ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ СТРУЙ

В. С. Хоменко

(Одесса)

Рассматривается плоская задача об охлаждении струи, границы которой имеют заданную температуру; методом Винера — Хопфа решается плоская задача об охлаждении струи, твердые границы которой подогреваются, а свободные имеют заданную температуру.

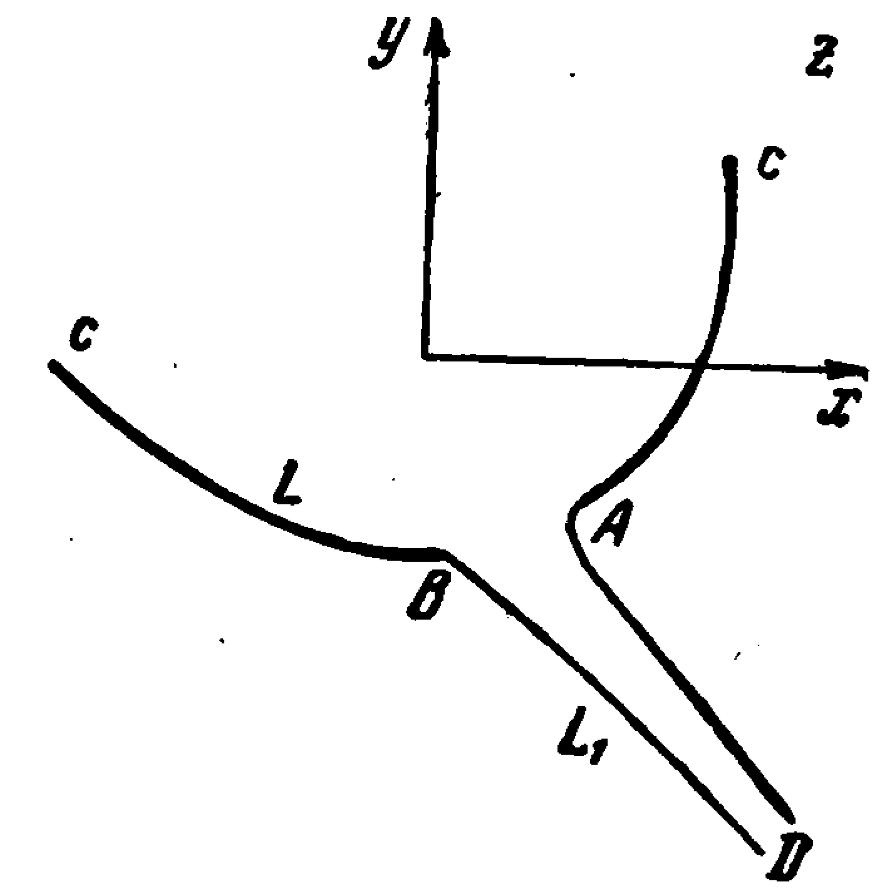
§ 1. Рассмотрим истечение жидкости из продольной щели в цилиндрической поверхности, нормальное сечение которой есть неограниченный контур L (фиг. 1). Задача об охлаждении струи, вытекающей из щели AB, сводится к интегрированию уравнения теплопроводности

$$a(\partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2) = \mathbf{v}\cdot \operatorname{grad} T \tag{1.1}$$

Здесь a — коэффициент температуропроводности, $\mathbf{v}$ — вектор скорости при условиях

$$T = \Theta \quad \text{на} \quad L + L_1 \tag{1.2}$$

$$\lim \Theta = T_1 \quad \text{при } z \to cr, \qquad \lim \Theta = T_0 \quad \text{при } z \to D \qquad (z = x + iy)$$



Фиг. 1

Здесь через L_1 обозначена свободная граница струи. Кроме того, для простоты предположим, что точки контура, находящиеся на одной эквипотенциальной линии, имеют одинаковую температуру.

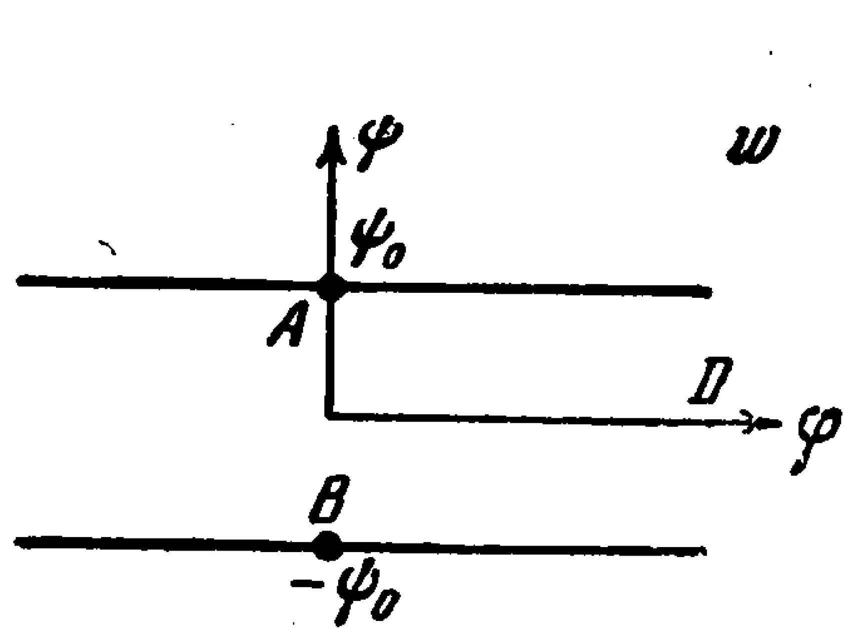
Пусть, далее, $w = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал течения, в котором φ — потенциал скоростей, а ψ — функция тока. Если в уравнении (1.1) произвести замену переменных $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$, то получим

$$a\,(\partial^2 T / \partial\varphi^2 + \partial^2 T / \partial\psi^2) = \partial T / \partial\varphi \tag{1.3}$$

