

## ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

А. Л. Гонор (Москва)

В работах [1,2] показано, что звездообразная форма поперечного сечения корпуса летательного аппарата позволяет в десятки раз уменьшить волновое сопротивление по сравнению с эквивалентным по площади миделя или объему телом вращения. В связи с тем, что выводы основаны на использовании для распределения давления формулы Ньютона, необходимо выяснить, не является ли такое уменьшение сопротивления фиктивным за счет роста ошибки в последней. Ответ могло бы дать сравнение с точным решением. Однако для пространственных тел известно только одно точное решение [3], применение которого, как показало исследование, ограничено пирамидальными телами, далекими по форме от оптимальных. В свете сказанного представляет интерес построить точное решение для пространственных тел звездообразной формы, подобных изученным в работе [1].

Рассмотрим систему плоских пересекающихся скачков, проходящих через начало координат и определяемых углами  $\alpha$  и  $\gamma$  (фиг. 1). Скорость набегающего потока и число Маха обозначим соответственно через  $U$  и  $M_\infty$ . Введем вспомогательный угол  $\gamma_1$  по формуле  $\text{tg } \gamma_1 = \text{tg } \gamma \sin \alpha$ , тогда компоненты скорости за первым скачком, отнесенные к величине скорости набегающего потока, определяются из выражений

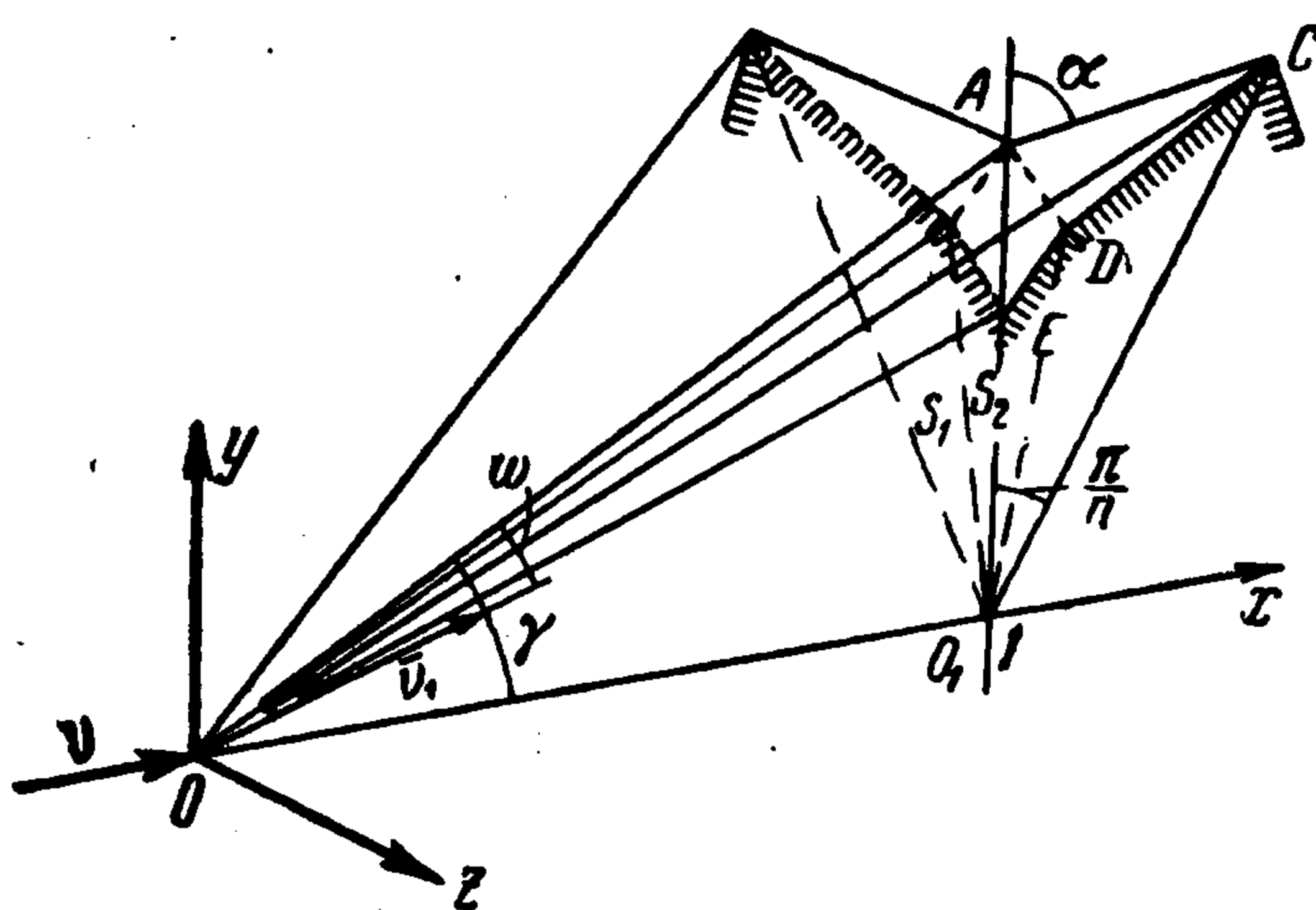
$$\begin{aligned} v_x &= 1 - (1 - \varepsilon) (\sin^2 \gamma_1 - M_\infty^{-2}), \quad v_y = (1 - \varepsilon) \text{ctg } \gamma_1 (\sin^2 \gamma_1 - M_\infty^{-2}) \sin \alpha \\ v_z &= - (1 - \varepsilon) \text{ctg } \gamma_1 (\sin^2 \gamma_1 - M_\infty^{-2}) \cos \alpha, \quad \varepsilon = (\kappa - 1) (\kappa + 1)^{-1} \end{aligned} \quad (1)$$

