг. 1 область 4) Ван-Дайк [2] использовал метод «внутренних» и «внешних» разложений по параметру ε . Первый член внутреннего разложения в области 4 дает обычную теорию пограничного слоя, следующий учитывает эффекты второго порядка (в частности скольжение, скачок температуры на поверхности тела). Для течения в области 3 Ван-Дайк получил асимптотические разложения типа

$$f = F_0(s, n) + \varepsilon F_1(s, n) + \dots \quad (f = p, \rho, u, v, T) \quad (2.1)$$

Для нахождения коэффициентов F_1 в (2.1), знание которых требуется при уточнении результатов теории пограничного слоя, нужно задать компоненту скорости, нормальную к поверхности обтекаемого тела, и соотношения между F_1 на головном скачке CBC' (фиг. 1). Первое имеется в работе [2], вывод условий на скачке следует далее.

3. Для решения этой задачи используем метод «внутренних» и «внешних» разложений. В областях 1 и 3 (фиг. 1) для u, v, p, ρ, T принимается разложение типа (2.1) («внешние» решения). Внутри ударной волны (фиг. 1, область 2) принимаются разложения типа («внутренние» решения)

$$f = f_0(s, N) + \varepsilon f_1(s, N) + \dots, \quad N = n\varepsilon^{-2} \quad (3.1)$$

Этот тип разложения подсказывается рассмотрением одномерного случая и разложениями (2.1). Действительно, предположим, что при $n \rightarrow 0$ функции F_0, F_1, \dots представимы асимптотически степенными рядами; тогда при малых n из (3.1) получим

$$f = [F_{00}(s) + F_{01}(s)n + \dots] + \varepsilon [F_{10}(s) + F_{11}(s)n + \dots] + \dots \quad (3.2)$$

После перехода к N и перегруппировки членов ряда (3.2) имеем

$$f = [F_{00}(s)] + \varepsilon [F_{10}(s)] + \varepsilon^2 [F_{20}(s) + F_{01}(s)N] + \dots \quad (3.3)$$

Это равенство должно представлять f при больших N и малых n (условие склеивания разложений).

Из (3.3) следует, что «внутреннее» разложение имеет вид (3.1) и

$$f_{0N}, \quad f_{1N} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \pm \infty \quad (3.4)$$

Отметим, что, так же как в несжимаемой жидкости [3], решение уравнений Навье — Стокса, как показывает рассмотрение частных примеров, состоит из двух частей: одна — представляется асимптотически степенным рядом по ε , другая — носит экспоненциальный характер относительно ε^{-1} . Поэтому более точно условия (3.4) можно записать при больших N в виде $f_0(s, N) \sim F_{00}(s) +$ экспоненциальные члены, $f_1(s, N) \sim F_{10}(s) +$ экспоненциальные члены, $f_2(s, N) \sim F_{20}(s) + F_{01}(s)N +$ экспоненциальные члены, и т. д. (При $N \rightarrow \pm \infty$ функции $F_{kl}(s)$ различны.)

4. Выведем уравнения для коэффициентов F_1 в области I (фиг. 1). Здесь удобнее использовать декартовы координаты x, y, z . Разложение принимается в виде

$$\begin{aligned} p &= p_0(x, y, z) + \varepsilon p_1(x, y, z) + \dots, & T &= T_0(x, y, z) + \varepsilon T_1(x, y, z) + \dots \\ \rho &= \rho_0(x, y, z) + \varepsilon \rho_1(x, y, z) + \dots, & \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0(x, y, z) + \varepsilon \mathbf{v}_1(x, y, z) + \dots \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{v} (v_x, v_y, v_z)$ — вектор скорости. Подставляя (4.1) в уравнения неразрывности, количества движения, энергии и учитывая, что на члены с ε члены с вязкостью не влияют, а члены с нуликом — постоянные, соответствующие однородному потоку при $x = -\infty$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} &= -\frac{\partial p_1}{\partial x}, & \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} &= -\frac{\partial p_1}{\partial y}, & \frac{\partial v_{1z}}{\partial x} &= -\frac{\partial p_1}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_1}{\rho_0} - \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) &= 0, & \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Потребуем, чтобы

$$\mathbf{v}_1, p_1, \rho_1 \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty \quad (4.3)$$

по любому направлению, отличному от характеристического (см. п. 7).