При этом область течения в плоскости φ, ψ образует полосу $|\psi| \leqslant \psi_0$ (фиг. 2), где $2\psi_0$ — расход жидкости в струе, а граничные и предельные условия (1.2) для уравнения (1.3) принимают вид

$$T = \Theta \quad \text{при } |\psi| = \psi_0, \qquad \lim \Theta = \begin{cases} T_1 & (\varphi \to -\infty) \\ T_0 & (\varphi \to +\infty) \end{cases} \tag{1.4}$$

Из теории интеграла Фурье известно, что для функции $F(\tau)$, удовлетворяющей на оси τ условиям Дирихле, справедливы следующие предельные равенства [1] (1.5)



Фиг. 2

$$\lim \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\, e^{-i\tau\varphi} \frac{d\tau}{\tau} = \mp F(\pm 0) \qquad \text{при } \varphi \to \pm\infty$$

где верхний знак берется при $\varphi > 0$, а нижний — при $\varphi < 0$. Отметим, что при $F = 1$ соотношение (1.5) имеет вид

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau\varphi} \frac{d\tau}{\tau} = \begin{cases} -1 & (\varphi > 0) \\ 1 & (\varphi < 0) \end{cases} \tag{1.6}$$

На основании равенств (1.5) будем искать решение уравнения (1.3) в такой форме, при которой выполняются предельные условия (1.4)

$$T = \frac{T_1 - T_0}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau, \psi)\, e^{-i\tau\varphi} \frac{d\tau}{\tau} + \frac{T_1 + T_0}{2}, \qquad F(\pm 0, \psi) = 1 \tag{1.7}$$

Подставляя выражение (1.7) в формулу (1.3), для функции $F(\tau, \psi)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2F}{d\psi^2} - \nu^2 F = 0, \qquad \nu = \left(\tau^2 - \frac{i\tau}{a}\right)^{1/2}$$

которое имеет симметричное относительно ψ решение

$$F(\tau, \psi) = A(\tau) \frac{\operatorname{ch} \nu\psi}{\operatorname{ch} \nu\psi_0}, \qquad A(\pm 0) = 1$$

Таким образом, находим

$$T = \frac{T_1 - T_0}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau) \frac{\operatorname{ch} \nu\psi}{\operatorname{ch} \nu\psi_0} e^{-i\tau\varphi} \frac{d\tau}{\tau} + \frac{T_1 + T_0}{2} \tag{1.8}$$

Из равенства (1.8) и граничного условия (1.4) получаем интегральное уравнение относительно функции $A(\tau)$

$$\Theta(\varphi) = \frac{T_1 - T_0}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau) e^{-i\tau\varphi} \frac{d\tau}{\tau} + \frac{T_1 + T_0}{2} \tag{1.9}$$

Решение этого уравнения ищем в виде интеграла Фурье

$$A(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\lambda) e^{i\tau\lambda} d\lambda, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} B(\lambda)\, d\lambda = 1 \tag{1.10}$$

При помощи соотношений (1.10), (1.9) и (1.6) находим [1]

$$\Theta(\varphi) = -\frac{T_1 - T_0}{2}\left[\int_{-\infty}^{\varphi} B(\lambda)\, d\lambda + \int_{\infty}^{\varphi} B(\lambda)\, d\lambda\right] + \frac{T_1 + T_0}{2}$$

Отсюда

$$B(\lambda) = -\frac{1}{T_1 - T_0} \frac{d\Theta(\lambda)}{d\lambda} \tag{1.11}$$

Отметим, что условие нормировки (1.10) для функции $B(\lambda)$ выполняется автоматически.

Из соотношения (1.8) при помощи равенств (1.11) и (1.10) имеем окончательное решение (1.12)

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta / d\lambda \, g(\lambda - \varphi, \psi)\, d\lambda + \frac{T_1 + T_0}{2} \qquad \left(g = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \nu\psi}{\operatorname{ch} \nu\psi_0} e^{i\tau(\lambda - \varphi)} \frac{d\tau}{\tau}\right)$$

Для приближенного вычисления интеграла (1.12) рассмотрим температуру, осредненную по потоку [2]

$$T^* = \frac{1}{2\psi_0} \int_{-\psi_0}^{\psi_0} T\, d\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Theta}{d\lambda} g^*(\lambda - \varphi)\, d\lambda + \frac{T_1 + T_0}{2} \tag{1.13}$$

$$g^*(\lambda - \varphi) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{th} \nu\psi_0 e^{i\tau(\lambda - \varphi)} \frac{d\tau}{\nu\tau} \tag{1.14}$$

Далее воспользуемся известным разложением

$$\frac{1}{\nu} \operatorname{th} \nu\psi_0 = \frac{2}{\psi_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 + \mu_n^2} \qquad \left(\mu_n = \frac{\pi}{2\psi_0}(2n - 1)\right)$$

---

[1] Здесь и в дальнейшем предполагаем возможным перемену порядка интегрирования.