( $\kappa$  — показатель адиабаты)

Пусть вектор полной скорости, отнесенный к скорости  $U$  и число Маха за первым скачком равны  $U_1$  и  $M_1$ . Отклонение потока после прохождения через первый скачок (угол  $\delta$ ) можно вычислить из соотношения

$$\text{tg } \delta = \text{ctg } \gamma_1 \frac{(1 - \varepsilon) (\sin^2 \gamma_1 - M_\infty^{-2})}{1 - (1 - \varepsilon) (\sin^2 \gamma_1 - M_\infty^{-2})}$$

После этого число  $M_1$  находится по известным формулам для косоугольного скачка. Воз-



Фиг. 1

мущенное течение газа за выбранной системой скачков будет соответствовать обтеканию некоторого тела, если существует регулярное пересечение скачков в точке  $A$ , позволяющее повернуть поток параллельно плоскости симметрии. Необходимое условие регулярного пересечения:

$$M_{1n} = M_1 \sin \omega > 1 \quad (2)$$

Угол  $\omega$  — между вектором скорости  $U_1$  и линией пересечения скачков  $OA$  находится из соотношения

$$\cos \omega \cos \gamma_1 = \cos (\gamma_1 - \delta) \cos \gamma \quad (3)$$

Введем теперь в рассмотрение угол отклонения потока  $\theta$ , лежащий в плоскости, нормальной к ребру  $OA$  и образованный проекциями отрезка  $O_1A$  и вектора скорости  $U_1$  на эту плоскость. Для его величины после несложных выкладок получаем формулу

$$\cos \theta = (\text{tg } \gamma - \text{tg } \delta \sin \alpha) [\text{tg}^2 \gamma (1 + \cos^2 \alpha \text{tg}^2 \delta) + \text{tg}^2 \delta - 2 \sin \alpha \text{tg } \gamma \text{tg } \delta]^{-1/2} \quad (3)$$

Расположение второй волны ( $OAD$  на фиг. 1) можно определить теперь углом  $\beta$ , лежащим в плоскости угла  $\theta$ , из условия, что поворот потока в этой плоскости за-

