мущения, осциллирующие с частотой

$$\left[\frac{m}{Pl\,(l+1)}\right]^{1/2}\sqrt{C^2-C_*^2} \qquad (2.21)$$

Вещественные части декрементов этих возмущений не зависят от C и равны λ_*. Заметим, что отношение

$$\frac{C_*^2}{C_0^2}=\frac{(P-1)^2}{4P} \qquad (2.22)$$

не зависит от номера возмущения и будет общим для всего спектра декрементов. Несколько нижних декрементов для жидкости с $P=2$ приведены на фигуре, где кривая *1* соответствует значениям $l=m=n=1$, кривая *2* — значениям $l=m=2$, $n=1$ и кривая *3* — значениям $l=2$, $m=n=1$. Подогревание снизу соответствует отрицательным числам Релея.

Рассмотренная задача может быть решена и при других краевых условиях. Например, в случае теплоизолированных стенок ($\theta'(r)=0$) декременты $\lambda(C)$ находятся из уравнения

$$\frac{J_{l+1/2}(k_1)}{J_{l+1/2}(k_2)}\,\frac{[(l+1)\,J_{l+1/2}(k_2)+k_2J_{l-1/2}(k_2)]}{[(l+1)\,J_{l+1/2}(k_1)+k_1J_{l-1/2}(k_1)]}=\frac{\lambda-k_1^2}{\lambda-k_2^2} \qquad (2.23)$$

где k_1 и k_2 выражаются через λ и C из (2.11).

Авторы благодарят Г. З. Гершуни и Е. М. Жуховицкого за ценную дискуссию.

Поступила 10 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Сорокин В. С. Вариационный метод в теории конвекции. ПММ, 1953, т. 17, вып. 1.
2. Шлиомис М. И. Осциллирующие возмущения в проводящей жидкости в магнитном поле. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
3. Жуховицкий Е. М. Об устойчивости неравномерно нагретой жидкости в шаровой полости. ПММ, 1957, т. 21, вып. 5.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ И ГИДРОМАГНИТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СТРУИ

Е. Г. Ларионцев (Москва)

§ 1. Известно, что покоящийся жидкий цилиндр, окруженный снаружи другой жидкостью, неустойчив при наличии сил поверхностного натяжения [1]. В работе [2] изложены результаты исследования устойчивости в случае, когда цилиндр движется вдоль оси со скоростью $U=\text{const}$ относительно внешней среды; рассмотрение ограничено случаем аксиально симметричных возмущений.

Рассмотрим устойчивость цилиндрического тангенциального разрыва с поверхностным натяжением относительно произвольных возмущений вида

$$f=f(r)\exp\,[i\,(kz+m\varphi-\omega t)] \qquad (1.1)$$

Внутри цилиндра, при $r<a$, величины будем обозначать индексом i ($v_{zi}=U=\text{const}$, p_i, ρ_i), вне цилиндра — индексом e ($v_{ze}=0$, p_e, ρ_e). Исходя из уравнений идеальной гидродинамики

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=0, \qquad \rho d\mathbf{v}/dt=-\nabla p \qquad (1.2)$$

для возмущений (1.1) получим дисперсионное уравнение

$$\rho_i\beta_i\,(kU-\omega)^2+\rho_e\beta_e\omega^2=\alpha\left[k^2+\frac{m^2-1}{a^2}\right]\quad\left(\beta_i=\frac{I_m(ka)}{kI_m'(ka)},\quad \beta_e=-\frac{K_m(ka)}{kK_m'(ka)}\right) \qquad (1.3)$$

Здесь α — коэффициент поверхностного натяжения, $I_m(ka)$, $K_m(ka)$ — функции Бесселя мнимого аргумента. Коэффициенты β_i и β_e положительны. Корни дисперсионного уравнения равны

$$\omega = \frac{kU}{1+A} \pm \left\{\frac{1}{\rho_i\beta_i(1+A)}\left[\alpha\left(k^2+\frac{m^2-1}{a^2}\right)-\frac{\rho_e\beta_e k^2U^2}{1+A}\right]\right\}^{1/2} \qquad \left(A=\frac{\rho_e\beta_e}{\rho_i\beta_i}\right) \tag{1.4}$$