Из (4.2), (4.3) получим

$$p_1 = -v_{1x}, \quad \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{p_1}{\rho_0}, \quad \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial v_{1x}}{\partial y} = \frac{\partial v_{1z}}{\partial x} - \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} = 0 \quad (4.4)$$

т. е. в плоском и осесимметричном случаях $\text{rot } \mathbf{v}_1 = 0$ и $\mathbf{v}_1 = \text{grad } \varphi$, где φ удовлетворяет уравнению

$$-m^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad m = (M_\infty^2 - 1)^{1/2} \quad (4.5)$$

Покажем теперь, что условие (4.3) не накладывает никаких ограничений на \mathbf{v}_1 на конечном участке дуги CBC' (фиг. 1). Наиболее просто это получается для плоского случая. Здесь $\partial / \partial z = 0$ и общее решение (4.5) есть $\varphi = g_1(x + my) + g_2(x - my)$, где g_1, g_2 определяются, если задать \mathbf{v}_1 на CBC' (фиг. 1).

Условие (4.3) выполнено, если $g_1'(\pm \infty) = g_2'(\pm \infty) = 0$. Штрих означает производную. Тот же результат имеет место и для осесимметричного случая, если представить решение (4.5) по известной формуле Вольтерра.

Следовательно, условия затухания возмущений при $x \rightarrow -\infty$ в области 1 (фиг. 1) оставляют на конечном участке SBC' произвольными $u_1(s, n)$, $v_1(s, n)$, а p_1, ρ_1 связаны соотношениями (4.4), которые запишем в виде

$$p_1 / p_0 = \gamma \rho_1 / \rho_0, \quad p_1 = -(u_1 \cos \theta + v_1 \sin \theta) \quad (4.6)$$

5. Рассмотрим течение внутри скачка (фиг. 1, область 2). Разложение для решения принимается в виде (3.1)

$$\begin{aligned} p &= p_0(s, N) + \varepsilon p_1(s, N) + \dots, & T &= T_0(s, N) + \varepsilon T_1(s, N) + \dots \\ \rho &= \rho_0(s, N) + \varepsilon \rho_1(s, N) + \dots, & u &= u_0(s, N) + \varepsilon u_1(s, N) + \dots \\ v &= v_0(s, N) + \varepsilon v_1(s, N) + \dots, & N &= n\varepsilon^{-2} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Переходя в уравнениях (1.1) — (1.4) к N и s , получим систему

$$\begin{aligned} (\rho v)_N &= O(\varepsilon^2), & \rho v u_N &= (\mu u_N)_N + O(\varepsilon^2) \\ \rho v v_N + p_N &= [(\lambda + 2\mu) v_N]_N + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\rho v T_N - v p_N = -\sigma^{-1} (\mu T_N)_N + (\lambda + 2\mu) v_N^2 + \mu u_N^2 + O(\varepsilon^2)$$

$$p = [(\gamma - 1) / \gamma] \rho T$$

Кривизна скачка влияет только на члены $O(\varepsilon^2)$ в (5.2), поэтому уравнения для коэффициентов с индексами 0 и 1 получаются такими же, как в одномерной задаче, если $u_N = 0$. Приводим только те из уравнений, из которых следует, что $u_{0N} = u_{1N} = 0$. Из соотношений

$$\rho_0 v_0 = a = \text{const}, \quad a u_{0N} = (\mu_0 u_{0N})_N, \quad \mu_0 = \mu_0(T_0)$$

следует

$$\mu_0 u_{0N} = \text{const} \exp\left(\int \frac{a}{\mu_0} dN\right)$$

Так как $0 \neq \mu_0 < \infty$, то $u_{0N} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \pm \infty$ только в случае $u_{0N} \equiv 0$. Для u_{1N} , с учетом $u_{0N} = 0$, получим $a u_{1N} = (\mu_0 u_{1N})_N$; отсюда при условии $u_{1N} \rightarrow 0$, $N \rightarrow \pm \infty$ следует $u_{1N} = 0$.

