ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КОНВЕКЦИИ

Ю. К. Братухин, М. И. Шлиомис (Пермь)

1. Уравнения задачи и характер решений. Как известно, в поле тяжести $\mathbf{g}$ неравномерно нагретая жидкость может находиться в равновесии только тогда, когда градиент температуры вертикален

$$\mathbf{g} = -\boldsymbol{\gamma} g, \qquad \nabla T_0 = A\boldsymbol{\gamma} \qquad (\boldsymbol{\gamma}^2 = 1) \tag{1.1}$$

Если $A = \mathrm{const}$, то для малых возмущений равновесия (они пропорциональны $e^{-\lambda t}$) получаются уравнения

$$-\lambda\mathbf{u} = -\nabla p + \nabla^2\mathbf{u} \pm C\boldsymbol{\gamma}T$$

$$-\lambda PT = \nabla^2 T - C\boldsymbol{\gamma}\mathbf{u}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \qquad (C^2 = \alpha g R^4 \,|A|\,/\,\nu\chi,\ P = \nu\,/\chi) \tag{1.2}$$

Здесь все величины безразмерные; в качестве единиц приняты длина R (характеризует размер полости), время R^2/ν, скорость ν/R, температура $(\nu/R)(|A|\,\nu/\alpha g\chi)^{1/2}$; безразмерные параметры; C^2 — число Релея и P — число Прандтля. В уравнениях перед одним из слагаемых стоит $\pm$. Здесь, как и всюду в дальнейшем, верхний знак относится к случаю, когда $A > 0$ (жидкость подогревается сверху), а нижний — к случаю $A < 0$ (подогревание снизу). Система (1.2) имеет бесконечную последовательность решений — пар функций $\{\mathbf{u}_\alpha, T_\alpha\}$ и декрементов λ_α. Эти решения ортогональны одно к другому в следующем смысле:

$$\int \{\mathbf{u}_\alpha\mathbf{u}_\beta \mp PT_\alpha T_\beta\}\, dV = C\delta_{\alpha\beta} \qquad (C = \mathrm{const}) \tag{1.3}$$

Возмущение с номером α монотонно, если $\operatorname{Im}\lambda_\alpha = 0$, и затухает, если $\operatorname{Re}\lambda_\alpha > 0$.

В жидкости, подогреваемой снизу, возмущения либо монотонно затухают, либо монотонно растут [1], так что при $A < 0$ равновесие может быть и устойчивым, и неустойчивым.

При подогревании сверху ($A > 0$) все возмущения затухают, хотя и не обязательно монотонно [1]. Из (1.2) следует интегральное соотношение

$$(\lambda - \lambda^*) \int \{\mathbf{u}^*\mathbf{u} - PT^*T\}\, dV = 0 \tag{1.4}$$

из которого видно, что комплексные λ возможны, когда интеграл в (1.4) равен нулю. Для монотонных возмущений этот интеграл совпадает с нормировочным (1.3). Существует два типа монотонных возмущений—«тепловые» $\{\mathbf{u}_{1\alpha}, T_{1\alpha}\}$ и «гидродинамические» $\{\mathbf{u}_{2\alpha}, T_{2\alpha}\}$. Для них имеем

$$\int \mathbf{u}_{1\alpha}^2 dV < P\int T_{1\alpha}^2 dV, \qquad \int \mathbf{u}_{1\alpha}^2 dV > P\int T_{2\alpha}^2 dV$$

поэтому нормировочные интегралы возмущений разного типа имеют разные знаки. При $C \to 0$ в «тепловых» возмущениях исчезает скорость и остается только температура, в «гидродинамических» — наоборот.

Совершенно аналогичная ситуация уже встретилась однажды при исследовании одним из автором [2] спектра возмущений проводящей жидкости в магнитном поле. Подогревание сверху делает уравнения несамосопряженными и столь похожими на уравнения магнитной гидродинамики, что можно утверждать следующее [2]. В подогреваемой сверху жидкости при малых C колебательных возмущений нет. При некотором $C = C_*$ могут пересечься декременты двух монотонных возмущений разного типа и одинаковой симметрии. Тогда при $C > C_*$ вместо этих двух монотонных возмущений в спектре появятся два колебательных возмущения с комплексно сопряженными декрементами. В самой точке C_* один из нормировочных интегралов обратится в нуль. Эти следствия теории полностью подтверждаются приведенным ниже примером, для которого уравнение (1.2) имеет точное решение.