дается выражением (3). В результате угол  $\beta$  находится по формулам косога скачка в виде

$$\operatorname{tg} \theta = 2 \operatorname{ctg} \beta \frac{M_{1n}^2 \sin^2 \beta - 1}{M_{1n}^2 (\kappa + \cos 2\beta) + 2} \quad (4)$$

Если начальные параметры задачи  $M_\infty$ ,  $\gamma$  и  $\alpha$  таковы, что выражение (4) имеет решение относительно угла  $\beta$ , то построенное течение газа будет соответствовать обтеканию некоторого пространственного конического тела с поперечным сечением, составленным из отрезков прямых. Определим его геометрию (точки  $E$ ,  $D$ ,  $C$  на фиг. 1). После элементарных выкладок находим, что точки  $E$  и  $C$  имеют координаты

$$\begin{aligned} y_E &= (\sin \alpha - \lambda \cos \alpha) \operatorname{tg} \delta, & \lambda [\sin \gamma \cos \alpha \sin \delta - \operatorname{ctg} (\beta - \theta) \cos \delta] &= \cos \omega \\ y_C &= z_C \operatorname{ctg} (\pi / n), & z_C \sin (\alpha - \pi / n) &= \operatorname{tg} \gamma_1 \sin (\pi / n) \end{aligned} \quad (5)$$

Для определения положения остальных точек надо знать координату точки  $F$ , лежащей на продолжении стенки  $CD$ . Расчет приводит к выражению

$$y_F = \frac{\operatorname{tg} \gamma_1 \operatorname{tg} \delta \cos (\alpha - \pi / n)}{\sin (\pi / n) \operatorname{tg} \gamma_1 + \sin (\alpha - \pi / n) \cos \alpha \operatorname{tg} \delta} \quad (6)$$

Отсюда имеем, что координаты точки  $D$  можно найти по формулам

$$\begin{aligned} y_D &= \frac{y_F \operatorname{ctg} (\beta - \theta) + \sin \gamma \operatorname{ctg} (\alpha - \psi)}{\operatorname{ctg} (\beta - \theta) + \cos \gamma \operatorname{ctg} (\alpha - \psi)} \\ z_D &= \frac{\sin \gamma - \cos \gamma y_F}{\operatorname{ctg} (\beta - \theta) + \cos \gamma \operatorname{ctg} (\alpha - \psi)} \\ \operatorname{tg} \psi &= \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \gamma_1} \right) \operatorname{tg} \left( \alpha - \frac{\pi}{n} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Проекция [областей возмущенного потока за первым и вторым скачком на плоскость  $x = 1$ , как видно из фиг. 1, определяются площадками  $S_1$  и  $S_2$ . Их величины с использованием (5) — (7) вычисляются из соотношений

$$2S_1 = y_F (z_C - z_D), \quad 2S_2 = y_E z_D$$

Переходим к вычислению сил. На стенку  $CD$  действует сила, вызванная постоянным давлением