Введем для удобства символ $\{f\} = (f)_{N \rightarrow +\infty} - (f)_{N \rightarrow -\infty}$. Тогда для одномерной задачи имеют место хорошо известные соотношения

$$\{\rho v\} = 0, \quad \{\rho v^2 + p\} = 0, \quad \left\{ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right\} = 0 \quad (5.3)$$

которые следуют только из условий

$$v_N, \quad p_N, \quad \rho_N, \quad T_N \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \pm \infty$$

По этим причинам можно ожидать, что соотношения, которые связывают $p_0, p_1, \rho_0, \rho_1, u_0, u_1, v_0, v_1$ при $N \rightarrow \pm \infty$, получатся из (5.3) после подстановки (5.1) приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε . Они имеют вид

$$\{u_0\} = 0, \quad \{p_0 v_0^2 + p_0\} = 0, \quad \left\{ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{v_0^2}{2} \right\} = 0, \quad \{\rho_0 v_0\} = 0 \quad (5.4)$$

$$\{u_1\} = 0, \quad \{2v_0 \rho_0 v_1 + v_0^2 \rho_1 + p_1\} = 0, \quad \{\rho_0 v_1 + \rho_1 v_0\} = 0$$

$$\left\{ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{p_1}{\rho_0} - \frac{p_0 \rho_1}{\rho_0^2} \right) + v_0 v_1 \right\} = 0 \quad (5.5)$$

Автор получил также (5.5) непосредственно из уравнений для величин с индексом 0 и 1 условия, что производные этих величин обращаются в нуль при $N \rightarrow \pm \infty$ (см. (3.4)). Соотношения (5.4) есть обычные условия на скачке для невязкого потока. В соотношениях (5.5) при $N \rightarrow -\infty$ величины u_1, v_1 исключают u_1, v_1 при $N \rightarrow -\infty$, то получим два соотношения, связывающих u_1, v_1, p_1, ρ_1 при $N \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow 0$), т. е.

$$u_1 \cos \theta + v_0 v_1 + (v_0^2 - v_0 \sin \theta) \rho_1 + p_1 = 0 \quad (5.6)$$

Опуская несложные вычисления, приводим окончательный результат

$$u_1 \cos \theta - \dots \text{берутся при подходе к } CBC' \text{ (фиг. 1 части 3).}$$

Все для коэффициентов с индексом 1 в разложениях (2.1) (фиг. 1) получаются фактически из уравнений невязкого потока с вязкостью будут $O(\epsilon^2)$ и имеют вид

$$n \cos \theta)^j (\rho_0 u_{1s} + \rho_1 u_{0s}) + [(1 + kn) (r + n \cos \theta)^j (\rho_0 v_{1n} + \rho_1 v_{0n})]_n = 0$$

$$+ u_0 u_{1s} + u_1 u_{0s} (1 + kn)^{-1} + v_0 u_{1n} + v_1 u_{0n} + k (1 + kn)^{-1} (u_0 v_{1n} + u_1 v_{0n}) + (1 + kn)^{-1} (\rho_0^{-1} p_{1s} - \rho_1 \rho_0^{-2} p_{0s}) = 0$$

