ЗВУКОПРОВОДНОСТЬ ЧАСТОЙ РЕШЕТКИ

М. И. Гуревич (Москва)

Для вычисления звукопроводности решетки мелкой структуры через присоединенную массу ее элемента специалистам хорошо известна формула Г. Д. Малюжинца, не опубликованная автором. Ниже, с согласия автора, дается новое доказательство этой формулы Г. Д. Малюжинца.

Сделаем несколько предварительных замечаний. Предполагается, что жидкость идеальна и сжимаема. Давление P есть функция одной плотности ρ. Скорости частичек жидкости настолько малы, что квадратами их по сравнению с первыми степенями можно пренебречь. Также малы изменения плотности и давления.

Течение (плоская звуковая волна) обладает потенциалом скоростей Φ. Если потенциал скоростей может быть представлен в виде $e^{i\omega t}f(x, y)$, то он удовлетворяет волновому уравнению (см., например, [1])

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=-k^2\Phi \qquad \left(k=\frac{\omega}{c}\right) \tag{1}$$

Здесь c — скорость звука. Как известно, интенсивность звука измеряется потоком энергии, переносимым прогрессивными волнами через единицу площади. Рассмотрим плоский звуковой поток, потенциал скоростей которого

$$\Phi = A\cos(\omega t - kx) + B\sin(\omega t - kx)$$

удовлетворяет (1). Нетрудно подсчитать, что для этого потока интенсивность звука:

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} P\frac{\partial\Phi}{\partial x}dt = \frac{\rho\omega k}{2}(A^2+B^2) \tag{2}$$

Поведение потенциала скоростей $\Phi(x, y)$ на больших расстояниях от решеток может быть изучено при помощи метода Релея [2]. Исследование течения жидкости перед решеткой и за ней можно проводить аналогичными способами. Поэтому ограничимся рассмотрением течения за решеткой. Пусть имеем плоскую звуковую волну, потенциал которой имеет вид $A\cos(\omega t - kx + \theta_0)$, где A и θ_0 — какие-нибудь постоянные величины. Поместим в наше течение решетку с осью, параллельной оси y. Пусть ось y находится очень близко справа от решетки и пусть решетка имеет период $l = 2\pi / p$. Рассмотрим течение в полуплоскости $x > 0$. Так как потенциал его будет очевидно, пропорционален скорости первоначального течения при $x = 0$, то предположим, что при $x = 0$ для потенциала скоростей Φ справедливо соотношение

$$\Phi_{x=0} = a_0 + a_1\cos py + b_1\sin py + \ldots + a_n\cos npy + b_n\sin npy \ldots$$

Здесь a_n и b_n — линейные комбинации $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$.

Будем искать потенциал скоростей при $x > 0$ в виде

$$\Phi = a_0A_0(x) + \ldots + a_nA_n(x)\cos npy + b_nB_n(x)\sin npy + \ldots \tag{3}$$

Из уравнения (1) вытекает, что $d^2A_0/dx^2 = -k^2A_0$. Следовательно, A_0 представляет собой линейную комбинацию $\cos kx$ и $\sin kx$. Соответственный член в (3) дает потенциал прошедшей волны. Далее A_n (так же, как и B_n), в силу уравнения (1), удовлетворяет уравнению

$$d^2A_n/dx^2 = (n^2p^2 - k^2)A_n$$

Если структура решетки мелка, т. е. $p > k$, то

$$A_n = C_1e^{-x\sqrt{n^2p^2-k^2}} + C_2e^{x\sqrt{n^2p^2-k^2}}$$

где C_1 и C_2 — постоянные. Физически очевидно, что при $x \to \infty$ амплитуда должна оставаться конечной, и поэтому $C_2 = 0$. Таким образом, поле скоростей за решеткой состоит из прошедшей волны и из течения, потенциал которого затухает, по крайней мере, как $\exp(-x\sqrt{p^2-k^2})$ при $x \to \infty$.

Если структура решетки достаточно мелка, то сказанное нетрудно обобщить и на случай, когда ось решетки не перпендикулярна направлению звуковой волны.

Анализ, аналогичный только что проведенному, показывает, что и в этом более общем случае течение за решеткой будет состоять из прошедшей волны и течения, потенциал скоростей которого будет затухать при $x \to \infty$ по экспоненциальному закону, лишь бы угол (фигура) между осью решетки LL и осью x не был мал.

Приступим теперь к выводу формулы Г. Д. Малюжинца для звукопроводности частой решетки. Если на пути звуковой волны, идущей в направлении оси x, поместить решетку, период и толщина которой малы по сравнению с длиной волны $\lambda = 2\pi / k$, то часть волны пройдет сквозь решетку, часть отразится и, кроме того, появится течение, заметное лишь в непосредственной близости от решетки.