[2] Температура, осредненная по потоку, есть отношение потока энергии через сечение струи к потоку энергии жидкости единичной температуры, движущейся с осредненной скоростью через это же сечение. При достаточном удалении от отверстия принятое определение средней температуры совпадает с определением ее среднего значения по сечению.

на основании которого получаем

$$g^*(\lambda-\varphi)=-\frac{1}{\psi_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}g_n^*(\lambda-\varphi),\qquad g_n^*(\lambda-\varphi)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\tau(\lambda-\varphi)}}{\tau(\nu^2+\mu_n^2)}\,d\tau \tag{1.15}$$

Знаменатель подынтегрального выражения (1.15) имеет следующие корни

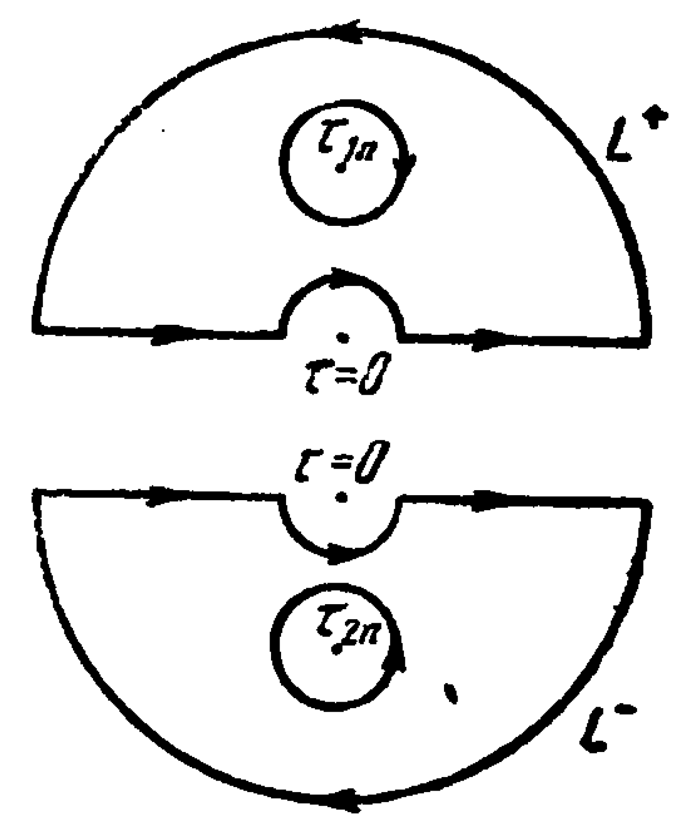
$$\tau_0=0,\qquad \tau_{1n}=\frac{i}{2a}\left(\sqrt{1+4\mu_n^2a^2}+1\right)$$

$$\tau_{2n}=-\frac{i}{2a}\left(\sqrt{1+4\mu_n^2a^2}-1\right)$$

Поэтому для вычисления интегралов (1.15) следует рассмотреть контурные интегралы (соответственно при $\lambda-\varphi>0$ и $\lambda-\varphi<0$)

$$G_n^+=\frac{1}{\pi i}\oint\limits_{L^+}\frac{e^{i\tau(\lambda-\varphi)}}{\tau(\nu^2+\mu_n^2)}\,d\tau$$

$$G_n^-=\frac{1}{\pi i}\oint\limits_{L^-}\frac{e^{i\tau(\lambda-\varphi)}}{\tau(\nu^2+\mu_n^2)}\,d\tau \tag{1.16}$$



Фиг. 3

Форма контуров интегрирования представлена на фиг. 3.

Из равенств (1.16) на основании теоремы о вычетах и леммы Жордано находим

$$g_n^*(\lambda-\varphi)=\frac{1}{\mu_n^2}-\frac{4a^2e^{-|\tau_{1n}|(\lambda-\varphi)}}{\left(\sqrt{1+4\mu_n^2a^2}+1\right)\sqrt{1+4\mu_n^2a^2}}\qquad \text{при } \lambda-\varphi>0 \tag{1.17}$$

$$g^*(\lambda-\varphi)=-\frac{1}{\mu_n^2}+\frac{4a^2e^{|\tau_{2n}|(\lambda-\varphi)}}{\left(\sqrt{1+4\mu_n^2a^2}-1\right)\sqrt{1+4\mu_n^2a^2}}\qquad \text{при } \lambda-\varphi<0 \tag{1.18}$$

При помощи формул (1.17) и (1.18) из соотношений (1.15) и (1.13) имеем

$$T^*(\varphi)=\Theta(\varphi)-\frac{4a^2}{\psi_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+4\mu_n^2a^2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+4\mu_n^2a^2}-1}\int\limits_{-\infty}^{\varphi}\frac{d\Theta}{d\lambda}e^{|\tau_{2n}|(\lambda-\varphi)}\,d\lambda+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{1+4\mu_n^2a^2}+1}\int\limits_{\varphi}^{\infty}\frac{d\Theta}{d\lambda}e^{-|\tau_{1n}|(\lambda-\varphi)}\,d\lambda\right\} \tag{1.19}$$