2. Случай точного решения. Рассмотрим возмущения равновесия жидкости, подогреваемой сверху или снизу в шаровой полости. В сферических координатах r, ϑ, φ с полярной осью вдоль $\boldsymbol{\gamma}$ уравнения (1.2) с граничными условиями

$$\mathbf{u} = 0, \quad T = 0 \quad \text{при } r = 1; \qquad \mathbf{u},\ T \text{ ограничены при } r = 0 \tag{2.1}$$

имеют класс точных решений следующей структуры [1]:

$$\mathbf{u} = v(r)\,\mathbf{r} \times \nabla\,[\sin m\varphi P_l^m(\cos\vartheta)]$$

$$T = \theta(r)\cos m\varphi\, P_l^m(\cos\vartheta), \qquad p = f(r,\vartheta)\cos m\varphi \tag{2.2}$$

Здесь $P_l^m(\cos\vartheta)$ — присоединенные полиномы Лежандра. Подстановка (2.2) в уравнения (1.2) дает, например,

$$\nabla^2\mathbf{u} = \left[\boldsymbol{\varphi}_1 \sin m\varphi P_l^m(\cos\vartheta) - \boldsymbol{\vartheta}_1 \frac{m\cos m\varphi}{\sin\vartheta} P_l^m(\cos\vartheta)\right] Lv(r)$$

$$\left(L = \frac{d^2}{dr^2} + 2\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)$$

$$\gamma\mathbf{u} = (\mathbf{r}_1\cos\vartheta - \boldsymbol{\vartheta}_1\sin\vartheta)\,v(r)\left[\boldsymbol{\varphi}_1 \sin m\varphi\,(P_l^m)^{\cdot} - \boldsymbol{\vartheta}_1\frac{m\cos m\varphi}{\sin\vartheta}P_l^m\right] =$$

$$= mv(r)\cos m\varphi P_l^m(\cos\vartheta)$$

Здесь точка означает дифференцирование по ϑ.

Скалярно умножая первое уравнение системы (1.2) поочередно на $\boldsymbol{\vartheta}_1$ и $\boldsymbol{\varphi}_1$, получим

$$(\lambda + L)\,v(r)\frac{m}{\sin\vartheta}P_l^m(\cos\vartheta) = -\frac{f^{\cdot}(r,\vartheta)}{r} \mp C\theta(r)\sin\vartheta\, P_l^m(\cos\theta) \tag{2.3}$$

$$(\lambda + L)\,v(r)\,P_l^{m\cdot}(\cos\vartheta) = -\frac{m}{r\sin\vartheta}f(r,\vartheta) \tag{2.4}$$

Вычисляя из последнего уравнения производную

$$-f^{\cdot}(r,\vartheta) = (\lambda + L)\frac{rv(r)}{m}\left[\sin\vartheta\,(P_l^m(\cos\vartheta))^{\cdot\cdot} + \cos\vartheta\,(P_l^m(\cos\vartheta))^{\cdot}\right] =$$

$$= (\lambda + L)\frac{rv(r)}{m}\sin\vartheta\left[\frac{m^2}{\sin^2\theta} - l(l+1)\right]P_l^m(\cos\vartheta)$$

и подставляя ее в (2.3), получаем после сокращений

$$\frac{l(l+1)}{m}(\lambda + L)\,v(r) = \mp C\theta(r) \tag{2.5}$$

Второе уравнение системы (1.2) дает

$$(\lambda P + L)\,\theta(r) = mCv(r) \tag{2.6}$$

Итак, для нахождений радиальных функций $v(r)$ и $\theta(r)$ имеем систему

$$\begin{gathered} v'' + \frac{2v'}{r} + \left[\lambda - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]v = \mp\frac{mC}{l(l+1)}\theta \\ \theta'' + \frac{2\theta'}{r} + \left[\lambda - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\theta = mCv \end{gathered} \tag{2.7}$$