$$c_p^{(1)} = 2 (1 - \varepsilon) (\sin^2 \gamma_1 - M_\infty^{-2})$$

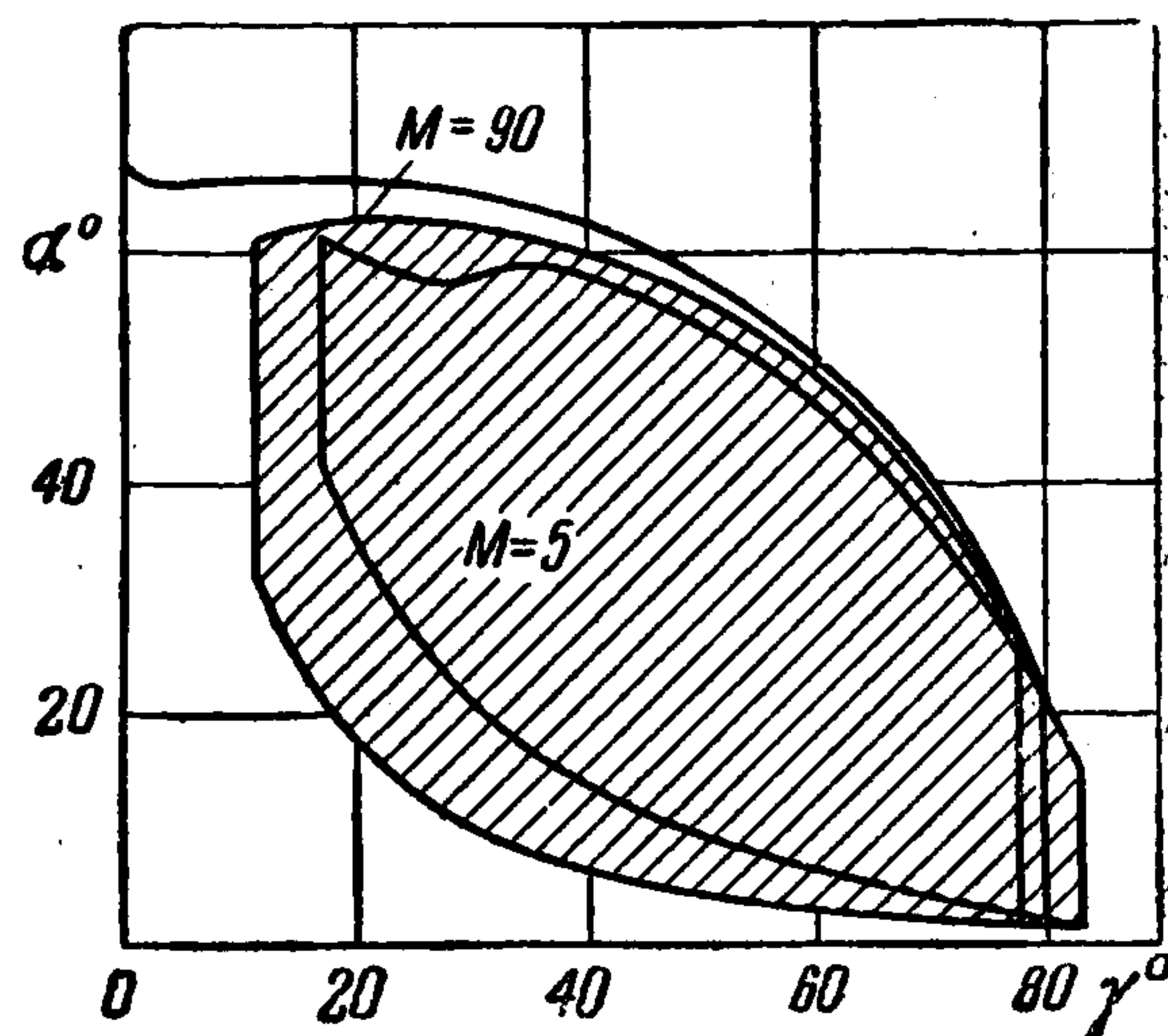
Стенка  $ED$  находится в области повышенного давления, величина которого

$$c_p^{(2)} = c_p^{(1)} + 2U_1^2 \frac{\sin^2 \omega (\sin^2 \beta - M_{1n}^{-2}) (1 - \varepsilon) M_\infty^2 \sin^2 \gamma_1}{1 + \varepsilon (M_\infty^2 \sin^2 \gamma_1 - 1)}$$