В качестве примера рассмотрим истечение жидкости из бесконечной прямоугольной щели в плоскости. Пусть контур L представляет границу верхней полуплоскости $|x|>l$, где $2l$ — ширина щели. Будем предполагать, что граница полуплоскости поддерживается при постоянной температуре T_1, а граница струи L_1 — при постоянной температуре T_0. В этом случае $d\Theta\,/\,d\lambda$ выражается через дельта-функцию

$$\frac{d\Theta}{d\lambda}=-(T_1-T_0)\,\delta(\lambda)$$

а средняя температура струи ($\varphi>0$)

$$T^*(\varphi)=T_0+\frac{4a^2(T_1-T_0)}{\psi_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-|\tau_{2n}|\varphi}}{\left(\sqrt{1+4\mu_n^2a^2}-1\right)\sqrt{1+4\mu^2\mu_n^2}} \tag{1.20}$$

Для нахождения зависимости φ от y воспользуемся известными из теории струй выражениями [2]

$$W=-\frac{2\psi_0}{\pi}\ln\zeta+i\psi_0\qquad (\zeta=\xi+i\eta)$$

$$z=\frac{2l}{2+\pi}\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}-i\ln\frac{1-i\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta}\right)+\frac{l\pi}{2+\pi}$$

Здесь параметрическая область ζ представляет собой верхнюю полуплоскость, отрезку $|\xi| < 1$ границы которой отвечает граница струи, а лучам $|\xi| > 1$ — линии $|x| > l$, $y = 0$. При этом точкам $\xi = \pm 1$ соответствуют точки $x = \pm l$, в точке $\zeta = 0$ — бесконечно удаленная точка струи $x = 0$, $y = -\infty$.

Вдоль границы струи зависимость φ от y представляется уравнениями

$$\varphi = -\frac{2\psi_0}{\pi}\ln|\xi|, \qquad y = \frac{2l}{2+\pi}\left(\sqrt{1-\xi^2} - \ln\frac{1+\sqrt{1-\xi^2}}{|\xi|}\right), \qquad |\xi| \leqslant 1 \tag{1.21}$$

При достаточном удалении от отверстия вторую формулу (1.21) можно заменить приближенным равенством

$$y = \frac{2l}{2+\pi}\left(1 - \ln\frac{2}{|\xi|}\right) \tag{1.22}$$

Отметим, что приближением (1.22) можно пользоваться даже на малых расстояниях от щели. Например, при $y / 2l = -0.18$ ошибка от замены точного равенства (1.21) приближенным не превышает 2.2%.

Из выражений (1.20) — (1.22) получаем расчетную формулу ($\alpha = \psi_0 / \pi a$)

$$\frac{T^*(y) - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp\{(\sqrt{\alpha^2 + (2n-1)^2} - \alpha)\,[(2+\pi)\,y / 2l + \ln 2 - 1]\}}{(\sqrt{\alpha^2+(2n-1)^2} - \alpha)\sqrt{\alpha^2+(2n-1)^2}} \tag{1.23}$$

Равенство (1.23) показывает, что относительное охлаждение струи определяется одним параметром α, с ростом которого процесс охлаждения резко замедляется.

§ 2. Пусть $w = \varphi + i\psi$ — известный комплексный потенциал струйного течения жидкости. Тогда в плоскости w уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial T}{\partial x} \qquad \left(x = \frac{\varphi}{a},\ y = \frac{\psi}{a}\right) \tag{2.1}$$

Здесь a — коэффициент температуропроводности.

Далее предположим, что в плоскости w области течения отвечает полоса $|\psi| \leqslant \psi_0$ (определенная $|y| \leqslant y_0$, $y_0 = \psi_0 / a$, где $2\psi_0$ — расход жидкости в струе), и точки границы струи, расположенные на одной эквипотенциальной линии, имеют одинаковую температуру

$$T(x, y_0) = T(x, -y_0) \tag{2.2}$$

Считаем, что на твердых границах струи ($x < 0$) осуществляется теплоприток, а свободные ($x > 0$) имеют заданную температуру. В соответствии с равенством (2.2) имеем следующие граничные условия для уравнения (2.1)

$$T = T_0(x) \quad (x > 0), \qquad \partial T / \partial y = \pm Q_0(x) \quad (x < 0) \qquad \text{при } y = \pm y_0 \tag{2.3}$$

Примем, что функции T_0 и Q_0 интегрируемы каждая в своей области и удовлетворяют предельным неравенствам

$$\begin{aligned} |T_0| &< M\exp(\tau_+ x) \quad \text{при } x \to +\infty \quad (\tau_+ < 0) \\ |Q_0| &< N\exp(\tau_- x) \quad \text{при } x \to -\infty \quad (\tau_- > 0) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся преобразованием Фурье

$$\Phi(\lambda, y) = \int_{-\infty}^{\infty} T(x, y)\, e^{i\lambda x}\, dx, \qquad T(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\lambda, y)\, e^{-i\lambda x} d\lambda \tag{2.5}$$

Представим функцию Φ в виде суммы

$$\Phi(\lambda, y) = \Phi_+(\lambda, y) + \Phi_-(\lambda, y) \tag{2.6}$$

где

$$\Phi_+(\lambda y) = \int_0^{\infty} T(x, y)\, e^{i\lambda x} dx, \qquad \Phi_-(\lambda, y) = \int_{-\infty}^{0} T(x, y)\, e^{i\lambda x}\, dx \tag{2.7}$$