Эта система уравнений должна быть решена с граничными условиями

$$v(1) = 0, \qquad \theta(1) = 0; \qquad v(0),\ \theta(0) \text{ — конечны} \tag{2.8}$$

Будем искать частное решение задачи (2.7), (2.8) в виде

$$v(r) = \frac{B}{\sqrt{r}}J_{l+1/2}(kr), \qquad \theta(r) = \frac{D}{\sqrt{r}}J_{l+1/2}(kr) \tag{2.9}$$

Здесь $J_{l+1/2}(kr)$ — функция Бесселя первого рода. Для B и D получим два алгебраических уравнения

$$(\lambda - k^2)\,B = \mp\frac{mC}{l(l+1)}D, \qquad (\lambda P - k^2)\,D = mCB \tag{2.10}$$

которые совместны, если

$$(\lambda - k^2)(\lambda P - k^2) \pm \frac{m^2C^2}{l(l+1)} = 0 \tag{2.11}$$

[1] Эти решения найдены В. С. Сорокиным (см. замечание к работе [3]).

Отсюда для k^2 получаются два значения, k_1^2 и k_2^2, так что общее решение системы (2.7), ограниченное в начале координат, имеет вид

$$v(r) = \frac{B_1}{\sqrt{r}} J_{l+1/2}(k_1 r) + \frac{B_2}{\sqrt{r}} J_{l+1/2}(k_2 r), \qquad \theta(r) = \frac{D_1}{\sqrt{r}} J_{l+1/2}(k_1 r) + \frac{D_2}{\sqrt{r}} J_{l+1/2}(k_2 r) \tag{2.12}$$

Из четырех постоянных, входящих в (2.12), только две будут независимыми: согласно (2.10)

$$B_1 = \mp \frac{mCD_1}{l(l+1)(\lambda - k_1^2)}, \qquad D_2 = \frac{mCB_2}{(\lambda P - k_2^2)} \tag{2.13}$$

Коэффициенты D_1 и B_2 подлежат определению из граничных условий (2.8) на поверхности жидкого шара. Легко видеть, что существуют два типа решений, удовлетворяющих этим условиям

$$1)\ B_2 = 0,\quad \theta_1(r) = \frac{D_1}{\sqrt{r}} J_{l+1/2}(k_1 r), \qquad v_1(r) = \mp \frac{mCD_1}{l(l+1)(\lambda - k_1^2)} \frac{J_{l+1/2}(k_1 r)}{\sqrt{r}} \tag{2.14}$$

$$2)\ D_1 = 0,\quad v_2(r) = \frac{B_2}{\sqrt{r}} J_{l+1/2}(k_2 r), \qquad \theta_2(r) = \frac{mCB_2}{\lambda P - k_2^2} \frac{J_{l+1/2}(k_2 r)}{\sqrt{r}} \tag{2.15}$$

Согласно принятой в первом параграфе классификации, решение (2.14) соответствует «тепловым», а (2.15), — «гидродинамическим» возмущениям. И для тех, и для других условия (2.8) дают

$$J_{l+1/2}(k_n) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.16}$$

Здесь n — число узлов радиальной функции. Уравнения (2.11), (2.16) определяют декременты «тепловых» λ_1 и «гидродинамических» λ_2 возмущений как функции числа Релея C^2

$$\begin{aligned} \lambda_{1,\,lmn} &= \frac{1}{2P}\left[(P+1)\,k_n^2 - \left((P-1)^2 k_n^4 \mp \frac{4m^2C^2P}{l(l+1)}\right)^{1/2}\right] \\ \lambda_{2,\,lmn} &= \frac{1}{2P}\left[(P+l)\,k_n^2 + \left((P-1)^2 k_n^4 \mp \frac{4m^2C^2P}{l(l+1)}\right)^{1/2}\right] \end{aligned} \tag{2.17}$$

Приведем еще значение нормировочного интеграла, например, для «гидродинамических» возмущений

$$\int \{\mathbf{u}_{1,\,lmn}^2 \mp PT_{1,\,lmn}^2\}\, dV = J_{l-1/2}^2(k_n) \frac{\pi}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\left[l(l+1) \mp \frac{Pm^2C^2}{(\lambda P - k_1^2)^2}\right] \tag{2.18}$$