В каждой из областей  $ACD$  и  $ADE$  (фиг. 1) течение равномерное. Все линии тока в плоскости  $x = 1$ , проходящие через скачок  $AC$ , сходятся в одну точку  $E$ , которая является для этого обтекания точкой Ферри. Причем при прохождении второй волны  $AD$  все линии тока, включая стенку, имеют излом. Волновое сопротивление рассмотренного тела представляется в виде

$$C_x = \frac{c_p^{(1)} S_1 + c_p^{(2)} S_2}{S_1 + S_2}$$

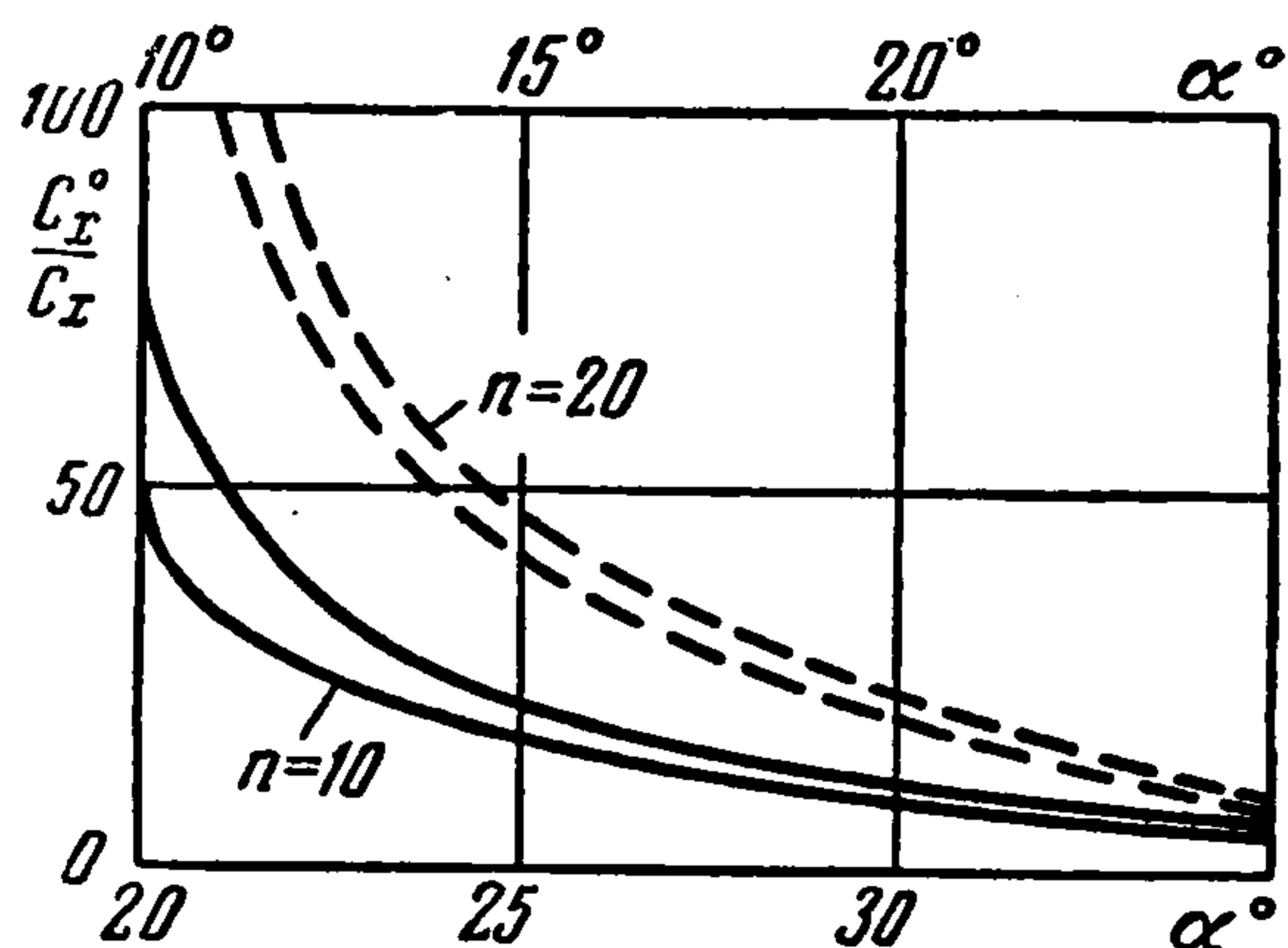
Решение обратной задачи существует только для определенного диапазона значений параметров  $M_\infty$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  и  $n$ . Например, всегда должно выполняться неравенство  $\alpha > \pi/n$ . Очевидно, имеют место и другие ограничения. Одним из таких ограничений является необходимое условие (2). Его использование дает для каждого значения числа Маха набегающего потока определенную область допустимых значений параметров  $\alpha$  и  $\gamma$ . На фиг. 2 показаны результаты расчета для диапазона чисел  $M_\infty = 5, 10$  и