При помощи преобразования (2.5) система (2.1) — (2.4) запишется в форме

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} - \gamma^2\Phi = 0 \qquad (\gamma = \sqrt{\lambda^2 - i\lambda}), \qquad \Phi(\lambda, y_0) = \Phi(\lambda, -y_0) \tag{2.8}$$

при $y = \pm y_0$

$$\Phi_+ = f_+(\lambda) = \int_0^\infty T_0(x)\, e^{i\lambda x}\, dx, \qquad \frac{d\Phi_-}{dy} = \pm g_-(\lambda) = \pm \int_{-\infty}^0 Q_0(x)\, e^{i\lambda x} dx \tag{2.9}$$

Вследствие четности функции Φ относительно y общее решение уравнения (2.8) имеет вид

$$\Phi(\lambda, y) = A(\lambda) \frac{\operatorname{ch} \gamma y}{\operatorname{ch} \gamma y_0}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.9), получаем

$$\Phi_-(\lambda, y_0) + f_+(\lambda) = A(\lambda), \qquad \Psi_+(\lambda, y_0) + g_-(\lambda) = \gamma A(\lambda) \operatorname{th} \gamma y_0 \tag{2.10}$$

Здесь

$$\Psi_+(\lambda, y_0) = \frac{d\Phi_+}{dy} \quad \text{при } y = y_0$$

Исключив из равенств (2.10) величину $A(\lambda)$, приходим к соотношению

$$\gamma \operatorname{th} \gamma y_0 \Phi_-(\lambda, y_0) - \Psi_+(\lambda, y_0) + \gamma \operatorname{th} \gamma y_0 f_+(\lambda) - g_-(\lambda) = 0 \tag{2.11}$$

Если в дальнейшем считать параметр λ комплексным ($\lambda = \sigma + i\tau$), то в силу предельных условий (2.4) функции с индексом «плюс» будут регулярны при $\tau > \tau_+$, а функции с индексом «минус» регулярны [1] при $\tau < \tau_-$.

Решение краевой задачи (2.11) проведем методом Винера — Хопфа [3]. Представляя гиперболический тангенс в виде бесконечного произведения

$$\gamma \operatorname{th} \gamma y_0 = \gamma^2 y_0 \prod_{k=1}^\infty \left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2 \frac{\gamma^2 + \beta_k{}^2}{\gamma^2 + \varepsilon_k{}^2}$$

$$\beta_k = k\alpha, \qquad \varepsilon_k = \left(k - \frac{1}{2}\right)\alpha, \qquad \alpha = \frac{\pi}{y_0} \tag{2.12}$$

проведем факторизацию

$$\gamma \operatorname{th} \gamma y_0 = K_+(\lambda) K_-(\lambda) \tag{2.13}$$

$$K_+(\lambda) = y_0\lambda \prod_{k=1}^\infty \frac{2k-1}{2k} \frac{\lambda - \lambda_{1k}}{\lambda - \lambda_{3k}}, \qquad K_-(\lambda) = (\lambda - i) \prod_{k=1}^\infty \frac{2k-1}{2k} \frac{\lambda - \lambda_{0k}}{\lambda - \lambda_{2k}} \tag{2.14}$$

$$\lambda_{0k} = {}^1/_2\, i\, (\sqrt{1 + 4k^2\alpha^2} + 1), \qquad \lambda_{2k} = {}^1/_2\, i\, (\sqrt{1 + (2k-1)^2\alpha^2} + 1)$$

$$\lambda_{1k} = -{}^1/_2\, i\, (\sqrt{1 + 4k^2\alpha^2} - 1), \qquad \lambda_{3k} = -{}^1/_2 i (\sqrt{1 + (2k-1)^2\alpha^2} - 1) \tag{2.15}$$

Здесь функция K_+ регулярна при $\tau > 0$, а функция K_- — при $\tau < 1$.

Подставим (2.13) в соотношение (2.11) и поделим на K_+; получим (2.16)

$$K_-(\lambda)\, \Phi_-(\lambda, y_0) - \frac{1}{K_+(\lambda)} \Psi_+(\lambda, y_0) + G(\lambda) = 0, \qquad G(\lambda) = K_-(\lambda) f_+(\lambda) - \frac{g_-(\lambda)}{K_+(\lambda)}$$

Отметим, что функция $K_- f_+$ регулярна в полосе $\tau_+ < \tau < 1$, а функция g_- / K_+ — в полосе $0 < \tau < \tau_-$. Поэтому $G(\lambda)$ регулярна при $0 < \tau < \tau_0$, где τ_0 — наименьшее из чисел $\tau = \tau_-$ и $\tau = 1$. Исходя из этого, представим значение $G(\lambda)$ в виде суммы

$$G(\lambda) = G_+(\lambda) + G_-(\lambda) \qquad \left(G_-(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{i(\tau_0 - 0) - \infty}^{i(\tau_0 - 0) + \infty} \frac{G(\zeta)}{\zeta - \lambda} d\zeta\right) \tag{2.17}$$

слагаемые которой регулярны соответственно при $\tau > 0$ и $\tau < \tau_0$.