Критическое значение C_0, выше которого равновесие подогреваемой снизу жидкости неустойчиво относительно возмущения с определенными l, m, n, найдется из условия

$$\lambda_{lmn} = 0$$

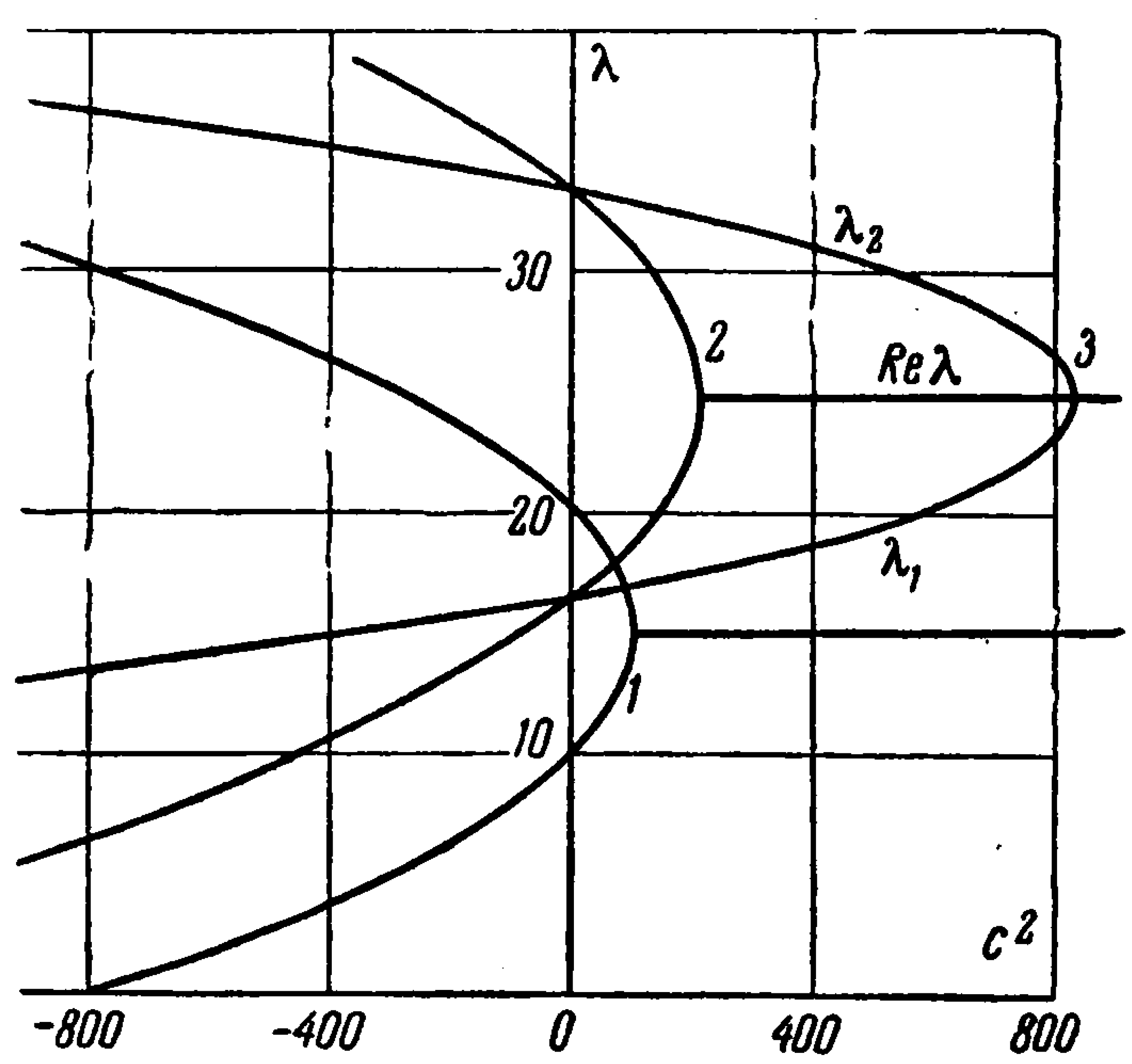
Вычисления дают

$$C_0^2 = \frac{l(l+1)}{m^2} k_n \tag{2.19}$$

При подогревании сверху может быть достигнуто критическое C_*, при котором λ_1 и λ_2, определяемые (2.17), совпадут