Начало координат поместим внутрь одного из элементов решетки. Пусть падающая и отраженная волны перед решеткой имеют потенциал

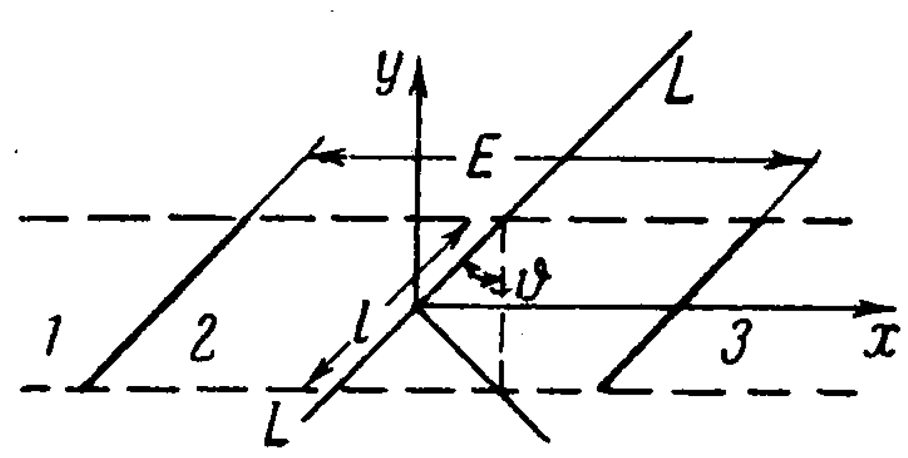
$$\Phi^{(1)} = A \cos(\omega t - kx) + B \sin(\omega t - kx + \beta) + C \sin(\omega t + kx + \gamma)$$

Здесь $\Phi^{(3)} = A \cos(\omega t - kx)$ представляет собой потенциал прошедшей волны. Параметры A, B, C, β, γ нужно связать так, чтобы течение слева от решетки непрерывно переходило в течение справа от решетки. После этого коэффициент звукопроводности решетки найдется очень легко. Скорость набегающего на решетку потока, вследствие малости размеров решетки по сравнению с длиной волны, равна

$$U \approx [\partial\Phi / \partial x]_{x=0} = kA \sin \omega t - kB \cos(\omega t + \beta) + kC \cos(\omega t + \gamma)$$

Скорость непосредственно за решеткой равна

$$U^{(3)} \approx [\partial\Phi^{(3)} / \partial x]_{x=0} = kA \sin \omega t$$



Вследствие неразрывности течения и несжимаемости жидкости вблизи решетки следует положить $U^{(1)} = U^{(3)}$. Откуда $B = C$ и $\beta = \gamma$, а скорость набегающего на решетку потока равна

$$U = kA \sin \omega t \tag{4}$$

Рассмотрим теперь картину течения еще детальнее. Выделим элемент решетки, содержащий в себе начало координат и соответствующую ему полосу течения от $x = -\infty$ до $x = \infty$. Вид этой полосы нет нужды уточнять; достаточно предположить, что верхняя и нижняя границы ее получаются одна из другой параллельным переносом на период решетки. Разобьем рассматриваемую полосу на три области (фигура).

Область 1 простирается от $x = -\infty$ почти до $x = 0$. Потенциал скоростей в ней

$$\Phi = \Phi^{(1)} = A \cos(\omega t - kx) + B [\sin(\omega t - kx + \beta) + \sin(\omega t + kx + \beta)]$$

Область 2 расположена в окрестности $x = 0$; во всех направлениях она мала по сравнению с длиной волны (т. е. $k\sqrt{x^2 + y^2}$ в ней мало), но ε — длина области 2, бесконечно малая по сравнению с длиной волны, бесконечно велика по сравнению с периодом решетки. Течение в области 2 можно рассматривать как течение несжимаемой жидкости ([1], гл. X, §§ 290, 305), набегающей на решетку со скоростью U.