Выражение для $G_-(\lambda)$ легко получить, вычисляя контурный интеграл

$$F(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_+}\frac{f_+(\zeta)K_-(\zeta)}{\zeta-\lambda}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_-}\frac{g_-(\zeta)\,d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta-\lambda)} \tag{2.18}$$

Здесь контур C_+ представляет линию $\tau=\tau_0-0$ и верхнюю полуокружность бесконечно большого радиуса, опирающуюся на эту линию, а контур C_- состоит из линии $\tau=\tau_0-0$ и нижней полуокружности бесконечно большого радиуса. Заметим, что контур C_+ охватывает полюса функции $K_-(\lambda)$, а контур C_-— нули функции $K_+(\lambda)$ и точку $\zeta=\lambda$. Подставляя в равенство (2.18) значения функций K_+ и K_- из (2.14) и воспользовавшись теоремой о вычетах, получим

$$G_-(\lambda)=-\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2p-1}{2p}\frac{f_+(\lambda_{2p})(\lambda_{2p}-i)(\lambda_{2p}-\lambda_{0p})}{\lambda_{2p}-\lambda}\prod_{\substack{k=1\\k\neq p}}^{\infty}\frac{2k-1}{2k}\frac{\lambda_{2p}-\lambda_{0k}}{\lambda_{2p}-\lambda_{2k}}-$$

$$-\frac{g_-(0)\,\alpha}{\pi\lambda}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{2k-1}\frac{\lambda_{3k}}{\lambda_{1k}}+\frac{g_-(\lambda)}{K_+(\lambda)}+$$

$$+\frac{\alpha}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2p}{2p-1}\frac{g_-(\lambda_{1p})(\lambda_{1p}-\lambda_{3p})}{\lambda_{1p}(\lambda_{1p}-\lambda)}\prod_{\substack{k=1\\k\neq p}}^{\infty}\frac{2k}{2k-1}\frac{\lambda_{1p}-\lambda_{3k}}{\lambda_{1p}-\lambda_{1k}} \tag{2.19}$$

Из соотношений (2.16) и (2.17) на основании теоремы Лиувилля имеем

$$K_-(\lambda)\,\Phi_-(\lambda,y_0)+G_-(\lambda)=0 \tag{2.20}$$

поскольку левая часть равенства (2.20) стремится к нулю при $\lambda\to\infty$. Подставляя значение Φ_- в первое выражение (2.10), находим

$$A(\lambda)=f_+(\lambda)-\frac{G_-(\lambda)}{K_-(\lambda)}$$

Поэтому

$$T(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f_+(\lambda)-\frac{G_-(\lambda)}{K_-(\lambda)}\right]\frac{\operatorname{ch}\gamma y}{\operatorname{ch}\gamma y_0}\exp(-i\lambda x)\,d\lambda \tag{2.21}$$

Для приближенного вычисления величины T рассмотрим температуру, осредненную по потоку

$$T^*(x)=\frac{1}{2y_0}\int\limits_{-y_0}^{y_0}T(x,y)\,dy=$$

$$=\frac{\alpha}{2\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_+(\lambda)\frac{\operatorname{th}\gamma y_0}{\gamma}e^{-i\lambda y}d\lambda-\frac{\alpha}{2\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{G_-(\lambda)}{K_-(\lambda)}\frac{\operatorname{th}\gamma y_0}{\gamma}e^{-i\lambda x}d\lambda \tag{2.22}$$

и подставим в это выражение значение $\operatorname{th}\gamma y_0$ из равенства (2.13)

$$T^*(x)=\frac{\alpha}{2\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_+(\lambda)\frac{\operatorname{th}\gamma y_0}{\gamma}e^{-i\lambda x}d\lambda+T_0^*(x) \tag{2.23}$$

$$T_0^*(x)=-\frac{\alpha}{2\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\gamma^2}G_-(\lambda)K_+(\lambda)\,e^{-i\lambda x}d\lambda \tag{2.24}$$

Заметим, что величина $\alpha=\pi a/\psi_0\ll 1$ даже для относительно малых расходов жидкости. Поэтому все величины будем оценивать по порядку степени α.

Исследуем температуру струи ($x>0$). При $x>0$ интеграл (2.24) легко вычисляется. Действительно, при $x>0$ можно рассмотреть контурный интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C}\frac{1}{\gamma^2}G_-(\lambda)K_+(\lambda)\exp(-i\lambda x)\,d\lambda$$

где контур C состоит из линии $\tau = 0$ и нижней полуокружности бесконечно большого радиуса. Внутри этого контура содержатся только полюса функции K_+. Используя выражение (2.14) для функции K_+, при помощи теории вычетов находим

$$T_0^* = -i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n}\frac{G_-(\lambda_{3n})(\lambda_{3n}-\lambda_{1n})}{\lambda_{3n}-i}e^{-i\lambda_{3n}x}\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{2k-1}{2k}\frac{\lambda_{3n}-\lambda_{1k}}{\lambda_{3n}-\lambda_{3k}} \tag{2.25}$$