В частном случае при $U = 0$ дисперсионное уравнение (1.3) описывает устойчивость равновесия жидкого цилиндра [1]; уравнение (1.4) при $U = 0$ очевидным образом упрощается; при этом столб жидкости неустойчив вследствие поверхностного натяжения относительно возмущений типа перетяжек ($m = 0$) с длиной волны, большей радиуса ($ka < 1$). Цилиндрический тангенциальный разрыв без поверхностного натяжения ($\alpha = 0$) неустойчив относительно возмущений с любой длиной волны и при любом m. Поверхностное натяжение оказывает стабилизирующее воздействие на коротковолновые возмущения ($ka > 1$) и дестабилизирующее — на длинноволновые возмущения типа перетяжек.

§ 2. Рассмотрим гидромагнитную устойчивость идеально проводящей плазменной струи, затопленной в непроводящей жидкости. В. Д. Шафранов [3] исследовал устойчивость плазменного шнура, удерживаемого внешним магнитным полем. Будем предполагать дополнительно, что вне шнура имеется непроводящая жидкость и шнур движется относительно нее со скоростью $U = \text{const}$ вдоль оси. В невозмущенном состоянии полагаем

$$H_{\varphi i} = 0, \qquad H_{zi} = \text{const}, \qquad p_i = \text{const}, \qquad v_{zi} = U \qquad \text{при } r < a$$
$$H_{\varphi e} = H_0 a / r, \qquad H_{ze} = \text{const}, \qquad p_e = \text{const}, \qquad v_{ze} = 0 \qquad \text{при } r > a$$

Опуская выкладки, аналогичные проделанным в работе [3], на основе системы уравнений идеальной магнитной гидродинамики

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c}[\mathbf{j}\times\mathbf{H}], \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}] \quad (r<a)$$
$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \qquad \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p \qquad (r>a) \tag{2.1}$$

для возмущений вида (1.1) получим дисперсионное уравнение

$$(kU-\omega)^2 + A\omega^2 = B + v_н^2k^2 \qquad \text{при } a = 1 \tag{2.2}$$

где

$$A = -\frac{\rho_e I_m'(k) K_m(k)}{\rho_i I_m(k) K_m'(k)} > 0, \qquad B = \frac{H_0^2 k I_m'(k)}{4\pi\rho_i I_m(k)}\left\{\frac{(m+kh_e)^2}{\varphi}-1\right\}$$
$$\varphi = m + \frac{kK_{m-1}(k)}{K_m(k)}, \qquad v_н^2 = \frac{H_{zi}^2}{4\pi\rho_i}, \qquad h_e = \frac{H_{ze}}{H_0}$$

Условие устойчивости имеет вид

$$B + k^2v_н^2 - \beta k^2U^2 > 0, \qquad \beta = A/(1+A) \tag{2.3}$$

Если плазменный цилиндр покоится в непроводящем газе ($U = 0$), из (2.3) следует условие устойчивости, полученное Шафрановым. Как видно из (2.3), плазменная струя, движущаяся со скоростью U во внешнем газе, менее устойчива, чем покоящийся плазменный шнур (член βk^2U^2 ухудшает устойчивость). Условие устойчивости (2.3) можно интерпретировать в следующем смысле: магнитное поле H_{zi} стабилизирует тангенциальный разрыв скорости, при $v_н^2 > \beta U^2$ возможна стабилизация тангенциального разрыва магнитным полем.

Покажем, что критерии устойчивости струи существенно зависят от распределения плотности тока по сечению струи. С этой целью рассмотрим следующую модель струи (струя с однородным осевым током и продольным полем):

$$H_{\varphi i} = H_0\frac{r}{a}, \qquad H_{zi} = \text{const}, \qquad v_{zi} = U; \qquad H_{\varphi e} = H_0\frac{a}{r}, \qquad H_{ze} = H_{zi}, \qquad v_{ze} = 0$$

Давление p_i спадает по параболическому закону до значения p_e при $r = a$. На границе струи давление и магнитное поле непрерывны.