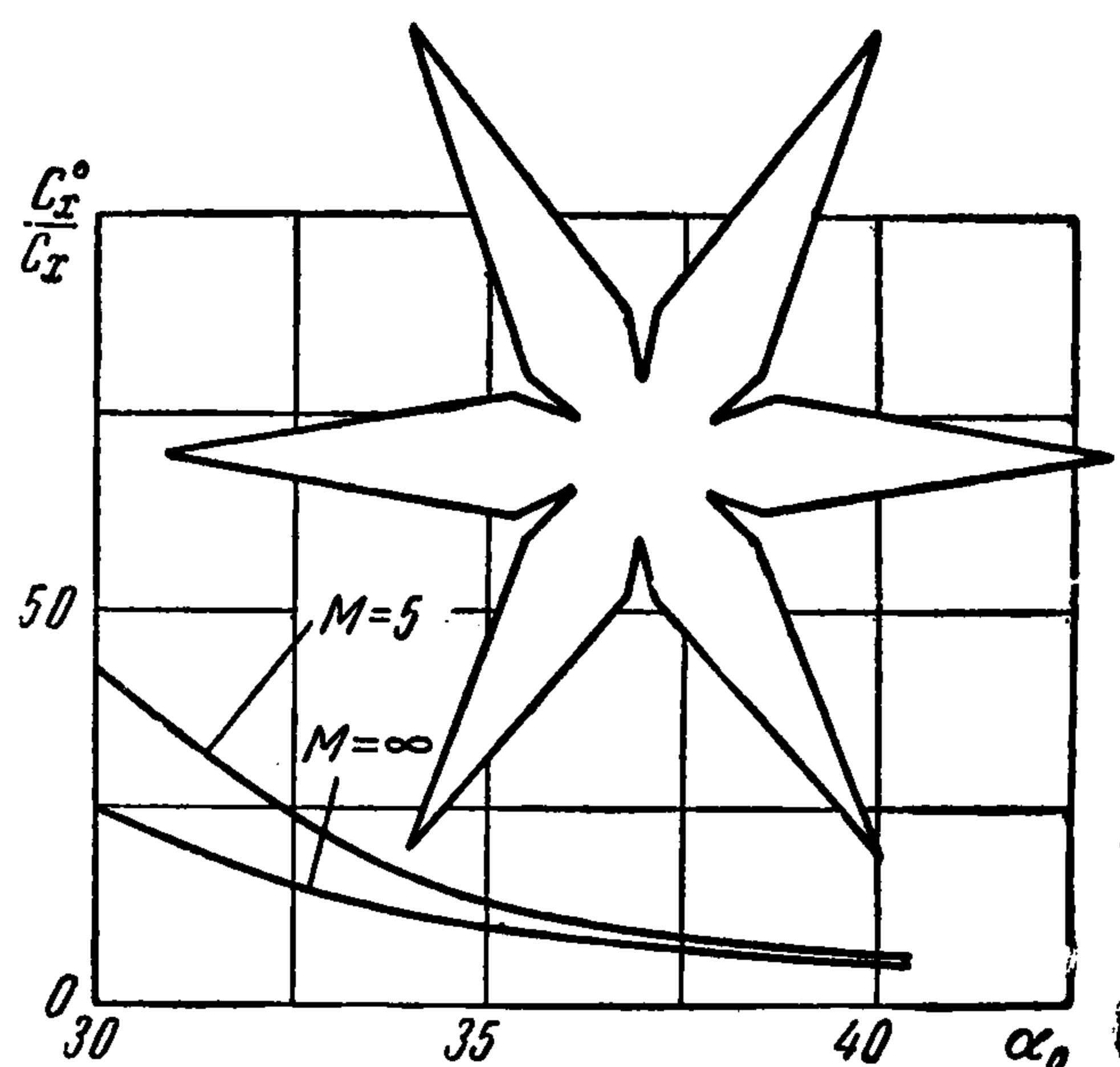
Фиг. 2

$\infty$  при показателе адиабаты  $\kappa = 1.4$ . Соответствующие области на рисунке заштрихованы. Следует иметь в виду, что условие (2) не является достаточным, поэтому выбор параметров внутри указанных областей носит характер предварительного отбора. Расчет зависимости волнового сопротивления от угла  $\alpha$  при нескольких значениях параметров  $M_\infty$ ,  $n$  и  $\gamma$  ( $\kappa = 1.4$ ) показан на фиг. 3—4.

Величина  $C_x^\circ/C_x$ , отложенная на оси ординат, представляет отношение сопротивления эквивалентного по длине и площади миделя кругового конуса к сопротивлению звездообразного тела. Расчет для  $M_\infty = \infty$ ,  $\gamma = 10^\circ$  и  $20^\circ$  выполнен на фиг. 3. Как видно из графика, с увеличением угла  $\alpha$  разница в сопротивлении уменьшается. Однако сопротивление звездообразного тела и при больших значениях  $\alpha$  еще остается примерно в десять раз меньшим, чем у эквивалентного конуса. По мере уменьшения  $\alpha$  ( $\alpha \rightarrow \pi/n$ ) сопротивление звездообразного тела падает, а разница с конусом увеличивается. Сравнение кривых на фиг. 3 показывает, что с увеличением числа ребер  $n$  сопротивление тела при неизмен-



Фиг. 3



Фиг. 4

ности других параметров будет уменьшаться, тогда как с увеличением параметра  $\gamma$  оно увеличивается. Аналогичное качественное поведение сохраняется и для конечных чисел  $M_\infty$ .