Входящие в равенства (2.25) и (2.19) бесконечные произведения можно преобразовать следующим образом. Из соотношений (2.12) и (2.14) имеем

$$\prod_{\substack{k=1\\k\neq p}}^{\infty}\frac{2k-1}{2k}\frac{\lambda_{2p}-\lambda_{0k}}{\lambda_{2p}-\lambda_{2k}} = \tag{2.26}$$

$$=\frac{2p\alpha}{\pi(2p-1)(\lambda_{2p}-\lambda_{0p})\gamma_{2p}}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{2k-1}\frac{\lambda_{2p}-\lambda_{3k}}{\lambda_{2p}-\lambda_{1k}}\lim(\lambda-\lambda_{2p})\,\mathrm{th}\,\gamma y_0$$

$$\text{при } \lambda\to\lambda_{2p} \qquad (\gamma_{2p}=\gamma(\lambda_{2p}))$$

Вычисляя предел в формуле (2.26), получаем

$$\prod_{\substack{k=1\\k\neq p}}^{\infty}\frac{2k-1}{2k}\frac{\lambda_{2p}-\lambda_{0k}}{\lambda_{2p}-\lambda_{2k}} = \frac{4p\alpha^2\Pi_{2p}}{\pi^2(2p-1)(\lambda_{2p}-\lambda_{0p})(2\lambda_{2p}-i)}$$

$$\Pi_{2p}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{2k-1}\frac{\lambda_{2p}-\lambda_{3k}}{\lambda_{2p}-\lambda_{1k}} \tag{2.27}$$

Аналогично преобразуются остальные бесконечные произведения

$$\prod_{\substack{k=1\\k\neq p}}^{\infty}\frac{2k}{2k-1}\frac{\lambda_{1p}-\lambda_{3k}}{\lambda_{1p}-\lambda_{1k}}=\frac{(2p-1)\gamma_{1p}^2\Pi_{1p}}{p(2\lambda_{1p}-i)(\lambda_{1p}-\lambda_{3p})}, \qquad \Pi_{1p}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{2k-1}{2k}\frac{\lambda_{1p}-\lambda_{0k}}{\lambda_{1p}-\lambda_{2k}}$$

$$\prod_{\substack{k=1\\k\neq p}}^{\infty}\frac{2k-1}{2k}\frac{\lambda_{3n}-\lambda_{1k}}{\lambda_{3n}-\lambda_{3k}}=\frac{4n\alpha^2\Pi_{3n}}{\pi^2(2n-1)(\lambda_{3n}-\lambda_{1n})(2\lambda_{3n}-i)} \tag{2.28}$$

$$\Pi_{3n}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{2k-1}\frac{\lambda_{3n}-\lambda_{2k}}{\lambda_{3p}-\lambda_{0k}} \tag{2.29}$$

Для бесконечных произведений (2.27) и (2.29) имеют место следующие приближенные формулы [1]

$$\Pi_{2p}=\frac{4}{l}\left(\frac{2(1+a_p)}{\alpha l}\right)^{1/2}, \qquad \Pi_{1p}=\frac{l}{4}\left(\frac{\alpha l}{2(1+b_p)}\right)^{1/2}, \qquad \Pi_{3n}=\frac{4}{l}\left(\frac{2(1+a_n)}{\alpha l}\right)^{1/2} \tag{2.30}$$

$$(a_n=\sqrt{1+(2n-1)^2\alpha^2},\ b_n=\sqrt{1+4n^2\alpha^2})$$

Кроме того,

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{2k-1}\frac{\lambda_{3k}}{\lambda_{1k}}=\frac{1}{8l}\left(\frac{\alpha}{l}\right)^{1/2} \tag{2.31}$$

[1] Приближенный способ вычисления произведений типа (2.27) — (2.29) рассмотрен в дополнении (§ 3).

Используя соотношения (2.30) и (2.31), из равенств (2.25), (2.19), (2.27) — (2.29) и (2.15) определим

$$T_0^* = -\frac{2^8\alpha^3}{\pi^4 l^3}\sum_{n,\,p=1}^{\infty} A_{n,\,p} + \frac{4\sqrt{2}\alpha^3 g_-(0)}{\pi^3 l^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp\left[-{}^1/_2 x\,(a_n-1)\right]}{a_n(a_n-1)\sqrt{a_n+1}} + \frac{8\alpha^3}{\pi^3}\sum_{n,\,p=1}^{\infty} B_{n,\,p} \tag{2.32}$$

где

$$A_{n,\,p} = \frac{f_+(\lambda_{2p})(a_p-1)\sqrt{a_p+1}}{a_n a_p\sqrt{a_n+1}\,(a_n+a_p)}\exp\left[-\frac{x}{2}(a_n-1)\right]$$

$$B_{n,\,p} = \frac{g_-(\lambda_{1p})\sqrt{b_p+1}}{b_p a_n\sqrt{a_n+1}\,(a_n-b_p)}\exp\left[-\frac{x}{2}(a_n-1)\right] \tag{2.33}$$

Сходимость одинарного ряда в выражении (2.32) очевидна; двойные ряды здесь также сходятся, так как сходятся интегралы

$$\int_1^\infty\int_1^\infty A_{\xi,\,\eta}\,d\xi,\,d\eta, \qquad \int_1^\infty\int_1^\infty B_{\xi,\,\eta}\,d\xi\,d\eta$$

и существуют отличные от нуля пределы [4]

$$\varliminf_{n+p\to\infty}\frac{A_{n+1,\,p+1}}{A_{n,\,p}} = A_0 e^{-x\alpha}, \qquad \varliminf_{n+p\to\infty}\frac{B_{n+1,\,p+1}}{B_{n,\,p}} = B_0 e^{-x\alpha} \qquad (A_0\neq 0,\ B_0\neq 0)$$

(черта под знаком предела означает минимальный предел при $n+p\to\infty$ для любых значений n или p).