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_* = \frac{P+1}{2P} k_n^2$$

$$C_*^2 = \frac{(P-1)^2 k_n^4}{4Pm^2}\, l(l+1) \tag{2.20}$$



а интеграл (2.18) обратится в нуль. При $C > C_*$ появляются два колебательных возмущения, осциллирующие с частотой

$$\left[\frac{m}{Pl\,(l+1)}\right]^{1/2} \sqrt{C^2 - C_*^2} \qquad (2.21)$$

Вещественные части декрементов этих возмущений не зависят от C и равны λ_*. Заметим, что отношение

$$\frac{C_*^2}{C_0^2} = \frac{(P-1)^2}{4P} \qquad (2.22)$$

не зависит от номера возмущения и будет общим для всего спектра декрементов. Несколько нижних декрементов для жидкости с $P = 2$ приведены на фигуре, где кривая *1* соответствует значениям $l = m = n = 1$, кривая *2* — значениям $l = m = 2$, $n = 1$ и кривая *3* — значениям $l = 2$, $m = n = 1$. Подогревание снизу соответствует отрицательным числам Релея.

Рассмотренная задача может быть решена и при других краевых условиях. Например, в случае теплоизолированных стенок ($\theta'(r) = 0$) декременты $\lambda(C)$ находятся из уравнения

$$\frac{J_{l+1/2}(k_1)}{J_{l+1/2}(k_2)} \frac{[(l+1)\,J_{l+1/2}(k_2) + k_2 J_{l-1/2}(k_2)]}{[(l+1)\,J_{l+1/2}(k_1) + k_1 J_{l-1/2}(k_1)]} = \frac{\lambda - k_1^2}{\lambda - k_2^2} \qquad (2.23)$$

где k_1 и k_2 выражаются через λ и C из (2.11).

Авторы благодарят Г. З. Гершуни и Е. М. Жуховицкого за ценную дискуссию.

Поступила 10 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Сорокин В. С. Вариационный метод в теории конвекции. ПММ, 1953, т. 17, вып. 1.
2. Шлиомис М. И. Осциллирующие возмущения в проводящей жидкости в магнитном поле. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
3. Жуховицкий Е. М. Об устойчивости неравномерно нагретой жидкости в шаровой полости. ПММ, 1957, т. 21, вып. 5.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ И ГИДРОМАГНИТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СТРУИ

Е. Г. Ларионцев (Москва)

§ 1. Известно, что покоящийся жидкий цилиндр, окруженный снаружи другой жидкостью, неустойчив при наличии сил поверхностного натяжения [1]. В работе [2] изложены результаты исследования устойчивости в случае, когда цилиндр движется вдоль оси со скоростью $U = \mathrm{const}$ относительно внешней среды; рассмотрение ограничено случаем аксиально симметричных возмущений.

Рассмотрим устойчивость цилиндрического тангенциального разрыва с поверхностным натяжением относительно произвольных возмущений вида

$$f = f(r) \exp\,[i\,(kz + m\varphi - \omega t)] \qquad (1.1)$$

Внутри цилиндра, при $r < a$, величины будем обозначать индексом i ($v_{zi} = U = \mathrm{const}$, p_i, ρ_i), вне цилиндра — индексом e ($v_{ze} = 0$, p_e, ρ_e). Исходя из уравнений идеальной гидродинамики

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \qquad \rho d\mathbf{v} / dt = -\nabla p \qquad (1.2)$$

для возмущений (1.1) получим дисперсионное уравнение

$$\rho_i\beta_i\,(kU - \omega)^2 + \rho_e\beta_e\omega^2 = \alpha\left[k^2 + \frac{m^2-1}{a^2}\right] \quad \left(\beta_i = \frac{I_m(ka)}{kI_m'(ka)}, \quad \beta_e = -\frac{K_m(ka)}{kK_m'(ka)}\right) \qquad (1.3)$$