Течение области 2 состоит из течения, вызываемого решеткой, движущейся со скоростью $-U$ (потенциал φ) и из равномерного потока с потенциалом Ux

$$\Phi = \Phi^{(2)} = \varphi + Ux$$

Область 3 простирается от $x = \infty$ почти до $x = 0$. Потенциал скоростей в ней

$$\Phi = \Phi^{(3)} = A \cos(\omega t - kx)$$

Подсчитаем теперь разность потенциалов $\delta\Phi$ между правой и левой границами области 2 двумя различными способами. С одной стороны, пренебрегая в каждом из членов $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(3)}$ малыми величинами $|kx|$ высших порядков, получаем

$$\delta\Phi = k\varepsilon A \sin \omega t - 2B \sin(\omega t + \beta) \tag{5}$$

С другой стороны, та же разность потенциалов равна

$$\delta\Phi = U\varepsilon + \delta\varphi \tag{6}$$

где $\delta\varphi$ есть разность потенциалов между правой и левой границами области 2. Вследствие сделанных предположений о структуре решетки и о размерах области 2 имеем

$$\delta\varphi \approx \varphi_{(x\to\infty)} - \varphi_{(x\to-\infty)} = \varphi_\infty - \varphi_{-\infty} \tag{7}$$

Из (4) — (7) вытекает, что должно иметь место приближенное равенство

$$-2B\sin(\omega t + \beta) = \varphi_\infty - \varphi_{-\infty} \tag{8}$$

Пользуясь теоремой об изменении количества движения, можно вычислить $\varphi_\infty - \varphi_{-\infty}$ через присоединенную массу и площадь элемента решетки. Согласно Л. И. Седову [3]

$$\lambda_{11}U + i\lambda_{12}U = -\rho SU + i\rho\int z\,dw, \qquad w = \varphi + i\psi, \qquad z = x + iy \tag{9}$$

Здесь S площадь элемента решетки, λ_{11} — присоединенная масса в направлении оси x, w — комплексный потенциал течения жидкости при движущейся решетке. Интеграция производится вдоль любого замкнутого контура, охватывающего один раз элемент решетки. Можно доказать, что в бесконечности справа и слева

$$z\left(\frac{dw}{dz}\right)_{x=\pm\infty} = 0 \tag{10}$$

Поэтому растягивая контур интеграции до границ области 2, т. е. сравнительно с периодом и толщиной решетки от $x = -\infty$ до $x = \infty$ и пользуясь тем, что в тех точках верхней и нижней границ, которые отличаются на период $l(\sin\vartheta + i\cos\vartheta)$ комплексные скорости $dw\,/\,dz$ равны между собой, получим

$$\oint z\,dw = -\,l(\sin\vartheta + i\cos\vartheta)(w_\infty - w_{-\infty}) = -\,l(\sin\vartheta + i\cos\vartheta)(\varphi_\infty - \varphi_{-\infty})$$

Отсюда, пользуясь (9), получаем

$$\varphi_\infty - \varphi_{-\infty} = \frac{kA\sin\omega t\,(\lambda_{11} + \rho S)}{\rho l\cos\vartheta} \tag{11}$$

Вставляя $\varphi_\infty - \varphi_{-\infty}$ из (11) в (8), получаем, что

$$-2B\sin(\omega t + \beta) = \frac{kA\sin\omega t\,(\lambda_{11} + \rho S)}{\rho l\cos\vartheta}$$

Отсюда

$$\beta = 0, \qquad B = -\frac{kA\,(\lambda_{11} + \rho S)}{2\rho l\cos\vartheta}$$

Теперь, пользуясь уравнением (2), найдем, что средняя энергия, передаваемая набегающей E_1, а также проходящей E_2 и отраженной E_3 волной, соответственно равна:

$$E_1 = \frac{\rho\omega k}{2}A^2\left[1 + \frac{k^2(\lambda_{11} + \rho S)^2}{4\rho^2 l^2\cos^2\vartheta}\right], \quad E_2 = \frac{\rho\omega k}{2}A^2, \quad E_3 = \frac{\rho\omega k}{2}A^2\frac{k^2(\lambda_{11} + \rho S)^2}{4\rho^2 l^2\cos^2\vartheta}$$

Отсюда для коэффициентов звукопроводности α и отражения r имеем

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \left[\frac{\omega(\lambda_{11} + \rho S)}{2\rho Cl\cos\vartheta}\right]^2, \qquad \frac{1}{r} = 1 + \left[\frac{2\rho Cl\cos\vartheta}{\omega(\lambda_{11} + \rho S)}\right]^2$$

Таким образом, знание присоединенной массы решетки позволяет вычислить коэффициенты звукопроводности и отражения решетки, т. е. решает вопрос о том, какую часть звука решетка пропускает и какую отражает.

Поступила 29 VI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. Гостехтеоретиздат. М.— Л., 1947.
2. Рэлей (Стретт Дж. В.) Теория звука. Гостехтеоретиздат, М., 1955, т. 2, § 272а.
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехтеоретиздат. М.—Л., 1950, гл. 1, § 4.