Из равенства (2.32) при помощи формулы Эйлера для интегральных оценок рядов [4, 5] можно получить асимптотическое поведение функции T_0^*. С точностью до членов порядка α° находим

$$T_0^*(x) = T^*(x) = -g_-(0)\frac{(6+\sqrt{2})\,l^3-3}{3l^2\pi^3}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right) \tag{2.34}$$

Формула (2.34) показывает, что температура струи на больших расстояниях в основном определяется суммарным количеством поступающего тепла, пропорциональном величине

$$g_-(0) = \int_{-\infty}^{0} Q_0(x)\,dx$$

и убывает, как $x^{-1/2} = (la\,/\,2\psi_0\xi)^{1/2}$, где l — ширина струи на бесконечности, а ξ — расстояние рассматриваемого сечения струи от выходного отверстия.

§ 3. Приводим результаты суммирования рядов. Рассмотрим ряд

$$S_{1,\,m} = \sum_{k=1}^{m} a(k) = \sum_{k=1}^{n-1} a(k) + S_{n,m} \qquad S_{n,m} = \sum_{k=n}^{m} a(k) \qquad (n\leqslant m) \tag{3.1}$$

Члены ряда $a(x)$ — непрерывными функциями переменной x $(1\leqslant x\leqslant m+1)$. Предположим, что величины $a(k)$ можно представить следующим образом:

$$a(k) = A(k+{}^1/_2) - A(k) \tag{3.2}$$

Для численной оценки остаточного члена ряда воспользуемся известной формулой Симпсона

$$\int_n^{m+1} a(x)\,dx \approx \frac{1}{6}\sum_{k=n}^{m}\left[a(k) + 4a\left(k+\frac{1}{2}\right) + a(k+1)\right] \tag{3.3}$$

Из равенства (3.3) при помощи соотношения (3.2) легко получить приближенное значение $S_{n,m} = S_{n,m}^*$

$$S_{n,m}^* = \frac{1}{2}[a(m+1) - a(n)] + 2[A(m+1) - A(n)] - 3\int_n^{m+1} a(x)\,dx$$

В частном случае, если функция $a(x)$ интегрируема в интервале $(1, \infty)$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a(k) \approx S_{1,\infty}^* = \sum_{k=1}^{n-1} a(k) - \frac{1}{2}a(n) + 2[A(\infty) - A(n)] - 3\int_n^{\infty} a(x)\,dx \quad (3.4)$$

Очевидно, что для заданного n приближенная формула (3.4) тем точнее, чем медленнее сходится ряд.

Так, например, пусть

$$S_{1,\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k+1)} = 1 - \ln 2 = 0.30685, \qquad A(k) = \frac{2k-1}{2k}$$

При $n = 1$ имеем $S_{1\infty}^* = 0.30848$; погрешность $(S_{1,\infty} - S_{1,\infty}^*)/S_{1,\infty} = -0.53 \cdot 10^{-2}$. При $n = 2$ имеем $S_{1,\infty}^* = 0.30695$; погрешность при этом составляет $-0.33 \cdot 10^{-3}$. Равенство (3.4) легко применить для вычисления бесконечных произведений. Действительно, полагая

$$a(k) = \ln\frac{\alpha(k + 1/2)}{\alpha(k)}$$

из формулы (3.4) находим (3.5)

$$\Pi = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(k+1/2)}{\alpha(k)} \approx \frac{c^2}{\alpha^{3/2}(n)\,\alpha^{1/2}(n+1/2)} \exp\left[-3\int_n^{\infty} \ln\frac{\alpha(x+1/2)}{\alpha(x)}\,dx\right] \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha(k+1/2)}{\alpha(k)}$$

Здесь принято

$$\prod_{k=1}^{0} \frac{\alpha(k+1/2)}{\alpha(k)} = 1, \qquad c = \lim \frac{\alpha(k+1/2)}{\alpha(k)} \quad \text{при } k \to \infty$$

Например,

$$\Pi = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{2k-1}\,\frac{\sqrt{1+(2k-1)^2\varepsilon^2}+a}{\sqrt{1+4k^2\varepsilon^2}+a}$$

$$\alpha(k) = \frac{(2k-1)\varepsilon}{\sqrt{1+(2k-1)^2\varepsilon^2}+a} \qquad (0 < \varepsilon \ll 1)$$

Подставляя значение $\alpha(k)$ в равенство (3.5) при $n = 1$ и ограничиваясь членами порядка $\varepsilon^{3/2}$, получаем

$$\Pi = \frac{2^{5/2}}{l^{3/2}\varepsilon^{1/2}}\sqrt{1+a} \quad \text{при } a > -1, \qquad \Pi = \frac{\varepsilon^{1/2}}{8l^{3/2}} \quad \text{при } a = -1$$

Поступила 3 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Тичмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, М., 1951.
2. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. Физматгиз, М., 1961.
3. Нобл Б. Метод Винера—Хопфа. Изд. иностр. лит., М., 1962.
4. Салехов Г. С. Вычисление рядов. Гостехиздат, М., 1955.
5. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. Гостехиздат, М., 1957.