Укажем на одну особенность в расположении кривых на фиг. 4. Согласно построенным графикам, с увеличением числа  $M_\infty$  при неизменности других параметров получаем, что коэффициент сопротивления тела увеличивается. На самом деле, при разных числах Маха получаются разные тела, причем изменение геометрии тела сказывается более сильно на сопротивлении, чем изменение числа Маха. Вид поперечного сечения для одного случая при значениях параметров  $n = 6$ ,  $\gamma = 5^\circ$ ,  $\alpha = 41^\circ$  и  $M_\infty = \infty$  показан также на фиг. 4. Наряду с точным расчетом волнового сопротивления в ряде случаев для полученных тел был проведен расчет по формуле Ньютона. Сравнение показало, что ошибка имеет величину порядка 20%. Таким образом, все результаты о значительном уменьшении волнового сопротивления, полученные для звездообразных тел в более ранних работах [1-2], согласуются с точным решением как в качественном, так и в количественном отношении.

Отметим в заключение, что предположение о возможности подобного решения независимо было высказано Г. И. Майкапаром [4].

Поступила 27 II 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гонор А. Л. О пространственных телах наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 1
2. Chernyi G. G., Гонор А. Л. The determination of body shapes of minimum drag using the Newton and the Busemann pressure laws, Paper presented at Symposium on extremal problems in aerodynamics. BSRL, Seattle, Washington, 1962.
3. Майкапар Г. И. О волновом сопротивлении неосесимметричных тел при сверхзвуковых скоростях. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 2.
4. Черный Г. Г. К исследованию тел наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ, 1964, т. XXVIII, вып. 2.