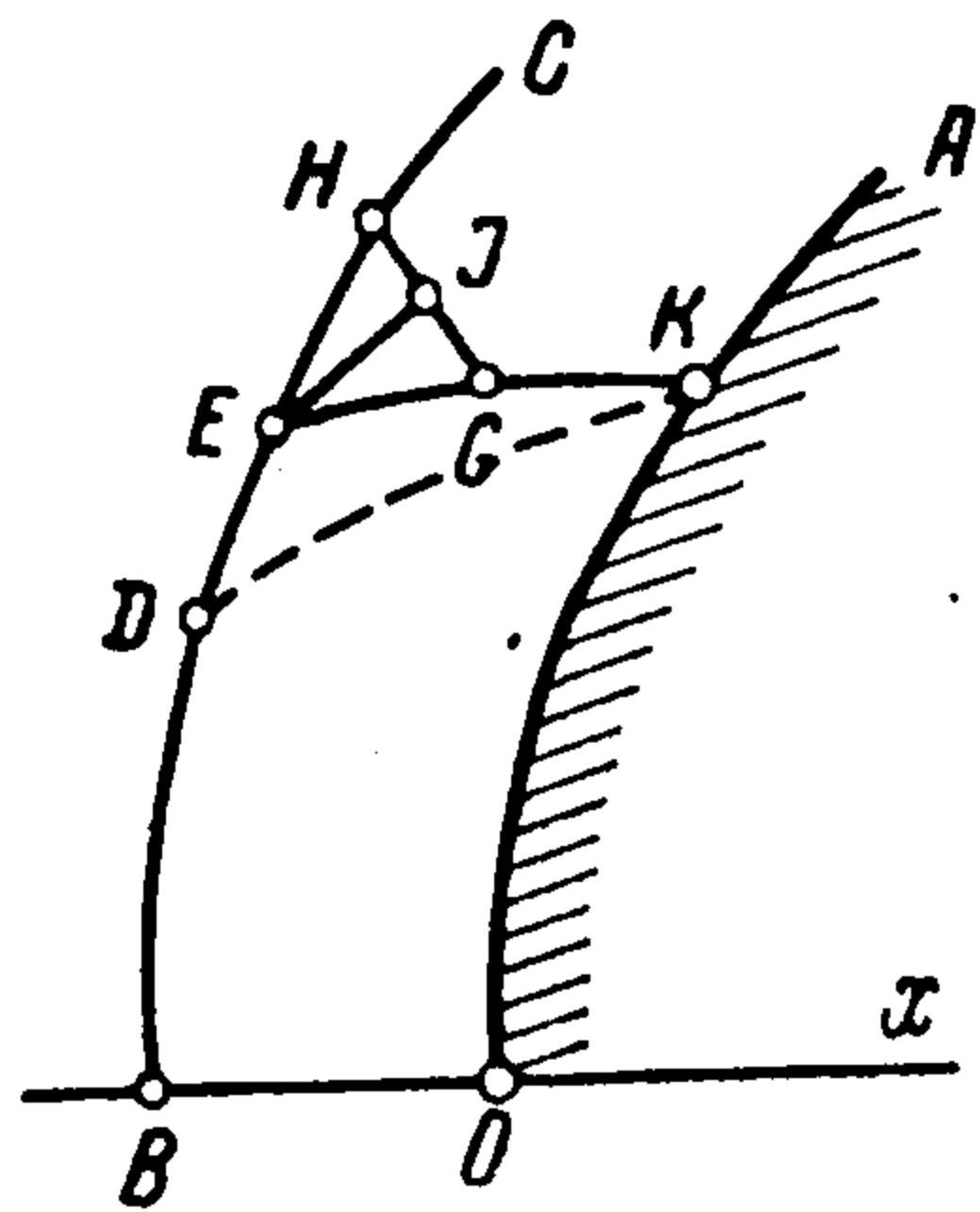
$$(u_0 v_{1s} + u_{0s} v_{1n}) (1 + kn)^{-1} + v_0 v_{1n} + v_1 v_{0n} - k (1 + kn)^{-1} 2u_0 u_{1n} + p_{1n} \rho_0^{-1} - \rho_1 \rho_0^{-2} p_{0n} = 0$$

$$\rho_0 [(u_0 T_{1s} + u_1 T_{0s}) (1 + kn)^{-1} + v_0 T_{1n} + v_1 T_{0n}] + \rho_1 [u_0 T_{0s} (1 + kn)^{-1} + v_0 T_{0n}] - (u_0 p_{1s} + u_1 p_{0s}) (1 + kn)^{-1} - v_0 p_{1n} - v_1 p_{0n} = 0$$

$$p_1 = (\rho_0 T_1 + \rho_1 T_0) (\gamma - 1) / \gamma \quad (6.1)$$

Тип уравнений (6.1) определяется решением невязкой задачи. В частности, характеристики (6.1) совпадают с характеристиками невязкой задачи.

Трансзвуковая область (фиг. 3), в которой нужно в первую очередь найти $u_1, v_1, p_1, \rho_1, T_1$, ограничена предельной характеристикой EK , поверхностью тела OK , осью симметрии BO и отрезком ударной волны BE (DK — звуковая линия). Требуется найти решение (6.1) по граничным условиям: на OK задается нормальная составляющая v_1 [2]; на BO — условия симметрии; на дуге EB , положение которой известно из решения невязкой задачи, — два условия (5.6), на EK , положение которой также известно, — связь между дифференциалами искомых величин, имеющая место на характеристике уравнений (6.1) (ограниченность производных на характеристике EK).



Фиг. 3