Среди возмущений вида (1.1) существуют такие, которые не искажают магнитное поле. Действительно, из условия вмороженности следует, что

$$(kU - \omega)\,\mathbf{H}_i^{(1)} = \left(\frac{m}{r} H_{\varphi i} + kH_{zi}\right) \mathbf{v}_i^{(1)}$$

При $(m / r) H_{\varphi i} + kH_{zi} = 0$ отличны от нуля только возмущения скорости и давления. Так как магнитное поле не возмущается, то оно совершенно не влияет на развитие возмущений скорости и давления. Для таких возмущений получаем дисперсионное уравнение обычной гидродинамики (уравнение (1.3) при $\alpha = 0$). Плазменная струя будет неустойчива при любой скорости U. Таким образом, критерии устойчивости плазменной струи сильно зависят от распределения плотности тока по сечению струи. Поверхностные токи и связанные с ними скачки магнитного поля на границе струи стабилизируют тангенциальный разрыв скорости. В случае непрерывного распределения плотности тока по сечению струи плазменная струя может оказаться неустойчивой при любой величине скачка скорости.

§ 3. Ограничимся рассмотрением следующей модели цилиндрического тангенциального разрыва в идеально проводящей жидкости:

$$H_{\varphi i} = H_0 \frac{r}{a}, \quad H_{zi} = \text{const}, \quad v_{zi} = U, \quad H_{\varphi e} = H_0 \frac{r}{a}, \quad H_{ze} = H_{zi}, \quad v_{ze} = 0$$

(продольное поле H_z и плотность тока j_z однородны). Для возмущений вида (1.1) из условия вмороженности получим

$$(kU - \omega)\,\mathbf{H}_i^{(1)} = \left(\frac{m}{r} H_{\varphi i} + kH_{zi}\right) \mathbf{v}_i^{(1)}, \qquad -\omega \mathbf{H}_e^{(1)} = \left(\frac{m}{r} H_{\varphi e} + kH_{ze}\right) \mathbf{v}_e^{(1)}$$

Если $m / rH_\varphi + kH_z = 0$, то магнитное поле не возмущается и критерий устойчивости тангенциального разрыва не зависит от магнитного поля (снова получаем дисперсионное уравнение (1.3) при $\alpha=0$).

Оказывается, что поперечная к скорости компонента магнитного поля (H_φ) значительно ослабляет стабилизирующее действие магнитного поля. Действительно, если $H_\varphi = 0$, то при $k \neq 0$ магнитное поле всегда искажается и эффективно стабилизирует тангенциальный разрыв скорости. При $H_\varphi = 0$ получаем дисперсионное уравнение

$$\rho_i\beta_i (kU - \omega)^2 + \rho_e\beta_e\omega^2 = k^2 \frac{\beta_i H_{zi}^2 + \beta_e H_{ze}^2}{4\pi} \tag{3.1}$$

Условие устойчивости тангенциального разрыва имеет вид

$$\beta_i H_{zi}^2 + \beta_e H_{ze}^2 \geqslant 4\pi \frac{\rho_i\beta_i\rho_e\beta_e}{\rho_i\beta_i + \rho_e\beta_e} U^2 \tag{3.2}$$

Результаты этого параграфа согласуются с выводами С. И. Сыроватского относительно устойчивости плоских тангенциальных разрывов [4].

В заключение автор приносит благодарность А. И. Морозову за предложенную тему и обсуждение работы.

Поступила 17 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. ОГИЗ — Гостехиздат, М.—Л., 1947, стр. 589—591.
2. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. Физматгиз, М., 1959, стр. 638—649.
3. Шафранов В. Д. Об устойчивости цилиндрического газового проводника в магнитном поле. Атомная энергия, 1956, т. 1, № 5.
4. Сыроватский С. И., Магнитная гидродинамика. Успехи физ. наук, 1957, т. 62, вып. 3.